

УДК 539.3

© 1995 г. А. А. ЕВТУШЕНКО, Е. Г. ИВАНИК

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ ПРИ ФРИКЦИОННОМ ТОРМОЖЕНИИ

В результате фрикционного теплообразования происходит термическое искажение профилей поверхностей, вызывающее развитие неравномерного распределения контактного давления. Последующее уменьшение области контакта вследствие термического выпучивания и повышение концентрации давления приводит к локальному повышению температуры и образованию так называемых «горячих пятен», где температура значительно превышает ожидаемую среднюю и зачастую приводит к разрушению материалов пары трения. Экспериментальные данные о наличии зон повышенной температуры в железнодорожных и авиационных тормозах, полученные в лабораторных и эксплуатационных условиях, содержатся в [1, 2].

Для оценки уровня контактных температур в тормозных системах существует два подхода: стендовые испытания и компьютерное моделирование на основе экспериментальных данных. Однако оба эти метода являются весьма трудоемкими, требующими к тому же значительных затрат времени. В публикуемой работе предлагается моделировать процесс функционирования фрикционной тормозной системы на основе контактной задачи термоупругости, обладающей достаточно простым решением. Будем исходить из предположения, что все фрикционное тепло, генерируемое на контакте, распространяется в одно из взаимодействующих тел. Очевидно, что это имеет место в том случае, если одно из тел трущейся пары имеет очень низкий коэффициент теплопроводности, либо конфигурация тел такова, что в области контакта существует высокое термосопротивление. Указанные условия достаточно хорошо удовлетворяются для композиционных тормозных колодок, скользящих по стальному железнодорожному колесу или таких же тормозных подушек, прижимаемых к чугунному диску [3, 4].

1. Рассмотрим осесимметричную контактную задачу квазистатической термоупругости для системы, состоящей из двух взаимодействующих тел, одно из которых скользит по поверхности другого со скоростью $V(t)$ (t — время) и вдавливается в него силой P (фиг. 1). Скольжение сопровождается выделением тепла на площадке контакта в виде теплового потока

$$q(r, t) = fV(t) p(r, t) H[a(t) - r], \quad r \leq a(t), \quad t > 0 \quad (1.1)$$

где $a(t)$ — радиус круговой площадки контакта, f — коэффициент трения, $H(\cdot)$ — единичная функция Хевисайда.

Считаем, что неподвижное тело является жестким теплоизолятором; поверхности взаимодействующих тел вне области контакта свободны от внешних усилий и теплоизолированы; взаимосвязью касательных и нормальных усилий на площадке контакта пренебрегаем.

Закон изменения скорости во времени ($0 \leq t \leq t_s$; t_s — время торможения) примем в виде

$$V(t) = V_0 (1 - t/t_s) \quad (1.2)$$

Решение сформулированной контактной задачи в такой постановке получим на основе последовательного решения двух задач: определение температурного поля и нормальных смещений в теплопроводном упругом полупространстве $z \geq 0$, вызванных действием теплового потока, заданного в виде (1.1); решение

задачи о контакте тела с термически деформируемой поверхностью и жесткого теплоизолированного полупространства.

Температура поверхности $z = 0$ полупространства вследствие его нагрева тепловым потоком (1.1) определяется выражением [5]:

$$T(r, t) = \frac{1}{4c_v (\pi k)^{\frac{1}{2}}} \int_0^t \int_0^{\alpha(\tau)} \int_0^{2\pi} \frac{q(s, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-X^2} s d\theta ds d\tau, \quad X^2 = \frac{r^2 - 2rs \cos \theta + s^2}{4k(t-\tau)}, \quad (1.3)$$

где k — коэффициент температуропроводности, c_v — объемная теплоемкость.

Соответствующее термическое нормальное перемещение имеет вид [6]:

$$u_z^t(r, t) = -\frac{\delta}{4\pi} \int_0^t \int_0^{\alpha(\tau)} \int_0^{2\pi} \frac{q(s, \tau)}{t-\tau} \Phi\left(\frac{3}{2}; 2; -X^2\right) s d\theta ds d\tau \quad (1.4)$$

$$\delta = \alpha(1 + \nu)/K$$

где $\Phi(\zeta; \zeta; -\eta)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, K — коэффициент теплопроводности, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного температурного расширения.

С другой стороны предполагаем, что нормальную компоненту вектора термического перемещения поверхности полупространства в произвольный момент времени $t > 0$ можно аппроксимировать квадратичной по r функцией

$$u_z^t(r, t) = c_0(t) + c_1(t)r^2, \quad r \leq a(t) \quad (1.5)$$

где $c_0(t)$, $c_1(t)$ — неизвестные пока функции, зависящие только от времени.

Условие контакта тел при решении второй задачи, которую будем рассматривать в квазистационарной постановке, имеет вид

$$u_z^e(r, t) + u_z^t(r, t) = \Delta(t) - 1/2r^2/R_0, \quad r \leq a(t), \quad t \geq 0 \quad (1.6)$$

где $\Delta(t)$ — взаимное сближение тел как жестких целых, R_0 — радиус закругления основания теплопроводного тела.

В начальный момент времени ($t = 0$) упругое перемещение $u_z^e(r, t)$ и контактное давление p определяются формулами Герца [7]:

$$u_z^e(r, 0) = \frac{3P(1-\nu)[2a^2(0) - r^2]}{16\mu a^3(0)}, \quad p(r, 0) = \frac{3P\sqrt{a^2(0) - r^2}}{2\pi a^3(0)} \quad (1.7)$$

где μ — модуль сдвига.

С учетом равенства (1.5) граничное условие (1.6) переписывается таким образом

$$u_z^e(r, t) = c_0^*(t) - c_1^*(t)r^2, \quad r \leq a(t), \quad t \geq 0 \quad (1.8)$$

$$c_0^*(t) = \Delta(t) - c_0(t), \quad c_1^*(t) = c_1(t) + 1/(2R_0)$$

Следовательно, для нахождения упругого перемещения и контактного давления в произвольный момент времени $t > 0$ также можно использовать формулы Герца (1.7). Сравнение коэффициентов при r^2 в формулах (1.7) и (1.8) дает

$$c_1^*(t) = 3P(1-\nu)/[16\mu a^3(t)] \quad (1.9)$$

После подстановки в соотношение (1.7) значения радиуса площадки контакта $a(t)$ из (1.9), получаем

$$p(r, t) = \frac{8\mu c_1^*(t)\sqrt{a^{2(t)} - r^2}}{\pi(1-\nu)}, \quad r \leq a(t), \quad t > 0 \quad (1.10)$$

Таким образом, равенства (1.1), (1.9), (1.10) свидетельствуют, что для определения контактного давления $p(r, t)$, фрикционного теплового потока

$q(r, t)$ и радиуса площадки контакта $a(t)$ необходимо знать вид функции $c_1^*(t)$.

Отметим, что соответствующая осесимметричная контактная задача в предположении равномерного скольжения тел с постоянной скоростью V_0 в условиях стационарного режима теплообразования рассмотрена в [8]. Установлено, что предельное ($P \rightarrow \infty$) значение радиуса области контакта в этом случае равно

$$a_0 = \frac{\pi K (1 - \nu)}{1,566 \alpha \mu f V_0 (1 + \nu)} \quad (1.11)$$

Величина a_0 , как видно из (1.11), не зависит от прижимающей силы P . Это естественно, поскольку искажающий поверхность полупространства фрикционный нагрев и контактное давление, восстанавливающее соответствие в области сопряжения, пропорциональны приложенной нагрузке. Поэтому, изменение величины нагрузки вызывает пропорциональное изменение напряжений, смещений и температуры в трибосистеме, оставляя при этом постоянной геометрию области контакта. Кроме того из (1.11) следует, что увеличение скорости скольжения V_0 приводит к уменьшению радиуса контактного круга, так как при этом возрастает фрикционный разогрев с максимальной температурой T_{\max} в центре области контакта [9] $T_{\max} = 3fV_0P/(8a_0K)$, или с учетом (1.11):

$$T_{\max} = \frac{0,587 \alpha f^2 V_0^2 P \mu (1 + \nu)}{\pi K^2 (1 - \nu)} \quad (1.12)$$

Из формулы (1.12) следует, что для заданной мощности теплообразования fV_0P , максимальное значение температуры в центре области контакта можно понизить, используя для этой цели материалы с небольшим коэффициентом трения f или с низким модулем сдвига μ . Именно этим требованиям удовлетворяют тормозные колодки из композиционных материалов [10], заменяющие чугунные колодки с большим значением модуля жесткости.

2. Соотношение (1.4) для определения нормального перемещения с учетом формул (1.1), (1.2), (1.10), (1.11) примет вид:

$$u_z^{(6)}(r, t) = - \frac{16k}{1,566\pi a_0} \int_0^t \int_0^{A(\tau)} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) c_1^*(\tau) \sqrt{A^2 - S^2} \times \\ \times \sqrt{k(t-\tau)} \Phi \left[\frac{3}{2}; 2; -(R^2 - 2R \cos \theta + S^2) \right] S d\theta dS d\tau \quad (2.1)$$

$$A^2 = \frac{a^2}{4k(t-\tau)}, \quad R^2 = \frac{r^2}{4k(t-\tau)}, \quad S^2 = \frac{s^2}{4k(t-\tau)} \quad (2.2)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_1(R, S) = \int_0^{2\pi} \Phi \left[\frac{3}{2}; 2; -(R^2 - 2R \cos \theta + S^2) \right] d\theta$$

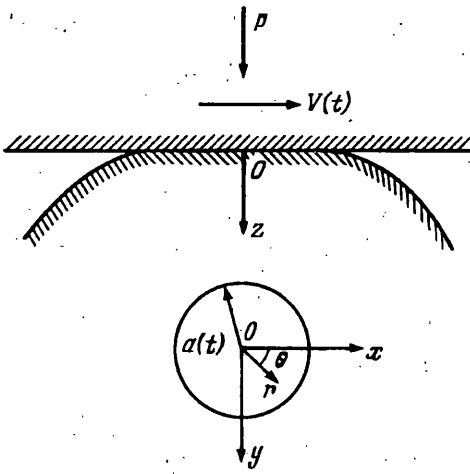
$$\Phi_2(R, A) = \int_0^A \sqrt{A^2 - S^2} \Phi_1(R, S) S dS$$

Используя разложение вырожденной гипергеометрической функции в ряд [11]:

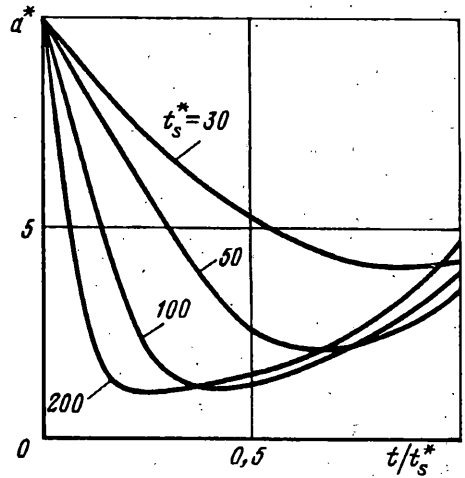
$$\Phi \left(\frac{3}{2}; 2; -R^2 \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1)!! (-R^2)^i}{(2i)!! (i+1)!}$$

и значение интегралов

$$\int_0^{2\pi} [1 - 2PS^{-1} \cos \theta + R^2S^{-2}]^i d\theta = 2\pi \sum_{j=0}^i (C_j^i)^2 \left(\frac{R}{S}\right)^{2j}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\int_0^A \sqrt{A^2 - S^2} S^{2i-2j+1} dS = \frac{(2i-2j)!!}{(2i-2j+3)!!} A^{2i-2j+3} \quad (j \leq i)$$

находим

$$\Phi_1(R, S) = 2\pi \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1)!! (-S^2)^i}{(2i)!! (i+1)!} \sum_{j=0}^i (C_j^i)^2 \left(\frac{R}{S}\right)^{2j} \quad (2.3)$$

$$\Phi_2(R, A) = -2\pi A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1)!! (-A^2)^{i+1}}{(2i)!! (i+1)!} \sum_{j=0}^i (C_j^i)^2 \frac{(2i-2j)!!}{(2i-2j+3)!!} \left(\frac{R}{A}\right)^{2j} \quad (2.4)$$

где C_j^i — коэффициенты бинома Ньютона.

С учетом формул (2.3), (2.4) выражение (2.1) переписывается таким образом

$$u_z'(r, t) = \frac{16k}{1,566\pi a_0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1)!! (-1)^{i+1}}{(2i)!! (i+1)!} \sum_{j=0}^i (C_j^i)^2 \times \\ \times \frac{(2i-2j)!!}{(2i-2j+3)!!} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_s}\right) c_1^*(\tau) \left(\frac{r}{a}\right)^{2j} A^{2i+2} d\tau \quad (0 \leq t \leq t_s) \quad (2.5)$$

Меняя в (2.5) порядок суммирования и ограничиваясь при этом первыми двумя слагаемыми по j , находим

$$u_z'(r, t) = \frac{8k}{1,566\pi a_0} \sum_{j=1}^1 \sum_{i=j}^{\infty} \frac{(2i+1)!! (-1)^{i+1}}{(2i)!! (i+1)!} (C_j^i)^2 \times \\ \times \frac{(2i-2j)!!}{(2i-2j+3)!!} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_s}\right) c_1^*(\tau) \left(\frac{r}{a}\right)^{2j} A^{2i+2} d\tau \quad (0 \leq t \leq t_s) \quad (2.6)$$

Сравнивая коэффициенты при r^2 в соотношениях (1.5) и (2.6), получаем

$$c_1^*(t) = \frac{8k}{1,566\pi a_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)!} \int_0^t (-A)^{2i+2} \left(1 - \frac{\tau}{t_s}\right) c_1^*(\tau) \frac{d\tau}{a(\tau)} + c_1^*(0),$$

$$c_1^*(0) = \frac{1}{2R_0} \quad (0 \leq t \leq t_s) \quad (2.7)$$

Приняв во внимание, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)!} (-A^2)^{i+1} = 1 - (1 + A^2) e^{-A^2} = \Psi(A)$$

и вводя в соотношении (2.7) безразмерное время

$$t^* = 4kt/a_0^2, \quad \tau^* = 4k\tau/a_0^2, \quad t_s^* = 4kt_s/a_0^2 \quad (2.8)$$

приходим к интегральному уравнению типа Вольтерра относительно функции $c_1^*(t^*)$:

$$c_1^*(t^*) = 0,783a_0 \int_0^{t^*} \left(1 - \frac{\tau}{t_s}\right) c_1^*(\tau^*) \Psi(A) \frac{d\tau^*}{a(\tau^*)} + c_1^*(0) \quad (0 \leq t^* \leq t_s) \quad (2.9)$$

Введя новую искомую функцию $a^* = a/a_0$, интегральное уравнение (2.9) с учетом (1.9), приведем к виду (звездочки опущены):

$$\frac{0,783}{a^3(t)} - \frac{0,783}{a^3(0)} = \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_s}\right) \Psi(A) \frac{d\tau}{a^4(\tau)} \quad (2.10)$$

Согласно (2.2), для малых значений времени t величина A достаточно велика. Тогда при $A > 4$ будем иметь $\Psi(A) \cong 1$. В этом случае интегральное уравнение (2.10) упростится и примет вид

$$\frac{0,783}{a^3(t)} - \frac{0,783}{a^3(0)} = \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_s}\right) \frac{d\tau}{a^4(\tau)} \quad (0 \leq t \leq t_s)$$

Его решением является функция

$$a(t) = a(0) - 0,426t(1 - t/t_s) \quad (2.11)$$

или, с учетом обозначений (2.8): $a(t) = a(0) - 1,704kt^2(1 - t/t_s)/a_0$.

Скорость изменения радиуса участка контакта равна

$$\frac{da}{dt} = -1,704 \left(1 - 2 \frac{t}{t_s}\right) \frac{k}{a_0} < 0 \quad \text{при } t < 0,5t_s \quad (2.12)$$

и зависит только от коэффициента температуропроводности k и радиуса a_0 круга контакта при установившемся режиме теплообразования.

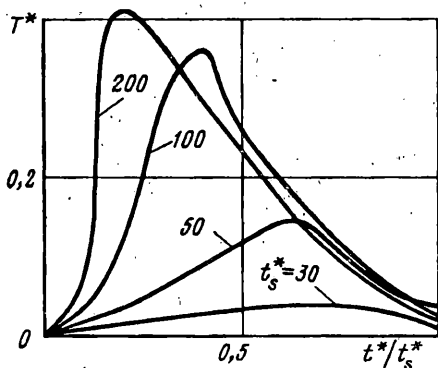
3. Численный алгоритм решения интегрального уравнения (2.10) построим на основе метода кусочно-постоянной аппроксимации [12]. С этой целью промежуток интегрирования $[0, t]$ разделим на l равных частей длины $\delta t = t/l$: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l-1} < \tau_l = t$. На каждом участке $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ полагаем, что искомая функция постоянна, т. е. $a(t) = a(t_j) \equiv a_j$, $t_j = \tau_j - 0,5\delta t$ ($j = \overline{1, l}$). Поскольку согласно формул (2.2), (2.8) при этом $A^2 = a_j^2/(t - \tau)$, $d\tau = 2(a_j^2/A^3) dA$, то интегральное уравнение (2.10) сводится к рекуррентному алгебраическому соотношению

$$\frac{0,783}{a^3(t_j)} - \frac{0,783}{a^3(0)} = 2 \sum_{j=1}^{l-1} \left[\left(1 - \frac{t_j}{t_s}\right) \frac{B_{j,l}^1}{a_j^2} + \frac{B_{j,l}^2}{t_s} \right] \quad (3.1)$$

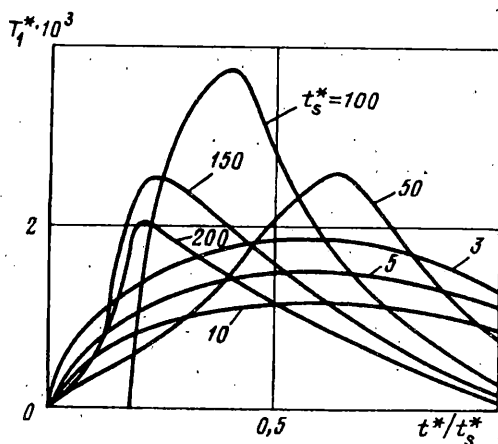
$$B_{j,l}^1 = \int_{A_1}^{A_2} \Psi(A) A^{-3} dA, \quad B_{j,l}^2 = \int_{A_1}^{A_2} \Psi(A) A^{-5} dA$$

$$A_1^2 = a_j^2/t_1^*, \quad A_2^2 = a_j^2/t_1^-, \quad t_1^{\pm} = (l - j \pm 0,5) \delta t$$

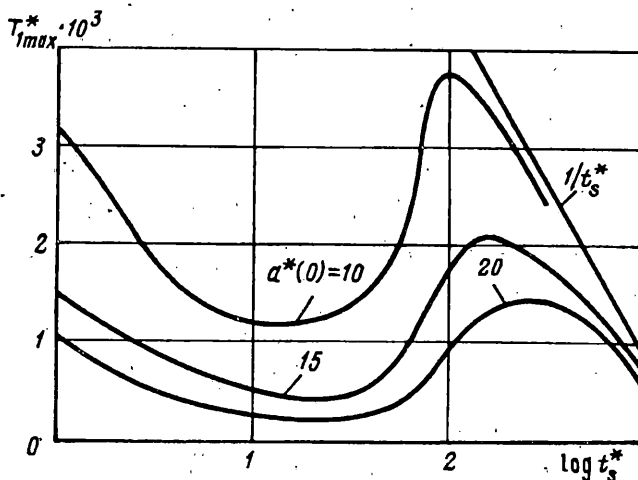
Алгоритм предлагается строить следующим образом: вычисления начинаем при $l=1$ (в этом случае $a(t_1) = a(0)$), что соответствует радиусу площади контакта изотермической задачи Герца); дальнейшие подсчеты по формуле



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

(3.1) позволяют определить величину $a(t)$ через предыдущие значения $a(t_j)$, $j = 1, l - 1$; функции влияния B_{μ}^m ($m = 1, 2$) находятся путем численного интегрирования.

4. Температура в области контакта определяется по формуле (1.3) с помощью соотношений (1.1), (1.10) и функции $c_1^*(t)$. Вследствие симметрии задачи, максимальная температура достигается в центре круговой области взаимодействия. При $r = 0$ из соотношения (1.3), с учетом (1.9) и (2.8), следует (звездочки опущены)

$$T(t) = \frac{4T_{\max}}{\pi \sqrt{\pi}} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_s}\right) \Phi_3(A) \frac{d\tau}{a^3(\tau)} \quad (0 \leq t \leq t_s)$$

Максимальная температура на контакте в установившемся режиме теплообразования T_{\max} определяется по формуле (1.12), а функция $\Phi_3(A)$ равна

$$\Phi_3(A) = 0,5A [1 - F_1(A)], \quad F_1(A) = e^{-A^2} A^{-1} \int_0^A e^{\xi^2} d\xi$$

где $F_1(A)$ — интеграл Досона [13].

Для вычисления функции $F_1(A)$ воспользуемся результатами [14], где приведены ее разложения в степенной ряд при малых ($A < 3$) значениях аргумента

$$F_1(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2A^2)^i}{(2i+1)!!}$$

и асимптотику при $A > 3$:

$$F_1(A) \cong \sum_{i=0}^N \frac{(2i-1)!!}{(2A^2)^{i+1}}$$

5. Результаты численных исследований приведены в виде графиков на фиг. 2—5.

Фиг. 2 показывает изменение безразмерного радиуса области контакта a^* , а фиг. 3 — безразмерной температуры $T^* = T/T_{\max}$, в зависимости от величины t^*/t_s^* . При вычислениях принималось $a^*(0) = 10$; $t_s^* = 30, 50, 100, 200$. Сравнение полученных результатов показывает, что максимальные значения температуры достигаются при тех же значениях времени, при которых радиус участка контакта минимален. Из приведенных на фиг. 3 графиков следует также, что время торможения существенно влияет на возникновение зон с высокой температурой (горячих пятен) в области контакта: они могут зародиться лишь в условиях длительного торможения.

С целью оценки величины, определяющей время достижения максимальной контактной температуры, осуществим в формуле (2.11) предельный переход при $t_s \rightarrow \infty$ и экстраполяцию зависимости $a(t)$ на временную ось. В результате получим

$$t^* = 2,347a^*(0) \quad (5.1)$$

или, переходя к размерному виду

$$t = 0,587a(0) a_0 k^{-1} \quad (5.2)$$

Из соотношения (5.2) следует, что время возникновения горячего пятна зависит только от теплофизического параметра k и параметров, детерминированных контактными условиями. Соотношения (2.12), (5.1) дают возможность подбирать материалы пары трения и условия контактирования таким образом, чтобы увеличить нестационарную часть поведения трибосистемы с последующим понижением максимальной температуры. Ниже представлены значения безразмерного времени t^* при которых температура T^* принимает максимальные значения для нескольких величин времени торможения и $a^*(0) = 10$.

t_s^*	50	100	150	200	400
t^*	30	32	37	40	39

Эти значения можно сравнить с оценкой $t^* \cong 23$, полученной по формуле (5.1).

Представим время торможения так [3] $t_s = a_0^2 t_s^*/(4K) = MV_0/(fP)$, где M — масса, отнесенная к радиусу тормозной поверхности.

Тогда максимальная стационарная температура примет вид

$$T_{\max} = 3MV_0^2/(2a_0^3 c t_s^*) \quad (5.3)$$

В формуле (5.3) $1/2MV_0^2$ — кинетическая энергия системы перед началом торможения.

Обозначим $T_1 = 3MV_0^2/(2a_0^3c_0t_0^*)$. Тогда получим

$$T_1^* = T/(T_{\max}t_0^*) = T/T_1 \quad (5.4)$$

Физически величина $a_0^3c_0$ — теплоемкость куба из данного материала со стороны a_0 . Поэтому T_1 является температурой, равной отношению начальной кинетической энергии системы к количеству тепла в одной трети этого куба. Отсюда $T_1^* \ll 1$.

На фиг. 4 показано изменение T_1^* от t_0^*/t_0^* для $a^*(0) = 10$ при заданных значениях $t_0^* = 3, 5, 10, 50, 100, 150, 250$. Поведение T_1^* будет различным в зависимости от величины времени торможения. Отчетливо видно, что можно выделить два интервала его изменения:

— быстрое торможение ($t_0^* < 50$). Горячие пятна на контакте не возникают и при низких значениях t_0^* ; радиус площадки контакта изменяется незначительно. В этом режиме максимальная температура T_1^* достигается в точке, равной примерно половине тормозного пути и на этом участке ее можно представить как $T_{1\max}^* = 1/\sqrt{T_1^*}$;

— медленное торможение ($t_0^* > 100$). В этом случае время торможения является достаточным для возникновения горячих пятен. Максимальная температура, как было отмечено выше, будет достигаться в те же моменты времени, когда площадь контакта минимальна. При этом значение температуры может быть равным максимальному значению $T_{1\max}$ и, следовательно, из (5.4) находим

$$T_1^* = 1/t_0^* \quad (5.5)$$

На фиг. 5 в полулогарифмическом масштабе показано изменение максимального значения T_1^* в зависимости от t_0^* для $a^*(0) = 10, 15, 20$. При малых временах торможения ($t_0^* < 50$) зависимость $T_{1\max}^*$ является убывающей функцией, а при $t_0^* > 50$ происходит резкое повышение температуры на контакте. Эта картина принимает более четкое очертание для больших значений $a^*(0)$, что соответствует большей начальной скорости скольжения. При $t_0^* \rightarrow \infty$ температурные поля выходят на асимптоту (5.5).

Таким образом предложенный подход дает возможность определить уровень максимальной фрикционной температуры во время торможения, а также время ее достижения. Численный эксперимент показал, что увеличение радиуса области контакта a_0 в установившемся режиме теплообразования приводит к росту длительности переходного процесса и снижению максимальной контактной температуры; кратким временам интенсивного торможения соответствуют низкие контактные температуры, тогда как длительным — высокие, достаточные для образования «горячих пятен».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пыжевич Л. М. Результаты испытаний неметаллических и комбинированных тормозных колодок//Техника железных дорог. 1953. № 3. С. 23—24.
2. Тормозостроение за рубежом (Сб. переводов и рефератов) /Под ред. Г. М. Боровского. М.: Госинти, 1959. 222 с.
3. Александров М. П. Тормозные устройства в машиностроении. М.: Машиностроение, 1965. 676 с.
4. Rowson D. M. The interfacial surface temperature of a disc brake//Wear. 1978. V. 47. N 2. P. 323—328.

5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
6. Barber J. R. Distortion of the semi—infinite solid due to transient surface heating//Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. N 6. P: 377—393.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
8. Barber J. R. Some thermoelastic contact problem involving frictional heating//Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1976. V. 29. № 1. P. 1—13.
9. Евтушенко А. А., Уханская О. М. Нестационарный фрикционный разогрев при скольжении упругих сжимаемых тел//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 111—117.
10. Тормозные устройства (Справочник)/Под ред. М. П. Александров; А. Г. Лысяков, В. Н. Федосеев, М. В. Новожилов. М.: Машиностроение, 1985. 311 с.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
12. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 543 с.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган: М.: Наука, 1979. 830 с.
14. Barber J. R., Martin-Moran C. J. Green's functions for transient thermoelastic contact problems for the half-plane//Wear. 1982. V. 79. № 1. P. 11—19.

Львов

Поступила в редакцию
5.III.1994