

УДК 539.3

© 1995 г. Г. Б. КОЛЧИН, Е. К. КОВАЛОВ

ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛОГО ШАРА

Неоднородность, понимаемая как зависимость характеристик упругости материала от координат и обусловленная либо технологией изготовления объекта, либо внешним воздействием типа теплового, может существенно повлиять на его напряженно-деформированное состояние [1—3]. Для теории и приложений наибольший интерес представляют качественные эффекты, вызываемые неоднородностью. Выявление их с использованием численных или численно-аналитических методов, например, предложенного в [4] для решения задач, близких по постановке к рассматриваемой, связано с большим объемом вычислений, что, однако, не гарантирует полноты анализа.

Точные аналитические решения позволяют провести полное исследование и тем самым установить наличие тех или иных эффектов. Иллюстрацией и служит предлагаемое решение задачи о центрально симметричной деформации полого шара из упругого радиально неоднородного трансверсально изотропного материала.

1. Рассмотрим полый шар, загруженный по внутренней и внешней поверхностям равномерным давлением p и q соответственно. Воспользуемся сферической системой координат с началом в центре шара и положим, что θ и φ — углы, отсчитываемые от произвольно ориентированных ортогональных осей, а r — текущий радиус. Пусть R_0 и R — внутренний и наружный радиусы шара. Введем безразмерный радиус $\rho = r/R$ (если $R_0/R = c$, то $c \leq \rho \leq 1$).

Положим, что материал шара линейно упругий и трансверсально изотропный относительно любого радиуса, проведенного из начала координат в данную точку. Будем считать, что характеристики упругости такого материала являются непрерывными функциями радиуса, имеющими по крайней мере первую производную

$$A_{ij} = A_{ij}^0 \psi_{ij}(\rho) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где A_{ij}^0 — постоянные, имеющие размерность напряжений [3].

Очевидно, что в рамках введенных допущений компоненты напряженно-деформированного состояния шара будут функциями только радиуса, т. е. задача является центрально симметричной, в которой

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= du/d\rho, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = u/\rho \\ \gamma_{\theta\varphi} &= \gamma_{\rho\varphi} = \gamma_{\rho\theta} = 0 \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta, \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\rho\theta} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь и далее $u(\rho)$ — единственное отличное от нуля радиальное перемещение, а для компонент деформаций и напряжений используются общепринятые обозначения [1, 3].

С учетом (1.2) закон Гука [3] принимает вид

$$\sigma_\rho = A_{11}\varepsilon_\rho + 2A_{12}\varepsilon_\theta \quad (1.3)$$

$$\sigma_0 = A_{12}\varepsilon_p + (A_{22} + A_{23})\varepsilon_0$$

При отсутствии объемных сил напряжения (1.3) должны удовлетворять уравнению равновесия

$$d\sigma_p/d\rho + 2(\sigma_p - \sigma_0)/\rho = 0 \quad (1.4)$$

и граничным условиям

$$\sigma_p(c) = -p, \quad \sigma_p(1) = -q \quad (1.5)$$

Подстановка (1.3) в (1.4) с учетом (1.2) сводит задачу к уравнению

$$u'' + u' \left(\frac{2}{\rho} + \frac{A_{11}'}{A_{11}} \right) + u \frac{2}{A_{11}\rho} \left[A_{11}' - \frac{1}{\rho} (A_{22} + A_{23} - A_{12}) \right] = 0 \quad (1.6)$$

где штрих означает производную соответствующей функции.

Очевидно, что при произвольных и тем более различных видах функций (1.1) точное решение уравнения (1.6) вряд ли возможно, а потому логично ввести ряд упрощающих задачу допущений.

Положим, что $\psi_{ij}(\rho)$ одинаковы и имеют вид

$$\psi_{ij}(\rho) = \psi(\rho) = \rho^k \quad (1.7)$$

Если от A_{ij} в законе Гука (1.3) перейти к так называемым «техническим» характеристикам согласно [3], то (1.7) означает, что модули упругости вдоль радиуса E_1 и в направлении, перпендикулярном к нему E_2 , изменяются по (1.7), а соответствующие коэффициенты поперечной деформации ν_1 и ν_2 постоянны, но могут быть различны.

При неоднородности (1.7) уравнение (1.6) будет уравнением Эйлера

$$u'' + u' \frac{2+k}{\rho} + u \frac{2}{\rho^2} (k\alpha - \beta) = 0 \quad (1.8)$$

$$\alpha = A_{12}^0/A_{11}^0 = E_2^0\nu_1/(E_1^0(1-\nu_2))$$

$$\beta = \frac{1}{A_{11}^0} (A_{22}^0 + A_{23}^0 - A_{12}^0) = \frac{E_2^0(1-\nu_1)}{E_1^0(1-\nu_2)} = \alpha \frac{1-\nu_1}{\nu_1}$$

Структура решения уравнения (1.8) и соответственно характер напряженно-деформированного состояния определяются соотношением между параметрами неоднородности k и анизотропии β .

Следуя стандартной схеме, положим

$$u = \rho^s \quad (1.9)$$

где s являются корнями характерного уравнения

$$s^2 + (1+k)s + 2(k\alpha - \beta) = 0 \quad (1.10)$$

Из (1.10) получаем

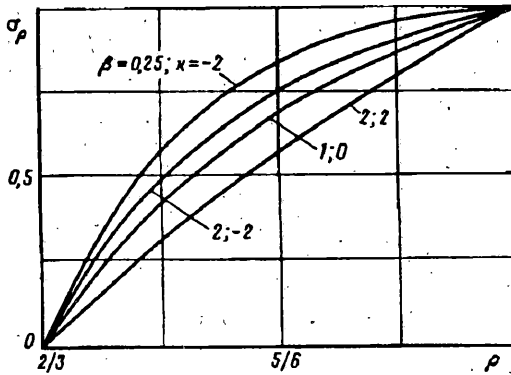
$$s_{1,2} = t \pm n \quad (1.11)$$

$$t = -0,5(k+1), \quad n = [t^2 - 2(k\alpha - \beta)]^{0,5}$$

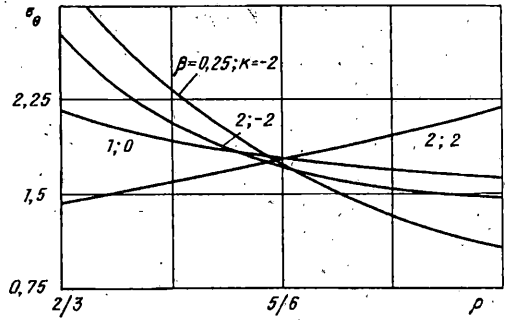
Таким образом, корни $s_{1,2}$ могут быть действительными, в том числе при $n = 0$ кратными, и комплексными.

При $s_{1,2}$ действительных

$$u(\rho) = A\rho^{t+n} + B\rho^{t-n} \quad (1.12)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Если $n = 0$, т. е. $s_1 = s_2$, тогда

$$u(\rho) = \rho^t (A + B \ln \rho) \quad (1.13)$$

При $s_{1,2}$ комплексных

$$u(\rho) = \rho^t [A \cos(n \ln \rho) + B \sin(n \ln \rho)] = \rho^t C \sin(n \ln \rho + \varphi_0) \quad (1.14)$$

В (1.12)–(1.14) A и B постоянные, определяемые из условий (1.15), а $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$ и $\operatorname{tg} \varphi_0 = A/B$.

Сопоставление полученных решений очевидным образом показывает существование качественных эффектов, обусловленных как анизотропией, так и неоднородностью.

Из (1.11) с учетом связи между α и β следует условие действительности корней уравнения (1.10):

$$(k + 1)^2 > 8\beta (k\nu_1 / (1 - \nu_1) - 1) \quad (1.15)$$

Поскольку $\beta > 0$, что очевидно при $\nu_1 < 1$ и $\nu_2 < 1$, то условие (1.15) всегда выполняется, если $k \leq (1 - \nu_1) / \nu_1$. Считая, что $0 \leq \nu_1 \leq 0,5$, получаем, что корни $s_{1,2}$ действительны для всех $k < 0$.

Для однородного тела, т. е. при $k = 0$, условие (1.15) выполняется при любом β и корни $s_{1,2}$ всегда действительны.

2. Рассмотрим распределение напряжений по толщине шара для случая действительных корней, когда решение имеет вид (1.12).

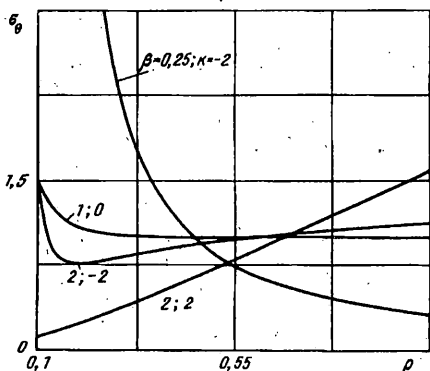
Подставляя (1.12) в (1.3) с учетом (1.2) и определив постоянные из (1.5), получаем

$$\sigma_\rho = \frac{1}{1 - c^{2n}} [(pc^{n-m} - q) \rho^{n+m} + (q - pc^{-n-m}) c^{2n} \rho^{m-n}] \quad (2.1)$$

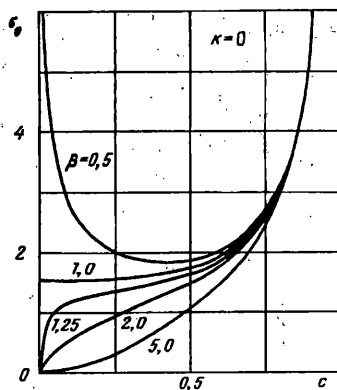
$$\sigma_\theta = \frac{1}{1 - c^{2n}} [\lambda_n (pc^{n-m} - q) \rho^{n+m} + \lambda_{-n} (q - pc^{-n-m}) c^{2n} \rho^{m-n}]$$

$$m = 0,5(k - 3), \quad \lambda_n = 0,5(n - t), \quad \lambda_{-n} = -0,5(n + t)$$

Решение (2.1) с точностью до значений n и m совпадает с формулами для напряжений в однородном трансверсально изотропном шаре [3], а при $\beta = 1$ и $k = 0$ дает известный результат для изотропного однородного шара [5].



Фиг. 3



Фиг. 4

Как следует из (2.1), распределение напряжений, особенно σ_0 , существенно определяется относительной толщиной стенки шара.

На фиг. 1 и 2 представлены графики $\sigma_p(\rho)$ и $\sigma_0(\rho)$ при $p=0$ и $q=-1$, различных β и k для $c=2/3$, $\nu_1=\nu_2=0,3$, т. е. в относительно тонком шаре. Из них видно, что изменения в напряженном состоянии в этом случае, связанные с анизотропией и неоднородностью, чисто количественные и наиболее заметны для σ_0 .

На фиг. 3 представлены графики $\sigma_0(\rho)$ при $p=0$ и $q=-1$ в относительно толстом ($c=0,1$) шаре, на которых прослеживаются переход количественных эффектов в качественные: резкий рост σ_0 у внутренней поверхности для ряда значений β и k , появление минимума на некоторых графиках.

Существование последнего вытекает из решения уравнения $\sigma'(\rho)=0$, которое дает радиус ρ_0 , соответствующий минимуму σ_0 :

$$\rho_0 = \left[\frac{(2n - k - 1)(2n - k + 3)}{(2n + k + 1)(2n + k - 3)} \right]^{1/(2n)} \quad (2.2)$$

Из (2.2) видно, что ρ_0 не зависит от толщины шара, определяется лишь соотношением между параметрами анизотропии β и неоднородности k ; и такой минимум возможен только для некоторых их комбинаций, при которых подкоренное выражение положительно.

Так, для однородного шара при $k=0$, когда $n=0,5(1+8\beta)^{1/2}$, минимум σ_0 существует лишь при $\beta < 1$, поскольку в этом случае необходимо, чтобы выполнялось условие $2n > 3$.

3. Решение рассматриваемой задачи для изотропного однородного шара использовалось [5] при оценке эффектов концентрации напряжений у сферической полости в бесконечной среде. Соотношения (2.1) позволяют выполнить такой анализ с учетом неоднородности и трансверсальной изотропии материала.

Напряжения σ_0 при $\rho=c$ в изотропном однородном теле можно получить, как известно, двумя путями, приводящими к одному и тому же результату [5].

Первый состоит в том, что сначала рассматривается бесконечное пространство в однородном напряженном состоянии $\sigma_p = \sigma_0 = -p$, удовлетворяющем уравнению равновесия (1.4). Затем в начале координат, которое выбирается произвольно в силу изотропности и однородности тела, вырезается сферическая полость радиуса r , к поверхности которой прикладывается давление p . Положив в (2.1) $q=0$ и $c \rightarrow 0$, находим, что в этом случае ($k=0$, $\beta=1$, $n=1,5$) на бесконечности $\sigma_p = \sigma_0 = 0$, а при $\rho=c$ напряжения $\sigma_0 = -0,5p$. Суммируя эти два решения,

получаем, что $\sigma_0 = -1,5p$ при $\rho = c$. К аналогичному результату приводит и второй путь решения, когда в (2.1) полагаем $p = 0$ и $c \rightarrow 0$, что при $k = 0$, $\beta = 1$ и $n = 1,5$ дает то же $\sigma_0 = -1,5q$ при $\rho = c$.

Для анизотропного тела первый путь построения решения неприемлем, ибо напряженное состояние $\sigma_p = \sigma_0 = -p$, отвечающее уравнению равновесия, приводит к деформациям, удовлетворяющим условию их совместимости только в случае изотропного тела, что легко проверить подстановкой (1.3) в уравнение

$$\varepsilon_p - \varepsilon_0 - p \, d\varepsilon_0/dp = 0 \quad (3.1)$$

Таким образом, для неоднородного анизотропного шара, полагая в (2.1) $p = 0$ и $\rho = c$, находим

$$\sigma_0|_{\rho=c} = -qn \frac{c^{m+n}}{1 - c^{2n}} \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что σ_0 на поверхности $\rho = c$ существенно зависят не только от степени анизотропии и неоднородности, но и относительной толщины шара. Учитывая, что рассматривается случай действительных корней, когда $n \geq 0,5$, получаем, что возможны следующие варианты.

Если тело изотропно и однородно, то $n = 1,5$, $m = -1,5$ и при $c \rightarrow 0$ приходим к известному решению $\sigma_0 = -1,5q$.

Если материал трансверсально изотропный и однородный, то $m = -1,5$ и величина σ_0 зависит от степени анизотропии β . При $\beta > 1$, когда $n > 1,5$, находим, что при $c \rightarrow 0$ напряжение $\sigma_0 \rightarrow 0$. Пусть теперь $\beta < 1$. Тогда $n < 1,5$ и при $c \rightarrow 0$ напряжения $\sigma_0 \rightarrow \infty$.

Для неоднородного материала величина σ_0 при $\rho = c$ зависит от соотношения между β и k . Причем либо $\sigma_0 \rightarrow 0$, если $n > 1,5$, либо $\sigma_0 \rightarrow \infty$, если $n < 1,5$.

Приравняв σ_0' из (3.2) нулю, получаем, что σ_0 минимально при

$$c_0 = ((m + n)/(m - n))^{1/2n} \quad (3.3)$$

Для однородного тела при $k = 0$ величина c_0 существует для $n < 1,5$.

На фиг. 4 представлены графики $\sigma_0(c)$ при $\rho = c$, $p = 0$ и $q = -1$ для однородного ($k = 0$) материала, иллюстрирующие зависимость (3.2).

Оценим фактическое значение σ_0 при $\rho = c$, $p = 0$ и $q = -1$. Для этого положим, что шар однородный ($m = -1,5$) и примем $n = 1,4$. Тогда, из (3.2) находим, что $\sigma_0 = -14q$, если $c = 10^{-10}$.

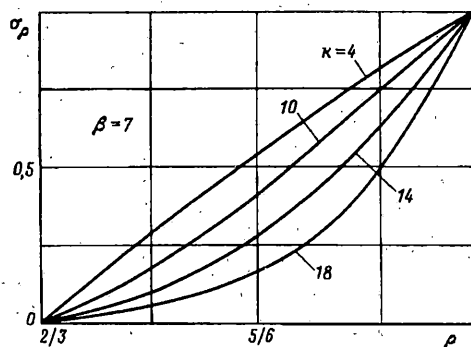
Практически это означает, что либо наружный радиус шара превышает разумные пределы, либо внутренний его радиус настолько мал, что применение гипотезы сплошности будет уже некорректным. Следовательно, тот факт, что σ_0 бесконечно велико, надо понимать лишь чисто условно, поскольку в реальных ситуациях оно, хоть и велико, но имеет конечное значение.

4. Рассмотрим случай комплексных корней, когда соотношение между параметрами анизотропии и неоднородности таково, что решение имеет вид (1.14).

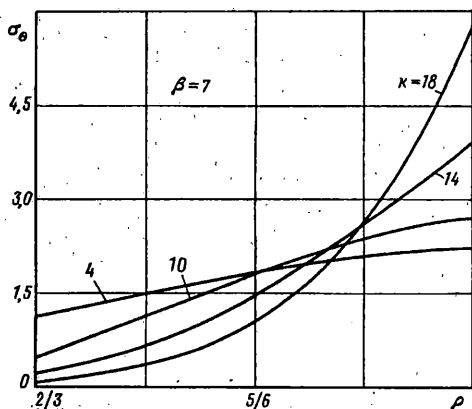
Подставляя (1.14) в (1.3) с учетом (1.2) и определив постоянные из (1.5), получаем

$$\sigma_p = \frac{-1}{\sin(n \ln c^{-1})} \left[p \left(\frac{p}{c} \right)^m \sin \left(n \ln \frac{1}{p} \right) + qp^m \sin \left(n \ln \frac{p}{c} \right) \right] \quad (4.1)$$

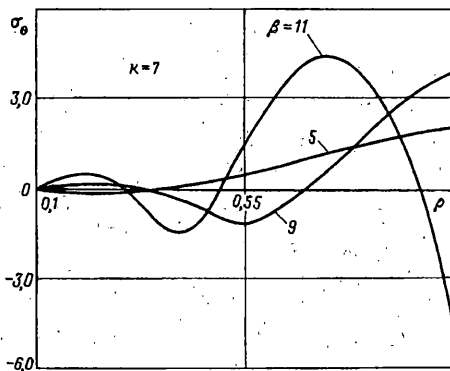
$$\sigma_0 = \frac{1}{\sin(n \ln c^{-1})} \left\{ \frac{p}{2} \left(\frac{p}{c} \right)^m \left[t \sin \left(n \ln \frac{1}{p} \right) + n \cos \left(n \ln \frac{1}{p} \right) \right] + \right.$$



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

$$+ \frac{q}{2} \rho^n \left[t \sin \left(n \ln \frac{\rho}{c} \right) - n \cos \left(n \ln \frac{\rho}{c} \right) \right] \}$$

На фиг. 5 и 6 представлены графики $\sigma_r(\rho)$ и $\sigma_\theta(\rho)$ при $\rho = 0$ и $q = -1$ для различных k при $\beta = 7$ и $c = 2/3$. На фиг. 7 даются те же графики $\sigma_\theta(\rho)$ для $k = 7$ и ряда β , но при $c = 0,1$. Из их сравнения хорошо прослеживается возрастание осцилляции напряжений с утолщением стенки шара и существенное качественное отличие от случая действительных корней.

Заметим, что при $c \rightarrow 0$ из (4.1) следует, что в этом случае σ_θ на внутренней поверхности шара стремится к нулю, т. е. эффект концентрации напряжений у поверхности сферической полости отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
2. Колчин Г. Б. Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев: Штиинца, 1977. 119 с.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
4. Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Численно-аналитическое решение задач теории упругости для неоднородной среды со сферической полостью или включением // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 82—88.
5. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.