МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1995

УДК 539.3

 В. А. КОНДРАТЬЕВ, С. И. ТАРАКАНОВ

О СИНГУЛЯРНОСТИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ГРАДИЕНТОВ В ОКРЕСТНОСТИ ОСТРОГО ВЫРЕЗА В СОСТАВНОМ ТЕЛЕ

При термическом нагружении тел, которые содержат острые вырезы и трещины, (например, при термическом разрушении горных пород) существенным фактором является температурный градиент. Локальные повышенные температурные градиенты, в особенности сингулярные, могут способствовать ускорению процесса разрушения. Для таких температурных полей весьма важно знать его порядок сингулярности, например, для более точного вычисления независимых интегралов. Некоторые работы в этом направлении известны. В [1] для стационарного распределения температур определялся порядок сингулярности его градиента для трещины, выходящей на границу раздела двух сред. Здесь рассматривается нестационарная проблема для составного тела с вырезом.

Пусть плоская область Ω состоит из двух изотропных областей Ω_1 и Ω_2. Составное тело образуется тремя лучами l, l_1, l_2, выходящими из точки O; l является границей раздела. Углы между лучами l и l_1, l и l_2, l_2 и l_1 соответственно равны $\omega_1, \omega_2, \omega$ $(0 < \omega \le 2\pi)$. В каждой области Ω_i температурное поле T_i удовлетворяет следующим уравнениям:

$$b_i^2\, \partial T_i/\partial t = \Delta T_i, \quad t > 0 \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$T_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad x \subset \Omega_i \tag{2}$$

$$T_1|_{l_1} = 0, \quad T_2|_{l_2} = 0 \tag{3}$$

Вместо краевых условий (3) ниже будут рассмотрены условия для второй краевой задачи, а также смешанные условия.

Предполагается, что функции T_i непрерывны в Ω_i $(i = 1, 2)$. Температурные поля T_1 и T_2 на линии контакта l удовлетворяют идеальным условиям совместности

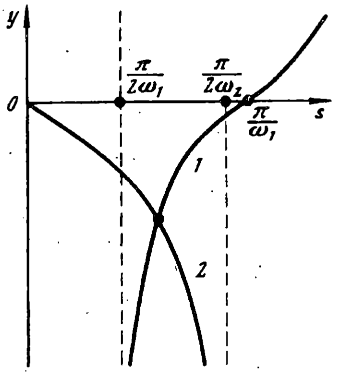
$$T_1 = T_2, \quad k_1\, \partial T_1/\partial n_1 = k_2\, \partial T_2/\partial n_2 \tag{4}$$

где k_i — коэффициент термической проводимости $(k_1 \ne k_2)$.

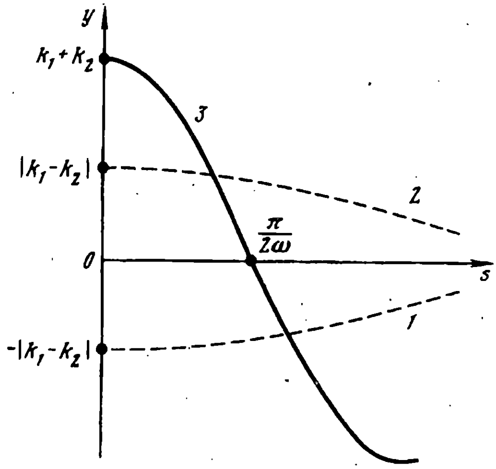
Пусть r, φ — полярная система координат с центром в точке O. Укажем асимптотический вид решения в окрестности точки O при $t > 0$. Уравнения $\varphi = 0$, $\varphi = \omega_1$, $\varphi = \omega$ определяют соответственно лучи l_1, l, l_2. Обозначим через T функцию такую, что $T = T_1$, если $x \subset \Omega_1$ и $T = T_2$, если $x \subset \Omega_2$. Структура особенностей такого решения с указанными начальными и граничными условиями (2, 3) при соблюдении условий совместности (4) изучена. Из общей теории параболических уравнений функция T и соответственно ее градиент представляются в форме [2]:

$$T = C(t)\, r^s \Phi(\varphi) + o(r^s)$$

$$\partial T/\partial x_i = C_i(t)\, r^{s-1} \Phi_i(\varphi) + o(r^{s-1}) \tag{5}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $C(t)$ непрерывно дифференцируемая функция, $s > 0$. Второе граничное условие (4) в полярных координатах имеет вид $k_1\,\partial T_1/\partial\varphi = k_2\,\partial T_2/\partial\varphi$.

Как видно из (5) порядок сингулярности равен $s - 1$ и сводится к вычислению s. Нахождение s проводится следующим образом. $\Phi(\varphi)$ имеет вид для первой краевой задачи:

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} C_1 \sin \varphi s & (0 < \varphi < \omega_1) \\ C_2 \sin(\omega - \varphi)\, s & (\omega_1 < \varphi < \omega) \end{cases} \tag{6}$$

для второй краевой задачи:

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} C_1 \cos \varphi s & (0 < \varphi < \omega_1) \\ C_2 \cos(\omega - \varphi)\, s & (\omega_1 < \varphi < \omega) \end{cases} \tag{7}$$

для смешанных краевых условий:

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} C_1 \sin \varphi s & (0 < \varphi < \omega_1) \\ C_2 \cos(\omega - \varphi)\, s & (\omega_1 < \varphi < \omega) \end{cases} \tag{8}$$

где C_1, C_2 — постоянные. Последнее соотношение получено при $T|_{\varphi=0} = 0$ и $\partial T/\partial\varphi|_{\varphi=\omega} = 0$.

Неизвестные C_i, например, для первой краевой задачи определяются из условий совместности (4) следующей системой:

$$C_1 \sin \omega_1 s - C_2 \sin(\omega - \omega_1)\, s = 0 \tag{9}$$

$$k_1 C_1 s \cos \omega_1 s + k_2 C_2 s \cos(\omega - \omega_1)\, s = 0$$

Система (9) однородна. Для существования не тривиального решения C_1, C_2 определитель (9) должен обратиться в ноль

$$\begin{vmatrix} \sin \omega_1 s & -\sin(\omega - \omega_1)\, s \\ k_1 \cos \omega_1 s & k_2 \cos(\omega - \omega_1)\, s \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\tan \omega_1 s + \frac{k_1}{k_2} \tan \omega_2 s = 0 \tag{10}$$

В качестве s необходимо взять наименьший положительный корень уравнения

(10), которое справедливо для всех случаев, кроме одного, когда $\omega_1 = \omega_2$. В последнем случае $s = \pi/\omega$. Не нарушая общности положим $\omega_1 \geq \omega_2$. О качественном поведении s в зависимости от параметров наиболее удобно наблюдать по фиг. 1, где изображены две кривые: $y = \tan \omega_1 s$ (кривая 1) и $y = -k_1 \tan \omega_2 s/k_2$ (кривая 2). Искомое значение s, соответствующее точке пересечения этих кривых, находится на интервале $(\pi/2\omega_1, \pi/2\omega_2)$. Самое малое значение s равняется $1/4$ и достигается в случае, когда область Ω_1 занимает почти всю плоскость, ω_2 мало, $k_1/k_2 \to \infty$. Если $k_1 = k_2$, то $s = \pi/\omega$. Если тело состоит из двух полуплоскостей на границе раздела которого проходит полубесконечная трещина ($\omega_1 = \omega_2 = \pi$), то s равно $1/2$ для любых значений k_1/k_2. Интересно отметить, что особенность в данном случае совпадает с известной особенностью для напряжений в кончике трещины.

Для граничных условий (7) разрешающее уравнение для определения s ничем не отличается от рассмотренного выше.

Для смешанных краевых условий уравнение относительно s будет таким

$$(k_1 - k_2) \cos (\omega_1 - \omega_2) s + (k_1 + k_2) \cos (\omega_1 + \omega_2) s = 0$$

Величина s, здесь, также находится численно и не вызывает затруднений. На фиг. 2 показано расположение корней для двух случаев. При $k_1 > k_2$ (кривая *1*) минимальное значение s, как и прежде равно $1/4$. При $k_1 < k_2$ (кривая *2*) эта величина может как угодно быть близкой к нулю. Кривая *3* соответствует $y = (k_1 + k_2) \cos (\omega_1 + \omega_2) s$, а кривые *1*, *2* — $y = (k_1 - k_2) \cos (\omega_1 + \omega_2) s$.

Если $\omega_1 = \omega_2$, то $\cos \omega s = (k_2 - k_1)/(k_2 + k_1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wen-Hwa Chen, Chin-Cheng Huang.* On the singularity of temperature gradient near an inclined crack terminating at bimaterial interface//Intern. J. Fracture. 1992. V. 58. P. 319—324.

2. *Grisvard P.* Singularities in boundary value problems. Paris. Masson, 1992. 198 p.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1993