

УДК 539.3

© 1995 г. А. О. ВАТУЛЬЯН, Б. В. СОБОЛЬ

**ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ
 РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ
 ДЛЯ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ**

Идеи обобщенного метода интегральных преобразований, развитого в работах Г. Я. Попова [1], используются при построении разрывных решений в рядах Фурье. Это позволяет свести задачу теории упругости для ограниченной области, содержащей разрыв, к решению интегрального уравнения (или системы интегральных уравнений) относительно разрывов определяемых функций. Способ излагается в применении к решению плоской и антиплоской задач теории упругости о равновесии цилиндрической трубы, содержащей в стенке радиальную внутреннюю трещину. Решение интегральных уравнений, полученных упомянутым способом, построено методом механических квадратур с предварительным выделением особенности. Найдены значения коэффициентов интенсивности нормальных и касательных напряжений.

1. Обобщенный метод тригонометрических рядов. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для ограниченной области $|\xi| \leq l$, $l_1 \leq \eta \leq l_2$ в произвольной ортогональной системе координат. Предположим, что компоненты вектора перемещений и их нормальные производные терпят разрыв на некотором отрезке вдоль одной из координатных линий

$$u_i(\xi^* - 0, \eta) - u_i(\xi^* + 0, \eta) = X_i(\eta) \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} \Big|_{(\xi^* - 0, \eta)} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \Big|_{(\xi^* + 0, \eta)} = \Psi_i(\eta) \quad (\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2)$$

причем, две из этих четырех функций предполагаются известными, а две другие — подлежащими определению.

Решение задачи строится в виде ($\lambda_k = k\pi l^{-1}$):

$$u_i(\xi, \eta) = \frac{a_{0i}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}(\eta) \cos \lambda_k \xi + b_{ki}(\eta) \sin \lambda_k \xi \tag{1.2}$$

$$a_{ki} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u_i(\xi, \eta) \cos \lambda_k \xi d\xi, \quad b_{ki} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u_i(\xi, \eta) \sin \lambda_k \xi d\xi$$

При реализации разложений вида (1.2) в уравнениях равновесия (или движения) необходимо предварительно определить вид разложений

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \frac{c_{0i}(\eta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ki}(\eta) \cos \lambda_k \xi + d_{ki}(\eta) \sin \lambda_k \xi \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} = \frac{e_{0i}(\eta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e_{ki}(\eta) \cos \lambda_k \xi + g_{ki}(\eta) \sin \lambda_k \xi$$

Если при определении коэффициентов разложений (1.3) разбить отрезок интегрирования на два $\xi \in [-l, \xi^* - 0) \cup (\xi^* + 0, l]$ и применить формулу интегрирования по частям, то, с учетом введенных обозначений (1.1), не-

посредственные вычисления позволяют выразить коэффициенты разложений (1.3) через a_{ki} , b_{ki} , X_i и Ψ_i ($k = 0, 1, 2, \dots$; $i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} c_{ki}(\eta) &= \lambda_k b_{ki}(\eta) + l^{-1} \cos \lambda_k \xi^* X_i(\eta) + (-1)^k l^{-1} u_i|_{(-l, \eta)}^{(l, \eta)} \\ d_{ki}(\eta) &= -\lambda_k a_{ki}(\eta) + l^{-1} \sin \lambda_k \xi^* X_i(\eta) \\ e_{ki}(\eta) &= \lambda_k d_{ki}(\eta) + l^{-1} \cos \lambda_k \xi^* \Psi_i(\eta) + (-1)^k l^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \Big|_{(-l, \eta)}^{(l, \eta)} \\ g_{ki}(\eta) &= -\lambda_k c_{ki}(\eta) + l^{-1} \sin \lambda_k \xi^* \Psi_i(\eta) \end{aligned} \quad (1.4)$$

В результате система уравнений равновесия (или движения) распадается на бесконечную последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой из гармоник. Очевидно, граничные условия задачи на координатных линиях $\eta = l_1$, $\eta = l_2$ предварительно должны быть представлены в виде соответствующих разложений.

Полученные частные решения краевых задач для каждой из гармоник суммируются в ряды, после чего представляется возможным удовлетворить двум заданным условиям вдоль линий разрыва. Описанный алгоритм позволяет в общем случае свести задачу к системе пары интегральных уравнений второго рода относительно двух функций из (1.1), подлежащих определению.

Очевидно, в случае симметрии задачи относительно координатной линии $\xi = \xi^*$, между двумя неизвестными функциями из (1.1) можно установить простую связь и одну из них исключить из рассмотрения, а каждое из разложений (1.2), (1.3) будет содержать только четные (или нечетные) гармоники.

Заметим, что описанный способ в сочетании со стандартным интегральным преобразованием может быть эффективно использован при построении разрывных решений трехмерных задач теории упругости. В качестве примера подобного сочетания можно назвать работу [2], где вдоль оси, пересекающей разрез, применяется обобщенное интегральное преобразование Фурье, а вдоль оси, где все определяемые функции являются гладкими — стандартное интегральное преобразование Фурье.

2. Плоская деформация в стенке трубы, ослабленной внутренней радиальной трещиной. В качестве примера рассмотрим задачу о плоской деформации упругого кольца $a \leq r \leq b$, содержащего разрез вдоль луча $\varphi = 0$ на интервале $c \leq r \leq d$. На внутренней границе кольца ($r = a$) действует гидростатическое давление интенсивности $\sigma_r = -p$, внешняя граница ($r = b$) свободна от напряжений. Очевидно, при такой нагрузке трещина будет находиться в раскрытом состоянии, и ее берега предполагаются свободными от напряжений.

Решение уравнений равновесия в цилиндрической системе координат, в силу симметрии задачи относительно луча $\varphi = 0$, будем строить в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) \cos k\varphi, \quad v(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(r) \sin k\varphi. \quad (2.1)$$

Здесь $u(r, \varphi)$ и $v(r, \varphi)$ — соответственно, радиальная и тангенциальная составляющие вектора перемещений в полярной системе координат. Коэффициенты разложений (2.1) имеют обычный вид:

$$a_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad b_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi) \sin k\varphi d\varphi$$

Задача сводится к определению функций

$$v|_{(r, +0)}^{(r, -0)} = X(r), \quad \partial u / \partial \varphi|_{(r, -0)}^{(r, +0)} = \Psi(r) \quad (2.2)$$

на интервале $c \leq r \leq d$, $\varphi = 0$. Будем считать, что вне этого интервала функции X и Ψ тождественно обращаются в нуль.

Компонента $\tau_{r\varphi}$ тензора напряжений на берегах трещины обращается в нуль. Этот факт позволяет установить зависимость между скачками (2.2) и исключить функцию Ψ из рассмотрения $\Psi = -r^2 (X/r)'$.

Коэффициенты разложений Фурье функций

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{c_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r) \cos k\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(r) \sin k\varphi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{d_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) \cos k\varphi, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(r) \sin k\varphi$$

в силу рассуждений, проведенных выше, будут иметь вид

$$c_k = X\pi^{-1} + kb_k, \quad e_k = -ka_k \quad (2.3)$$

$$d_k = r^2\pi^{-1} (r^{-1}X)' - k^2a_k, \quad g_k = -k\pi^{-1}X - k^2b_k$$

В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой гармоники разложений (2.1):

$$\begin{cases} a_k'' + \frac{a_k'}{r} - \left(1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k^2\right) \frac{a_k}{r^2} + \frac{k}{2(1-\nu)} \frac{b_k'}{r} - \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \frac{k}{r^2} b_k = f_1(r) \\ b_k'' + \frac{b_k'}{r} - \left(1 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}k^2\right) \frac{b_k}{r^2} - \frac{k}{1-2\nu} \frac{a_k'}{r} - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{k}{r^2} a_k = f_2(r) \end{cases}$$

$$f_1(r) = \frac{1}{\pi r} \left(\frac{X}{r} - \frac{\nu}{1-\nu} X' \right), \quad f_2(r) = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{k}{\pi r^2} X \quad (2.4)$$

где $k=0, 1, 2, \dots$, $b_0=0$, ν — коэффициент Пуассона.

Общее решение системы (2.4) строится методом вариации произвольных постоянных и имеет вид

$$\begin{aligned} a_k(r) = & 1/8 r\pi^{-1} (1-\nu)^{-1} [-(k-2)t_{k-2}(r) + (k+2(1-2\nu))t_k(r) - \\ & -(k-2(1-2\nu))t_k(r) - (k+2)t_{-k-2}(r)] + \\ & + C_{1k}r^{k-1} + C_{2k}r^{1-k} + C_{3k}r^{k+1} + C_{4k}r^{-k-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} b_k(r) = & 1/8 r\pi^{-1} (1-\nu)^{-1} [-(k-2)t_{k-2}(r) + \\ & + (k-4(1-\nu))t_{-k}(r) + (k+4(1-\nu))t_k(r) - \\ & -(k+2)t_{-k-2}(r)] - C_{1k}r^{k-1} + C_{2k} \frac{k-4(1-\nu)}{k+2(1-2\nu)} r^{-k+1} - \\ & - C_{3k} \frac{k+4(1-\nu)}{k-2(1-2\nu)} r^{k+1} + C_{4k}r^{-k-1} \end{aligned}$$

$$t_\alpha(r) = r^\alpha \int_c^r \rho^{-\alpha-2} X(\rho) d\rho$$

Постоянные C_{ik} ($i=1, \dots, 4$) определяются в результате выполнения граничных условий при $r=a$, $r=b$:

$$a_k' + \nu(1-\nu)^{-1} r^{-1} (\pi^{-1}X + kb_k + a_k) = 0$$

$$-ka_k r^{-1} + b_k' - b_k r^{-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

$$\left(a_0 + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{a_0}{r} \right) \Big|_{r=a} = -\frac{2p(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}, \quad \left(a_0 + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{a_0}{r} \right) \Big|_{r=b} = 0$$

Они имеют вид (E — модуль упругости).

$$C_{1k} = \frac{a^{2-k} e_{1k}}{8\pi(1-\nu)}, \quad C_{2k} = \frac{k+2(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} a^k e_{2k} \quad (2.7)$$

$$C_{3k} = \frac{k-2(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)}, \quad C_{4k} = \frac{a^{k+2} e_{4k}}{8\pi(1-\nu)}$$

Здесь введены обозначения

$$e_{1k} = [(k-2)g_{k,-k} s_{k-2} + k^2 d_{-2-k,k} s_{-k} + (k+1)(k+2)d_{k,-k} s_{-k-2} + k^2(k+1)d_{-2-k,-k} s_k] / \Delta_k$$

$$e_{2k} = [(k-2)d_{k,-k-2} s_{k-2} + g_{-k-2,k-2} s_{-k} + (k+1)(k+2)d_{k,k-2} s_{-k-2} + (k+1)d_{-k-2,k-2} s_k] / \Delta_k \quad (2.8)$$

$$e_{3k} = [(k-1)d_{k-2,-k-2} s_{-k} - g_{k-2,-k-2} s_k + (k+2)d_{-k,k-2} s_{-k-2} + (k-1)(k-2)d_{-k-2,-k} s_{k-2}] / \Delta_k$$

$$e_{4k} = [(k-1)(k-2)d_{-k,k} s_{k-2} + k^2(k-1)d_{k,k-2} s_{-k} + k^2 d_{k-2,-k} s_k - (k+2)g_{-k,k} s_{-k-2}] / \Delta_k$$

$$\Delta_k = k^2(1 + \varepsilon^{-2})^2 - (\varepsilon^{k-1} + \varepsilon^{-k-1})$$

$$s_\alpha = b^\alpha \int_c^d \rho^{-\alpha-2} X(\rho) d\rho, \quad d_{\alpha,\beta} = \varepsilon^\alpha - \varepsilon^\beta$$

$$g_{\alpha,\beta} = \varepsilon^\alpha + (k^2 - 1)\varepsilon^\beta - k^2 \varepsilon^{-\alpha-2}, \quad \varepsilon = b/a > 1 \quad (2.9)$$

Заметим, что $\Delta_1 = 0$, т. е. гармоника, соответствующая вращению тела как целого, из решения исключается.

При удовлетворении граничным условиям (2.6) учтено, что, поскольку трещина является внутренней, $\chi(a) = \chi(b) = 0$.

Это, в свою очередь, позволяет просуммировать ряды и удовлетворить условиям отсутствия напряжений на берегах трещины.

В результате получаем интегральное уравнение для определения функции раскрытия берегов трещины $X(r)$, в котором удастся просуммировать сингулярную часть ядра и после ряда очевидных преобразований привести его к следующему безразмерному виду:

$$\int_{-1}^1 \gamma(t) \left[\frac{1}{t-x} + k(t,x) \right] dt = \pi f(x) \quad (|x| \leq 1) \quad (2.10)$$

$$\gamma(t) = X(\rho), \quad f(x) = -2p\theta^{-1}a^2(b^2 + r^2)r^{-2}(b^2 - a^2)^{-1}$$

$$k(t,x) = 1/2(c-d)K(r,\rho)$$

$$r = \frac{1}{2} [x(d - c) + d + c], \quad \rho = \frac{1}{2} [t(d - c) + d + c]$$

$$K(r, \rho) = \frac{\rho^2 (a^2 + r^2) - a^2 (r^2 + b^2)}{\rho r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{1}{2r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k+1} - \right. \\ \left. - (k-2) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-1} \right] + \frac{a}{2r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[- (k-1) \left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} E_{1k} + \right. \\ \left. + (k-1)(k-2) E_{2k} \left(\frac{r}{a}\right)^{-k+1} - (k+1)(k+2) E_{3k} \left(\frac{r}{a}\right)^{k+1} - \right. \\ \left. - (k+1) E_{4k} \left(\frac{r}{a}\right)^{-k-1} \right] \quad (2.11)$$

Выражения для E_{ik} даются соотношениями (2.8), где малые буквы e_{ik} , s_{α} следует соответственно заменять большими E_{ik} , $S_{\alpha} = b^{\alpha} \rho^{-\alpha-1} (\alpha + 1)^{-1}$.

Если в (2.11) осуществить предельный переход при $a \rightarrow 0$ или $b \rightarrow \infty$, то интегральное уравнение (2.10) будет соответствовать задаче о трещине в круговом диске или о трещине в плоскости, ослабленной круговым отверстием [3].

3. Антиплоская деформация. Рассмотрим задачу об антиплоской деформации упругого кольца $a \leq r \leq b$, содержащего разрез вдоль луча $\varphi = 0$ на интервале $c \leq r \leq d$. Берега разреза подвержены действию самоуравновешенной нагрузки

$$\tau_{\varphi z}|_{\varphi=\pm 0} = q \quad (c < r < d) \quad (3.1)$$

Внутренняя ($r = a$) и внешняя ($r = b$) границы кольца свободны от напряжений. Очевидно, в рассматриваемом случае вертикальная компонента вектора перемещений в цилиндрической системе координат терпит разрыв при $\varphi = 0$, $c < r < d$:

$$w|_{\varphi=-0} - w|_{\varphi=+0} = X(r) \quad (3.2)$$

Разрывное решение уравнения равновесия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.3)$$

учитывая нечетность функции $w(z, \varphi)$, будем строить в виде:

$$w(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(r) \sin k\varphi, \quad b_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(r, \varphi) \sin k\varphi d\varphi \quad (3.4)$$

Учитывая (3.4) в (3.3) и используя проведенные выше рассуждения, приходим к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$b_k'' + r^{-1} b_k' - k^2 r^{-2} b_k = \pi^{-1} k r^{-2} X \quad (3.5)$$

Общее решение (3.5) строится методом вариации произвольной постоянной и имеет вид

$$b_k = \frac{1}{2} \pi^{-1} r (t_{k-1}(r) - t_{-k-1}(r)) + C_{1k} r^k + C_{2k} r^{-k} \quad (3.6)$$

Постоянные C_{1k} , C_{2k} определяются из условия отсутствия напряжений на границах $r = a$, $r = b$ ($b_k' = 0$).

Удовлетворяя граничному условию на берегах трещины (3.1), т. е. $\mu r^{-1} \partial w / \partial \varphi = q$, получаем интегральное уравнение, которое после преобразований, описанных выше, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения вида (2.10) относительно функции вертикальных перемещений $X(r)$, где в данном случае, в отличие от предыдущего, приняты следующие обозначения (μ — модуль сдвига):

$$K(r, \rho) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{\rho} \right)^k - \frac{1}{\delta_k} \left(\frac{r^k}{a^k} - \frac{a^k}{r^k} \right) \left(\frac{b^k}{\rho^k} - \frac{\rho^k}{b^k} \right) \right] \quad (3.7)$$

$$f(x) = -2\mu^{-1}q, \quad \delta_k = \varepsilon^k - \varepsilon^{-k}$$

а смысл остальных обозначений сохраняется.

Заметим, что в каждой из рассматриваемых задач регулярные части ядер интегральных уравнений являются гладкими, так как ряды в (2.11), (3.7) сходятся при $c \leq r \leq d$ и $c \leq \rho \leq d$.

Частные случаи рассматриваемой задачи при $a=0$, $b \rightarrow \infty$ получаются из (2.10), (3.7) соответствующими предельными переходами. В этих случаях удастся просуммировать и регулярную часть ядра интегрального уравнения:

$$a=0: K(r, \rho) = \frac{\rho}{b^2 - r\rho}, \quad b \rightarrow \infty: K(r, \rho) = \frac{1}{r} \frac{a^2}{r\rho - a^2}$$

4. Построение численных решений. Решение интегрального уравнения (2.10) в каждом из рассмотренных случаев будем строить методом механических квадратур, изложенным в [3]. Для этого представим искомую функцию в виде

$$\gamma(x) = Q(1-x)^{-1/2} \omega(x) \quad (4.1)$$

(в первой из рассматриваемых задач $Q = p\theta^{-1}$, во второй — $Q = q\mu^{-1}$).

В этом случае соответствующей весу $(1-x^2)^{-1/2}$ ортогональной системой многочленов на отрезке $[-1, 1]$ являются многочлены Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Воспользуемся квадратурной формулой Гаусса для сингулярного интеграла с ядром Коши. Узлами квадратурных формул являются корни многочлена $T_N(x)$:

$$t_j = \cos \frac{2j-1}{2N} \pi \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

Упомянутая квадратурная формула Гаусса справедлива в дискретной системе $x_i = \cos \pi i N^{-1}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), являющихся корнями многочленов Чебышева второго рода $U_{N-1}(x)$.

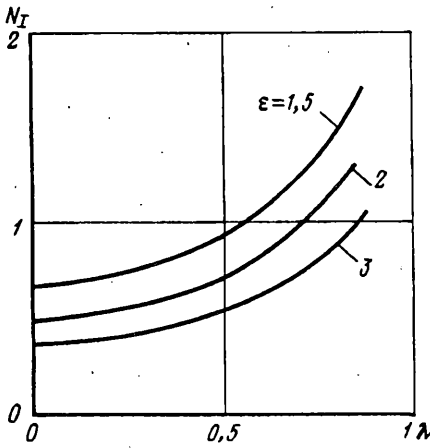
В рассматриваемых здесь задачах решение (4.1) должно удовлетворять очевидному дополнительному условию:

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \quad (X(c) = X(d) = 0)$$

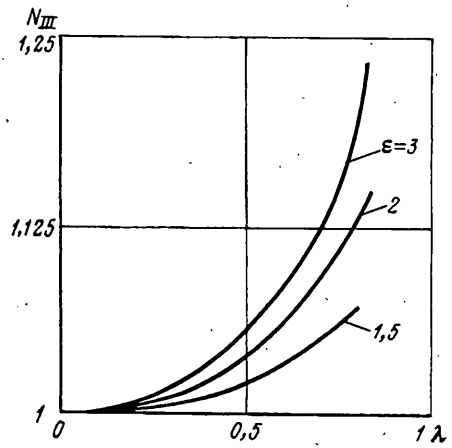
Таким образом, задача сводится к системе N линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $\omega(t_j)$:

$$\sum_{j=1}^N \omega(t_j) [(t_j - x_i)^{-1} + k(t_j, x_i)] = Nf(x_i)$$

$$\sum_{j=1}^N \omega(t_j) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (4.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Используя интерполяционный полином Лагранжа для функции $\omega(t)$ по Чебышевским узлам, получим

$$\omega(1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} \omega(t_j) \operatorname{ctg} \frac{2j-1}{4N} \pi,$$

$$\omega(-1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+N} \omega(t_j) \operatorname{tg} \frac{2j-1}{4N} \pi$$

Это, в свою очередь, позволяет определить коэффициент интенсивности нормальных (K_I — в плоской задаче) или касательных (K_{III} — в антиплоской задаче) напряжений на краях разреза $K^{\pm} = \mp G\omega(\pm 1)$, где G — размерный множитель.

Как показывают непосредственные расчеты, построенные решения достаточно эффективны при $\varepsilon > 1,2$, то есть для случая толстостенной трубы, ослабленной трещиной.

В указанном диапазоне изменения параметра для вычисления регулярной части ядра $k(x, t)$ с точностью не хуже 1% оказывается достаточно удержать 16—20 слагаемых в рядах (2.11), (3.7).

Если же толщина стенки трубы мала по сравнению с ее радиусом, то, очевидно в качестве приближенного следует принять решение задач для слоя, ослабленного поперечной трещиной, при соответствующих граничных условиях (см., например, [4]).

Точность решения задачи методом механических квадратур обеспечивается в пределах 1% при размерности системы уравнений (4.2) $N = 8—10$.

На фиг. 1 и фиг. 2, в качестве иллюстрации, представлены некоторые результаты численного исследования рассмотренных задач. Так, на фиг. 1 построены значения параметра $N_I = K_I/K_{I\infty}$ (для плоской задачи), вычисленного на внутреннем краю трещины ($r = c$) (в наиболее опасной точке). Края трещины предполагаются равноудаленными от граничных поверхностей ($c + d = a + b$), а $K_{I\infty} = \sigma \sqrt{\pi l}$ — значение коэффициента интенсивности напряжений для трещины в неограниченной упругой среде при соответствующих нагрузках. При вычислениях принято $\sigma = (\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon^2 + 1)^{-1} p$, $l = 1/2(d - c)$, $\lambda = l/h$, $2h = b - a$ — толщина стенки трубы.

Параметр $N_{III} = K_{III}/K_{III\infty}$ (антиплоская задача), вычисленный на внешнем краю трещины ($r = d$), для различных значений относительной толщины трубы $\varepsilon = b/a$, изображен на фиг. 2. При этом $K_{III\infty} = q \sqrt{\pi l}$.

Очевидно, в каждой из рассмотренных задач параметр N характеризует влияние геометрических параметров задачи на прочность рассматриваемого тела, ослабленного трещиной.

Отметим, что решение рассмотренной здесь плоской задачи построено в работе [5] методом непрерывного распределения дислокаций. Сопоставление численных результатов подтверждает эффективность развитого в настоящей работе метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
2. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
4. Гольдштейн Р. В., Рысков И. Н., Салганик Р. Л. Центральная поперечная трещина в упругой полосе//Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 97—104.
5. Sekine H., Koizumi R., Tamate O. Stress intensity factors for an embedded crack in a thick walled cylinder subjected to internal pressure//Intern. J. Fracture. 1982. V. 18. No. 2. P. R3—R8.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
20.IV.1993