

УДК 539.3

© 1995 г. С. М. БОРЗЕНКОВ, В. П. МАТВЕЕНКО

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Одним из характерных свойств эллиптических краевых задач является гладкость решения в случае, если исходные данные — граница области и коэффициенты уравнений — гладкие. Нарушение гладкости исходных данных в некоторых точках, называемых особыми, может привести в решениях задач теории упругости к появлению бесконечных напряжений. В этих точках возможно нарушение гладкости поверхности, разрыв или смена типа граничных условий, соединение различных материалов.

Известно, что решение в окрестности особых точек представляется в виде асимптотического ряда и бесконечно дифференцируемой функции [1]. В качестве слагаемых этого ряда выступают собственные решения соответствующих краевых задач для клиновидных областей типа клина, конуса, многогранного угла. Сингулярность напряжений в особых точках двумерных тел может быть исследована на основе подхода, изложенного в работе [2]. Задача определения напряженно-деформируемого состояния в окрестности особой линии пространственного тела сводится к решению двух двумерных задач [3]. Первая задача — определение плоско-деформированного состояния соответствующей краевой задачи для клиновидной области в плоскости, нормальной к этой линии. Вторая — задача о сдвиге, часто называемая задачей об антиплоской деформации. Новый метод построения собственных функций для конических точек границы рассмотрен в [4].

При анализе напряженно-деформированного состояния тел с особыми точками различными численными методами, в том числе и методом конечных элементов, возникают определенные трудности, связанные с оценкой точности и сходимости решения в окрестности этих особых точек.

В большинстве существующих программ, реализующих метод конечных элементов, эту проблему решают путем существенного сгущения сетки элементов. Повышение точности определения напряжений возможно и за счет увеличения степени аппроксимирующих полиномов. В рамках обычной техники метода конечных элементов возможны и более сложные приемы анализа вблизи особых точек. Использование адаптивного процесса оптимизации конечно-элементной модели [5] обычно позволяет добиться требуемой точности вычислений.

Увеличение степени дискретизации или повышение степени аппроксимирующих полиномов в окрестности особых точек приводит к резкому увеличению времени вычислений и дополнительным проблемам при оценке сходимости решения. Несмотря на это, описанные способы решения не требуют, как правило, больших программных изменений и поэтому наиболее привлекательны для исследователей.

Альтернативный вариант исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек — использование сингулярных элементов. По принципам построения их можно разделить на две группы. К первой относятся элементы, использующие для описания особенности фундаментальные аналитические решения, полученные различными методами теории упругости. Вторая группа элементов описывает особенность в решении при помощи определенной трансформации функций форм или сдвига промежуточного узла. Поэтому иногда их называют деформированными сингулярными элементами.

К несомненным достоинствам элементов, относящихся к первой группе, следует отнести возможность удержания необходимого числа членов в асимптотическом представлении решения и возможность получения решения в случае комплексного показателя сингулярности.

Для описания особенности в напряжениях вида $O(r^{-1/2})$, которая возникает вблизи вершины трещины в изотропном материале, могут быть использованы элементы, предложенные в [6—8].

Непосредственно для расчетов коэффициентов интенсивности напряжений предназначены элементы, описанные в [9—12]. Для описания комплексной особенности вида $O(r^{\alpha-1})$, где $\alpha = a + ib$, могут использоваться элементы, представленные в работах [13—15]. Ряд работ [16, 17] посвящен моделированию особенности вида $O(r^{a-1/2})$, которая характерна для окрестности вершины трещины, находящейся на границе раздела двух материалов.

К характерным недостаткам сингулярных элементов, использующих фундаментальные решения, относится несовместность по перемещениям вдоль границы с обычными элементами. Добиться совместности удастся лишь в узлах. Поэтому иногда между сингулярными и обычными элементами вводят слой переходных элементов. Это сделано, например, в [10, 11, 15]. Кроме того, при смене типа граничных условий в окрестности особой точки, учета возможной анизотропии материала необходимо менять и аналитические зависимости, лежащие в основе аппроксимирующих соотношений. Их получение может оказаться трудоемкой и громоздкой процедурой.

Сингулярные деформированные элементы строятся на основании того, что путем сдвига промежуточных узлов на сторонах обычных элементов высокого порядка можно добиться нужного распределения перемещений. К их достоинствам следует отнести то, что они совместны по перемещениям с обычными элементами и легко включаются в существующие конечно-элементные программы.

В [18—21], путем сдвига промежуточного узла на четверть длины ребра к узловой точке в вершине трещины, моделируется особенность вида $O(r^{-1/2})$. Для описания особенности $O(r^{\alpha-1})$ в [22—24] предложена оригинальная методика построения особых функций форм треугольного элемента. Для трещины, пересекающей границу раздела двух материалов, могут быть использованы элементы, описанные в [25, 26].

В качестве недостатков деформированных сингулярных элементов нужно отметить невозможность описания особенности решения в случае комплексного показателя сингулярности. Кроме того, размер этих элементов достаточно жестко ограничен окрестностью особой точки, в которой подавляющее значение имеет первый член асимптотического ряда, определяющего вид решения.

В публикуемой работе для моделирования напряженно-деформированного состояния предлагается семейство полуаналитических сингулярных элементов. Они используют информацию о форме аналитического решения в окрестности особых точек, позволяя удерживать любое число соответствующих собственных решений. Эти элементы совместны по перемещениям с обычными элементами и могут быть использованы для любых типов особых точек и линий, содержащихся в плоских и пространственных телах.

1. Построение полуаналитических сингулярных элементов. Для построения сингулярных элементов используется структура аналитических решений в окрестности особых точек в виде линейной комбинации собственных решений в соответствующих задачах для клиновидных областей:

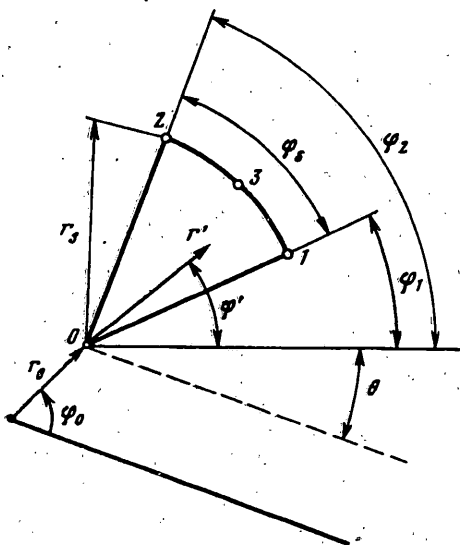
$$u = \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} C_n f_n(r, \alpha_n) \psi_n \quad (1.1)$$

$$f_n(r, \alpha_n) = r^{\alpha_n} [\cos(b_n \ln r) + i \sin(b_n \ln r)]$$

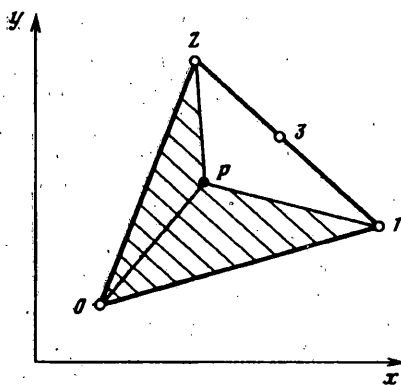
где $f_n(r, \alpha_n)$ — структура, данная, например, в [27]; $\alpha_n = a_n + ib_n$ — собственные значения; $\psi_n = \psi_n(\varphi, \alpha_n)$ — для двумерных задач; $\psi_n = \psi_n(\varphi, \theta, \alpha_n)$ — для трёхмерных задач; (r, φ) , (r, φ, θ) — полярные или сферические координаты с центром в особой точке; C_n — некоторые константы; N_{α} — число удерживаемых собственных решений.

1.1. Сингулярный элемент в полярной системе координат. Собственные решения с явным выделением характера особенности в окрестности особых точек строятся обычно в полярной системе координат. Поэтому наиболее естественным и простым для численной реализации оказывается построение сингулярного элемента в полярной системе координат.

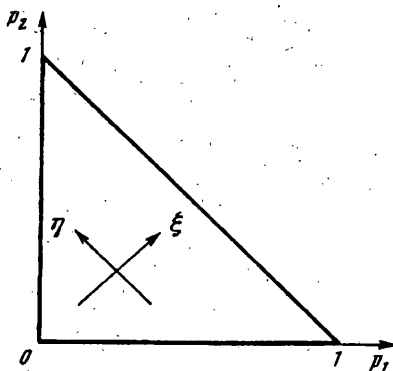
Введем в рассмотрение вспомогательную (фиг. 1) полярную систему координат



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

(r', φ') , полюс которой совпадает с особой точкой, а ее связь с основной системой координат выглядит следующим образом:

$$r \cos \varphi = r_0 \cos \varphi_0 + r' \cos (\varphi' + \theta) \quad (1.2)$$

$$r \sin \varphi = r_0 \sin \varphi_0 + r' \sin (\varphi' + \theta)$$

Для использования приемов численного интегрирования удобным является построение сингулярного элемента в локальных координатах (ξ, η) . Локальная система координат (ξ, η) имеет с полярной системой (r', φ') следующую связь:

$$\xi = (r' - r_s/2)/r_s + 1/2, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq r' \leq r_s \quad (1.3)$$

$$\eta = 2 (\varphi' - (\varphi_1 + \varphi_2)/2) / \varphi_s,$$

$$-1 \leq \eta \leq 1, \quad \varphi_1 \leq \varphi' \leq \varphi_2, \quad \varphi_s = |\varphi_2 - \varphi_1|$$

где $r_s, (r_1, \varphi_1), (r_2, \varphi_2)$ — радиус сингулярного элемента в системе (r', φ') и координаты его узлов.

Аппроксимация перемещений в элементе принимается в виде

$$u_k = \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{N_\alpha} \xi^{a_n} \{ \cos(b_n \ln \xi) l_{kjn} + \sin(b_n \ln \xi) g_{kjn} \} N_j \quad (k = r, \varphi) \quad (1.4)$$

Здесь J — число узлов в элементе, N_j — функции формы соответствующего порядка, величины l_{kjn} , g_{kjn} — переменные, подлежащие определению при конечно-элементной реализации соответствующей задачи теории упругости. В качестве функций форм N используются обычные функции формы одномерного элемента, которые, например, для линейной аппроксимации ($J = 2$) имеют вид

$$N_1 = -(\eta - 1)/2, \quad N_2 = (\eta + 1)/2. \quad (1.5)$$

1.2. Сингулярный элемент в декартовой системе координат и для тел вращения. Рассмотрим треугольный элемент в декартовой системе координат (фиг. 2). Будем считать, что особая точка совпадает с нулевым узлом. Для построения специальных базисных функций h обратимся к известному [28] изображению элемента в p -координатах (фиг. 3):

$$p_i = 1/2 (a_i + b_i x + c_i y) / S_{012} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (1.6)$$

Новые координаты h (h_1, h_2) связаны с p -координатами следующим образом

$$h_1 = p_1 / (p_1 + p_2), \quad h_2 = p_2 / (p_1 + p_2). \quad (1.7)$$

Подобно базисным функциям обычного элемента они имеют ясный геометрический смысл. Для h_1 это отношение площади треугольника S_{p20} к площади четырехугольника S_{1p20} (фиг. 2):

$$h_1 = S_{p20} / S_{1p20}, \quad h_2 = S_{p10} / S_{1p20} \quad (1.8)$$

В декартовых координатах они записываются следующим образом:

$$h_i = 1/2 (a_i + b_i x + c_i y) / S_{1p20} \quad (i = 1, 2) \quad (1.9)$$

$$a_1 = x_2 y_0 - x_0 y_2, \quad b_1 = y_2 - y_0, \quad c_1 = x_0 - x_2$$

$$a_2 = x_0 y_1 - x_1 y_0, \quad b_2 = y_0 - y_1, \quad c_2 = x_1 - x_0$$

Из анализа h -координат видно, что на стороне элемента (1-2) они совпадают с p -координатами обычного элемента. Тем самым обеспечивается согласованность по перемещениям с обычным элементом. На основе h -координат могут быть построены функции формы сингулярного элемента. Для аппроксимационного полинома первой и второй степеней они соответственно имеют вид

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2 \quad (1.10)$$

$$H_1 = (2h_1 - 1) h_1, \quad H_2 = (2h_2 - 1) h_2, \quad H_3 = 4h_1 h_2$$

Аппроксимация перемещений в сингулярном элементе с учетом структуры собственных решений и построенных функций форм H принимается следующим образом:

$$u_k = \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{N_\alpha} r^{a_n} \{ \cos(b_n \ln r) l_{kjn} + \sin(b_n \ln r) g_{kjn} \} H_j \quad (k = x, y) \quad (1.11)$$

Здесь $r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$ — расстояние до особой точки.

Для использования приемов численного интегрирования матрицы жесткости элемента введем локальные координаты (ξ, η) (фиг. 3). Они связаны с p -координатами соотношениями:

$$p_1 = (1 - \eta) \xi / 2, \quad p_2 = (1 + \eta) \xi / 2, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (1.12)$$

На границе G_s между сингулярным и обычным (символ e) элементом должно выполняться условие равенства перемещений

$$u_k|_{x \in G_s} = u_k|_{x \in G_s} \quad (k = x, y) \quad (1.13)$$

Тогда с учетом выражений (1.10)—(1.13) аппроксимацию перемещений в сингулярном элементе предлагается записывать в виде

$$u_k = \sum_{j=1}^J \left\{ \xi^{a_1} [\cos(b_1 \ln \xi) u_{kj}^e - \sin(b_1 \ln \xi) g_{kj}] + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{N_\alpha} \xi^{a_n} [(\cos(b_n \ln \xi) - \xi^{a_1 - a_n} \cos(b_1 \ln \xi)) l_{kjn} - \right. \\ \left. - \sin(b_n \ln \xi) g_{kjn}] \right\} H_j \quad (k = x, y; j = 1, J) \quad (1.14)$$

Предложенная формулировка плоского сингулярного элемента в декартовой системе координат естественным образом распространяется на кольцевые сингулярные элементы для тел вращения в цилиндрических координатах (r, z, φ) .

Разрешающие соотношения для сингулярного элемента строятся по обычной схеме метода конечных элементов [28]. При численном интегрировании интеграл по площади S_{012} сингулярного элемента преобразуется в интеграл по координатам (β, η) :

$$\int_{S_{012}} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\beta, \eta) \det [J_{p_1 p_2}] \det [J_{\xi \eta}] \det [J_{\beta \eta}] d\beta d\eta \quad (1.15)$$

где $\beta = 2\xi - 1$, а $[J_{p_1 p_2}]$, $[J_{\xi \eta}]$, $[J_{\beta \eta}]$ — якобианы преобразования последовательно в системы координат (p_1, p_2) , (ξ, η) , (β, η) .

1.3. Сингулярные элементы для особой точки пространственного тела. В пространственных задачах сингулярность напряжений может иметь место в особых точках, окрестность которых представляет собой многогранный угол. При численной реализации таких задач многогранный угол предлагается заменять набором пространственных пирамидальных сингулярных элементов.

Для построения пространственного сингулярного элемента лагранжева семейства в форме трехгранной пирамиды (фиг. 4) введем трехмерные h -координаты:

$$h_1 = p_1 / (p_1 + p_2 + p_3), \quad h_2 = p_2 / (p_1 + p_2 + p_3), \quad h_3 = p_3 / (p_1 + p_2 + p_3) \quad (1.16)$$

$$p_i = \sqrt[6]{(a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / V_{1230}} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (1.17)$$

Здесь p -координаты определяются из [28], a_i, b_i, c_i, d_i — величины, зависящие от координаты вершин элемента, V_{1230} — объем тетраэдра $(0, 1, 2, 3)$. Геометрически h -координаты представляют собой отношение объемов

$$h_1 = V_{p023} / V^*, \quad h_2 = V_{p013} / V^*, \quad h_3 = V_{p012} / V^* \quad (1.18)$$

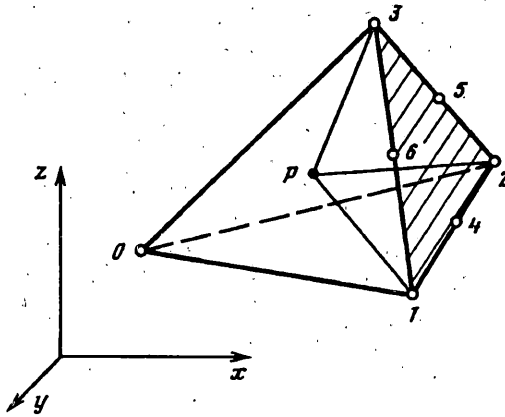
$$V^* = V_{1230} - V_{p123}$$

В декартовых координатах h -функции записываются в виде

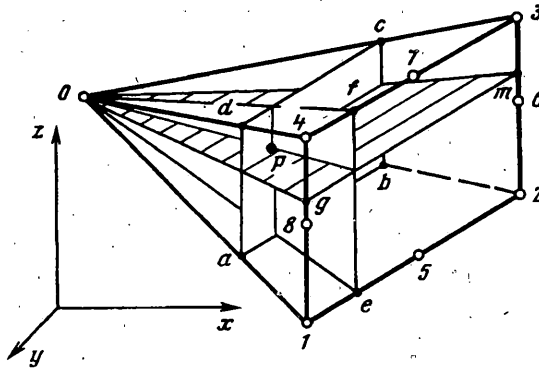
$$h_i = \sqrt[6]{(a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / V^*} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.19)$$

Функции формы для аппроксимационного полинома первой степени совпадают с базисными функциями

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad H_3 = h_3 \quad (1.20)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

а для полинома второй степени определяются соотношениями

$$H_1 = (2h_1 - 1) h_1, H_2 = (2h_2 - 1) h_2, H_3 = (2h_3 - 1) h_3 \quad (1.21)$$

$$H_4 = 4h_1 h_2, H_5 = 4h_2 h_3, H_6 = 4h_3 h_1$$

Аппроксимация перемещений, следуя выражению (1.11), принимается в виде

$$u_k = \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{N_\alpha} r^{a_n} \{ \cos(b_n \ln r) l_{kjn} + \sin(b_n \ln r) g_{kjn} \} H_j \quad (k = x, y, z) \quad (1.22)$$

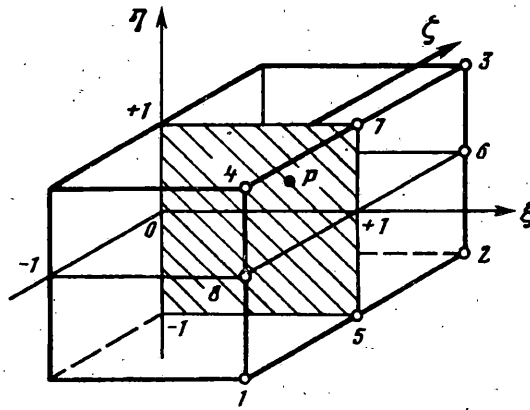
Построение сингулярного элемента *серендинова* семейства в форме четырехгранной пирамиды (фиг. 5) будем производить в локальной системе координат (ξ, η, ζ) (фиг. 6):

$$\xi = p_{(1,2)} + p_{(4,3)} = p_{(1,4)} + p_{(2,3)}, \quad (0 \leq \xi \leq 1$$

$$\eta = h_{(4,3)} - h_{(1,2)}, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (1.23)$$

$$\zeta = h_{(3,2)} - h_{(1,4)}, \quad -1 \leq \zeta \leq 1$$

Здесь координаты, например, $p_{(1,2)}$, $p_{(4,3)}$, $h_{(4,3)}$, $h_{(1,2)}$ вычисляются для точки P по треугольнику $(0, f, e)$, образованного сечением пирамиды плоскостью, проходящей через особую точку (0) , точку P и отрезок (f, e) . Координата ξ —



Фиг. 6

отображение расстояния от особой точки до плоскости (a, b, c, d) , проходящей через точку P параллельно основанию пирамиды $(1, 2, 3, 4)$.

Функции формы линейного элемента имеют вид

$$H_i = 1/4 (1 + (h_{(3,2)} - h_{(1,4)}) \zeta_i) (1 + \eta_i (h_{(4,3)} - h_{(1,2)})) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.24)$$

Для квадратичного элемента получим:

угловой узел

$$H_i = 1/4 (1 + (h_{(3,2)} - h_{(1,4)}) \zeta_i) (1 + \eta_i (h_{(4,3)} - h_{(1,2)})) \times \\ \times ((h_{(3,1)} - h_{(1,4)}) \zeta_i + (h_{(4,3)} - h_{(1,2)}) \eta_i - 1) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.25)$$

узлы в середине стороны

$$\zeta = 0: H_i = 1/2 (1 - (h_{(3,2)} - h_{(1,4)})^2) (1 + \eta_i (h_{(4,3)} - h_{(1,2)})) \quad (i = 5, 7) \quad (1.26)$$

$$\eta = 0: H_i = 1/2 (1 + (h_{(3,2)} - h_{(1,4)}) \zeta_i) (1 - (h_{(4,3)} - h_{(1,2)})^2) \quad (i = 6, 8) \quad (1.27)$$

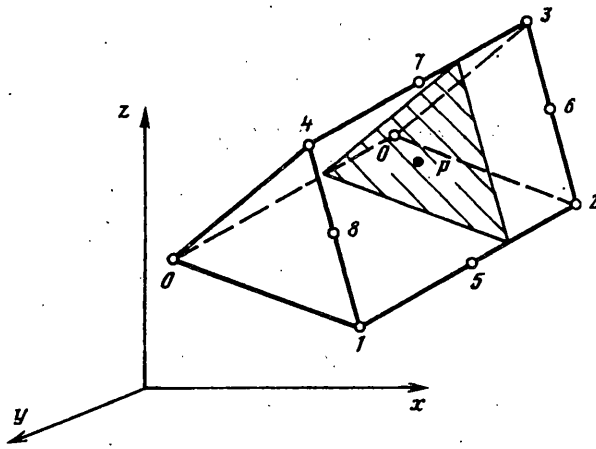
Аппроксимация перемещений принимается в виде

$$u_k = \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{N_\alpha} \xi_i^{a_n} \{ \cos(b_n \ln \xi) l_{kjn} + \sin(b_n \ln \xi) g_{kjn} \} H_j \quad (k = x, y, z) \quad (1.28)$$

1.4. Сингулярный элемент для особой линии пространственного тела. Для численного анализа напряженно-деформированного состояния в окрестности особой линии пространственного тела предлагается полуаналитический сингулярный элемент *серендинова* семейства в форме трехгранной призмы (фиг. 7). Пусть особая линия совпадает с ребром $(0, 0)$ элемента. В плоскости, перпендикулярной особой линии, должно обеспечиваться постоянство узловых неизвестных вдоль луча, исходящего из точки пересечения этой плоскости с особой линией. Построение элемента будем производить в локальной системе координат (ξ, η, ζ) . Введем соотношения

$$\eta = h_{(4,3)} - h_{(1,2)}, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \\ \xi = p_{(4,3)} + p_{(1,2)}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.29)$$

Здесь индексы, например $(4,3)$, обозначают p - или h -координаты рассматриваемой точки P для узла треугольника, расположенного на ребре $(4,3)$, образованного в



Фиг. 7

результате сечения трехгранной призмы плоскостью, перпендикулярной особой линии и проходящей через точку P (фиг 7).

Функции формы для линейного элемента

$$N_i = 1/4 (1 + \zeta \zeta_i) (1 + \eta_i (h_{(4,3)} - h_{(1,2)})) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.30)$$

Для квадратичного элемента будем иметь:

угловой узел

$$N_i = 1/4 (1 + \zeta \zeta_i) (1 + \eta_i (h_{(4,3)} - h_{(1,2)})) (\zeta \zeta_i + \eta_i (h_{(4,3)} - h_{(1,2)})) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.31)$$

узлы в середине стороны

$$\zeta = 0: N_i = 1/2 (1 - \zeta^2) (1 + \eta_i (h_{(4,3)} - h_{(1,2)})) \quad (i = 5, 7) \quad (1.32)$$

$$\eta = 0: N_i = 1/2 (1 + \zeta \zeta_i) (1 - (h_{(4,3)} - h_{(1,2)})^2) \quad (i = 6, 8) \quad (1.33)$$

Аппроксимация выражений в локальной системе координат совпадает с выражением (1.28).

2. Исследование вопросов сходимости конечно-элементного решения. Конечно-элементная процедура обеспечивает сходимость вычислительного процесса, если аппроксимирующие функции перемещений в элементе удовлетворяют определенным требованиям. Эти требования изложены, например, в [28] и сводятся к следующему: функции, аппроксимирующие искомые переменные в элементе, должны обладать определенной гладкостью внутри элемента, а также при переходе через границы, разделяющие элементы; выбранные аппроксимирующие функции должны давать нулевую энергию деформации при трансляции тела как твердого целого; выбираемые функции должны включать представление постоянных величин для соответствующих напряжений и деформаций.

Кроме вышеперечисленных, функции, аппроксимирующие перемещения в сингулярном элементе, должны обеспечивать выполнение ряда специальных требований, которые можно сформулировать следующим образом: сингулярный элемент не должен обладать кинематическими подвижностями (движениями с нулевой энергией, отличающимися от движения тела как жесткого целого); энергия деформации сингулярного элемента должна быть ограничена; функции перемещений должны позволять удерживать произвольное число собственных функций как с действительными, так и с комплексными собственными значениями α .

Проанализируем конечно-элементную формулировку сингулярного элемента на

предмет удовлетворения изложенным выше требованиям. *Первое требование.* Функция перемещений сингулярного элемента обеспечивает ненулевую первую производную и непрерывность перемещений вдоль межэлементных границ за исключением особой точки, в которой функции формы не определены. Исследуем тип особенности функций форм в особой точке. Для этого введем локальную систему координат (x_1', x_2') с центром в особой точке

$$x_1' = x - x_0, \quad x_2' = y - y_0 \quad (2.1)$$

Зададим единичный вектор $L = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ ($|L| = 1$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$). Рассмотрим прямую

$$x' = rL \quad (x_1' = r \cos \varphi, \quad x_2' = r \sin \varphi) \quad (2.2)$$

проходящую через начало координат по направлению вектора L . Найдем предел функций форм $H_j(x')$ линейного лагранжева сингулярного элемента при $x' \rightarrow 0$ по направлению единичного вектора, раскрыв получаемую неопределенность

$$\lim_{r \rightarrow 0} H_j(rL) = \lim_{r \rightarrow 0} H_j(x_1', x_2') = \frac{b_j' + c_j' \operatorname{tg} \varphi}{(b_1' + c_1' \operatorname{tg} \varphi) + (b_2' + c_2' \operatorname{tg} \varphi)} \quad (j = 1, 2) \quad (2.3)$$

Таким образом, особая точка является точкой устранимого разрыва функции H_j по направлению единичного вектора. Для того, чтобы превратить H_j в непрерывные функции по направлению, достаточно ввести дополнительное условие в особой точке при фиксированном φ :

$$H_j(x_0, y_0) = H_j(t + rL), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad t = \{x_0, y_0\} \quad (j = 1, 2) \quad (2.4)$$

Второе требование. Реализация такого вида движения тела означает, что все узловые переменные равны одной и той же величине:

$$u_k = \sum_{j=1}^J u_{kj} H_j = u_k \sum_{j=1}^J H_j \quad (k = 1, 2) \quad (2.5)$$

Деформации элемента будут нулевыми, так как выполняется условие

$$\sum_{j=1}^J \frac{\partial H_j}{\partial x} = \sum_{j=1}^J \frac{\partial H_j}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

Следовательно, при трансляции тела как жесткого целого энергия деформации сингулярного элемента равна нулю.

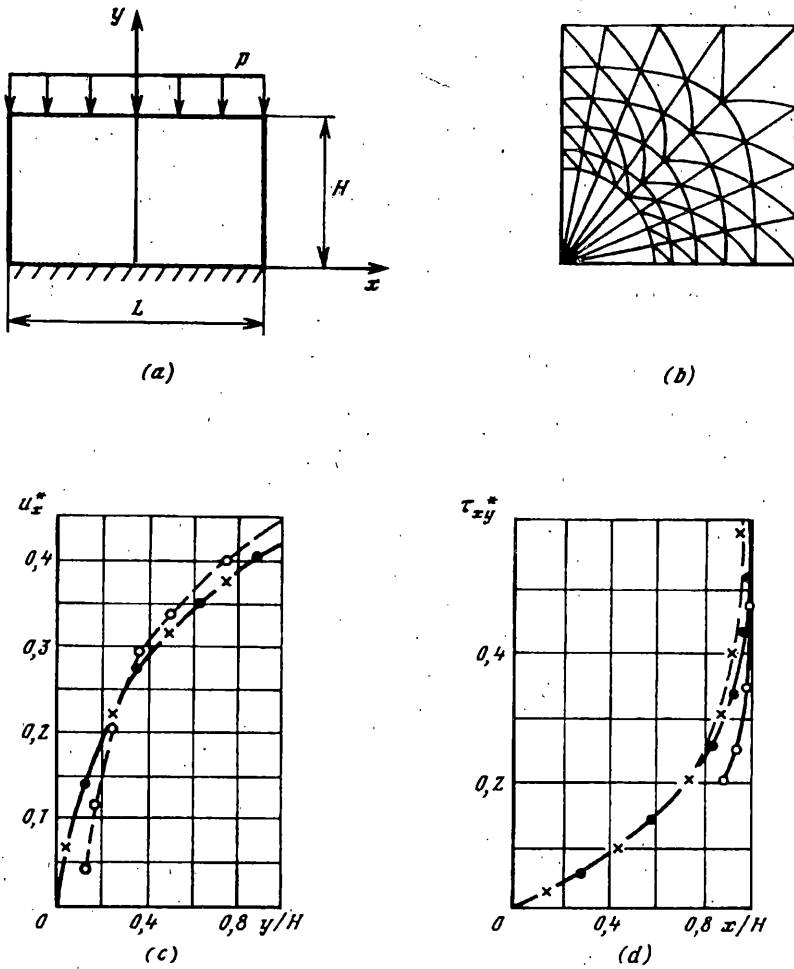
Третье требование. Это требование обеспечивается включением в аппроксимацию перемещений членов, соответствующих показателю сингулярности $\alpha = 1$.

Четвертое требование. При проверке этого положения обычно проводят исследование собственных значений матрицы жесткости элемента. Число нулевых собственных значений должно равняться числу движений элемента как жесткого целого. Избыточное число нулевых собственных значений говорит о некорректности выбора аппроксимирующих функций. Проведенные исследования на собственные значения матриц жесткости при различных геометрических размерах, числе удержанных членов по α в аппроксимации перемещений, численных значениях показателя сингулярности показали, что избыточное число движений с нулевой энергией отсутствует.

Пятое требование. Ограниченность энергии деформации доказывается с помощью теорем, представленных в [29].

Шестое требование. Удовлетворяется автоматически, так как функция перемещений содержит возможность удержания требуемого числа собственных функций.

Таким образом, выбранные функции перемещений удовлетворяют всем шести требованиям и обеспечивают сходимость конечно-элементной процедуры.



Фиг. 8

3. Решение некоторых задач теории упругости с помощью полуаналитического сингулярного элемента. Для проверки эффективности предлагаемой формулировки сингулярного элемента на ряде задач было проведено сравнение с имеющимися в литературе результатами.

Задача 1. Рассматривается плоско-деформированное состояние плиты (фиг. 8, а) нижняя грань которой неподвижна, а по верхней действует равномерное давление P . Коэффициент Пуассона материала плиты $\nu = 0,3$, отношение длины к высоте $L/H = 0,5$. Ввиду симметрии относительно оси Y рассматривается половина расчетной области с началом координат в особой точке. На фиг. 8, б приведена дискретизация конечными элементами левой половины области. В [30] поставленная задача решена с использованием сингулярных элементов Акина (косые кресты) и Бензлея (светлые точки), а также обычным методом с использованием билинейных изопараметрических прямоугольных элементов (сплошная кривая). На фиг. 8, с, d показаны эти результаты в сравнении с данными, полученными с помощью предлагаемого сингулярного элемента (темные точки). Введены обозначения: $u_i^* = u_i/(PL/E)$, $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}/P$. При этом число сингулярных элементов $M_s = 8$, $N_\alpha = 2$, отношение размера сингулярного элемента r_s к высоте H плиты $r_s/H = 0,4$. Значения параметров α в данном случае

$\alpha_1 = 0,7111729$, $\alpha_2 = 1,7150932 + i0,5405360$. Распределение u_x^* дано по свободной боковой грани, τ_{xy}^* — по заделке.

Задача 2. Рассматривается плоско-деформированное состояние пластины высотой L с центральной трещиной, растягиваемой равномерными усилиями p . Требуется определить коэффициент интенсивности напряжений K при различных соотношениях длины трещины a и ширины пластины b . В расчетах принималось $L/b = 2,125$, $\nu = 0,3$, $r_s/b = 0,125$, $M_s = 8$, $N_\alpha = 3$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0,5$, $\alpha_3 = 1,0$. Результаты вычислений в сравнении с данными [13] приведены в таблице для константы C_m , которая связана с коэффициентом интенсивности следующим образом $K = C_m p b (\pi b/2)^{1/2}/(b-a)$. Первые три столбца (A, B, C) относятся к численным решениям, последующие четыре (D, E, F, G) — к аналитическим. Столбец A соответствует решению, полученному с помощью полуаналитического сингулярного элемента, столбцы B, C, D, E, F, G — решениям, полученным Рао, Ватвудом, Фреддерсоном, Диксоном, Гриншпаном и Исидой.

a/b	A	B	C	D	E	F	G
0,25	0,388	0,388	0,398	0,390	0,387	0,388	0,392
0,30	0,408	0,404	0,405	0,400	0,402	0,404	0,410
0,40	0,424	0,431	—	0,432	0,414	0,420	0,430

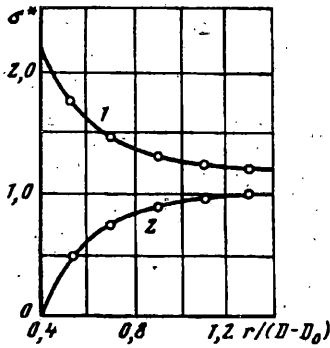
Задача 3. Определить коэффициент интенсивности напряжений K для вершины квадратного отверстия в пластине высотой H и шириной L в случае приложения гидростатического давления P по контуру отверстия. Отверстие находится в центре пластины и расположено так, что его диагонали размера b совпадают с координатными осями, которые параллельны сторонам пластины. Рассматривается плоско-деформированное состояние. Расчетные данные: $\nu = 0,3$, $H/b = 8$, $H/L = 1$, $M_s = 9$, $N_\alpha = 4$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0,5444837$, $\alpha_4 = 0,9085292$. Ниже приведены результаты расчета в зависимости от размера сингулярного элемента.

r_s/b	0,030	0,010	0,005	0,003
K	0,592	0,625	0,641	0,649

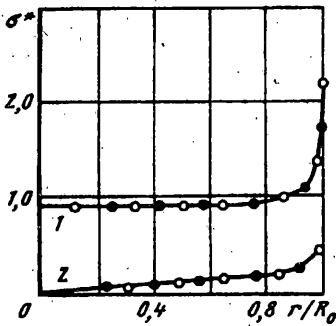
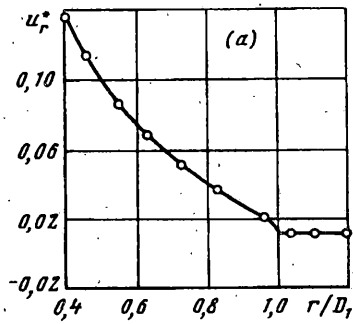
Аналитически значение коэффициента интенсивности получено в [31] и равняется $K = 0,648$.

Задача 4. Рассчитывается напряженно-деформированное состояние полого цилиндра, нагруженного равномерным давлением P по внешней цилиндрической поверхности. Торцы цилиндра свободны от напряжений. Размеры цилиндра определяются высотой H , внутренним и наружным диаметрами D_0 и D . Расчетные данные: $\nu = 0,3$, $H/D = 1,43$, $H/(D - D_0) = 2$, $r_s/(D - D_0) = 0,4$, $M_s = 8$, $N_\alpha = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. На этой задаче продемонстрирована возможность учета ненулевых граничных условий в напряжениях по стороне сингулярного элемента (светлые точки). В качестве тестового использовалось решение, полученное обычным методом конечного элемента на сетке, имеющей существенное сгущение к особой точке (сплошная кривая). Результаты представлены на фиг. 9. Кривая 1 соответствует $\sigma^* = \sigma_\varphi/P$, кривая 2 — $\sigma^* = \sigma_r/P$. Распределение компонент тензора напряжений дано по торцевой поверхности.

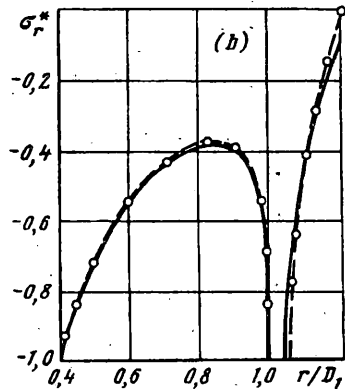
Задача 5. Рассматривается напряженное состояние сплошного цилиндра диаметром $D = 2R_0$ и высотой L , по торцам которого заданы перемещения $u_z = W_0$. Расчетные данные: $\nu = 0,25$, $L/D = 2,5$, $N_\alpha = 3$, $r_s/D = 0,1$, $M_s = 8$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0,7447497$, $\alpha_3 = 1,7183593 + i0,4744975$. На фиг. 10 показано



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

распределение напряжений по торцевой поверхности в сравнении с данными, приведенными в [32]. Кривая 1 соответствует $\sigma^* = \sigma_z/\sigma_0$, кривая 2 — $\sigma^* = \tau_z/\sigma_0$, $\sigma_0 = W_0 E/L$. Сплошной кривой показано аналитическое решение Бен-тема и Миндерхоунда, светлыми точками — метод Сведлоу, темными точками — предлагаемый сингулярный элемент.

Задача 6. Рассчитывается напряженно-деформированное состояние двухслойного полого цилиндра высотой H , нагруженного равномерным давлением P по внутренней поверхности. В качестве особой точки рассматривается точка выхода на торцевую поверхность границы соединения материалов внутреннего (модуль упругости E_1 и коэффициент Пуассона ν_1) и внешнего (E_2 , ν_2) слоев составного цилиндра. Расчеты выполнены для двухслойного цилиндра $\nu_1 = 0,4$, $\nu_2 = 0,3$, $r_s/D_1 = 0,05$, $M_s = 10$, $N_a = 4$, $\gamma = 180^\circ$, $E_2/E_1 = 92,857$, $H/D_1 = 0,6$, $D_0/D_1 = 0,4$, $D/D_1 = 1,2$, $\alpha_1 = 0,0$, $\alpha_2 = 0,6625077$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1,7036768 + i0,6627562$ (D_0 , D_1 , D — внутренний диаметр, диаметр границы соединения слоев, внешний диаметр). На фиг. 11 приведены результаты расчета (светлые точки) по торцевой поверхности в сравнении с данными, полученными с помощью обычного метода конечных элементов (сплошная кривая). Введены обозначения: $\sigma_r^* = \sigma_r/P$, $u_r^* = u_r G_i/(P D_1)$, где G_i — модуль сдвига i -го материала.

Приведенная подборка задач теории упругости иллюстрирует возможности предлагаемого полуаналитического сингулярного элемента при численном анализе задач с различными типами особых точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками//Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
2. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension//J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526—528.
3. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра//ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 178—186.
4. Перлин П. И. Об асимптотиках решений краевых задач теории потенциала и теории упругости в окрестности конических точек границы//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 835—839.
5. Gago J. P., De S. R., Kelly D. W., Zienkiewicz O. C. A posteriori error analysis and adaptive process in the finite element method. Part 2. Adaptive mesh refinement//Int. J. Num. Meth. Eng. 1983. V. 19. № 11. P. 1621—1656.
6. Biskov E. The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements//Int. J. Fract. 1984. V. 26. № 4. P. 329—337.
7. Bradford L. G., Dong S. B., Nicol D. A. C., Westmann R. A. A central crack element in fracture mechanics//Int. J. Fract. 1984. V. 24. № 3. P. 197—207.
8. Ogen G., Schiff B. Stress intensity factors for two — dimensional crack problems using constrained finite elements//Int. J. Fract. 1985. V. 28. № 2. P. 55—68.
9. Платонов А. Д., Кравец П. Я. Специальный конечный элемент для расчета коэффициентов интенсивности в плоских телах с трещинами//Препр. Киев: Ин-т пробл. прочн. 1983. 32 с.
10. Astiz M. A. An incompatible singular elastic element for two- and three-dimensional crack problems//Int. J. Fract. 1986. V. 31. № 2. P. 105—124.
11. Benzley S. E. Representation of singularities with isoparametric finite elements//Int. J. Num. Meth. Eng. 1974. V. 8. № 3. P. 537—545.
12. Li Yao-Chen. The finite element method by employing the singular element with concordant displacement at the crack tip//Eng. Fract. Mech. 1984. V. 19. № 5. P. 959—978.
13. Rao A. K., Krishna Murty A. Y., Raju I. S. Special finite elements for the analysis of stress concentrations and singularities//Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol. Berlin. 1971. V. 5. Part M. P. 1—20.
14. Piltner R. Special finite elements for an appropriate treatment of local effect//Local Eff. Anal. Struct. Amsterdam e. a., 1985. P. 299—314.
15. Луцук О. Н. Модификация метода конечных элементов для областей с особыми точками//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 87—93.
16. Heppner G., Nansen J. S. Mixed mode fracture analysis of rectilinear anisotropic plates by high order finite elements//Int. J. Num. Meth. Eng. 1981. V. 17. № 3. P. 445—464.
17. Chen E. P. Finite element analysis of a bimaterial interface crack//Theor. and Appl. Frac. Mech. 1985. V. 3. P. 257—262.
18. Barsoum R. S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics//Int. J. Num. Meth. Eng. 1976. V. 10. № 1. P. 25—37.
19. Gavete L., Michavilla F., Diez F. A new singular finite element in linear elasticity//Comput. Mech. 1989. V. 4. № 5. P. 361—371.
20. Henshell R. D., Shaw K. G. Crack tip finite elements are unnecessary//Int. J. Num. Meth. Eng. 1975. V. 9. № 4. P. 495—507.
21. Nayfeh Adnan H., Nassar Elsay ed Abdel-Ati M. Mathematical simulation of singularities for isoparametric elements of arbitrary orders//Int. J. Num. Meth. Eng. 1981. V. 47. № 3. P. 465—470.
22. Akin J. E. The generation of elements with singularities//Int. J. Num. Meth. Eng. 1976. V. 10. № 6. P. 1249—1259.
23. Hugness Thomas J. R., Akin J. E. Techniques for developing «special finite element» shape functions with particular reference to singularities//Int. J. Num. Meth. Eng. 1980. V. 15. № 5. P. 733—751.
24. Stern M. Families of consistent conforming elements with singular derivative fields//Int. J. Num. Meth. Eng. 1979. V. 14. № 4. P. 409—421.
25. Abdi R. El., Valentin G. Isoparametric elements for a crack normal to the interface between two bonded layers//Comput. and Struct. 1989. V. 33. № 1. P. 241—248.
26. Staab G. H., Chang T. C. A finite element analysis of the finite width interface mixed mode bi-material fracture problem//Comput. and Struct. 1984. V. 19. № 5—6. P. 879—884.

27. Боджи Д. Б. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора//Прикл. механика. Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. 1971. Т. 38. № 2. С. 87—96.

28. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

29. Ying L. A. A note on the singularity and the strain energy of singular elements//Int. J. Num. Meth. Eng. 1982. V. 18. № 1. P. 31—39.

30. Zhu B., Chen Y. Numerical computation on a singularity in fracture//Adv. Fract. Res. Proc. 6th Int. Conf. (ICF6), New Delhi, 4—10 Dec., 1984. Oxford. 1984. V. 2. P. 897—904.

31. Перлин П. И., Штернис А. З. К определению коэффициента интенсивности напряжений в плоской задаче теории упругости//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 679—684.

32. Solecki J. S., Swedlow J. L. Elastic stress analysis of constrained cylinder by a special finite element method//Int. J. Solids and Struct. 1980. V. 16. № 11. P. 959—968.

Пермь.

Поступила в редакцию
25.XI.1993