

УДК 531.38

© 1995 г. А. А. ПАНКОВ, Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАТЕРНИОННЫХ ЗАКОНОВ  
КИНЕМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Исследуются кватернионные уравнения ошибок кинематической задачи управления ориентацией твердого тела [1, 2], в которой роль управления играет вектор абсолютной угловой скорости твердого тела. Рассматриваются кватернионные аналоги позиционного, интегрального и интегрально-позиционного законов коррекции возмущенного углового движения твердого тела со скалярными коэффициентами коррекции. Обсуждается выбор коэффициентов коррекции, приводятся результаты численного моделирования законов кинематического управления, предлагается рациональный с вычислительной точки зрения алгоритм функционирования системы управления ориентацией твердого тела.

Работа является развитием [2].

**1. Постановка задачи.** Для описания углового движения твердого тела введем в рассмотрение следующие системы координат:  $\xi$  — инерциальная;  $Z$  — опорная (программная) система координат, вращающаяся в инерциальном пространстве с заданной (программной) угловой скоростью  $\omega^\circ = \omega^\circ(t)$ ;  $X$  — система координат, жестко связанная с твердым телом.

Взаимную ориентацию введенных систем координат зададим следующей схемой поворотов:

$$\xi \xrightarrow[\omega^\circ]{\lambda^\circ} Z \xrightarrow{\mu(\mu^*)} X - \xi \xrightarrow[\omega]{\lambda} X$$

где  $\omega$  — вектор абсолютной угловой скорости вращения твердого тела;  $\lambda^\circ$  — нормированный кватернион программной ориентации твердого тела, определенный своими компонентами  $\lambda_v^\circ$  ( $v = 0, 3$ ) в базисе  $Z$  (а, следовательно, и в базисе  $\xi$ );  $\lambda, \mu(\mu^*)$  — ненормированные в общем случае кватернионы, определяющие текущую ориентацию твердого тела и его ошибку ориентации.

Кватернион  $\lambda$  определен своими компонентами в базисе  $X$  ( $\xi$ ), а кватернион ошибки ориентации может быть определен либо в инерциальном базисе  $\xi$  по формуле  $\mu = \lambda \circ \bar{\lambda}^\circ$ , либо в связанном базисе  $X$  (а, следовательно, и в программном базисе  $Z$ ) по формуле [1]:  $\mu^* = \bar{\lambda}^\circ \circ \lambda$ .

Здесь и далее верхняя черта означает сопряженный кватернион, а знак  $(\circ)$  — кватернионное умножение.

Связь кватернионов  $\lambda^\circ, \lambda$  и их первых производных по времени с векторами  $\omega^\circ, \omega$  имеет вид кинематических уравнений [1, 2]:

$$2\dot{\lambda}^\circ = \lambda^\circ \circ \omega_z^\circ$$

$$2\dot{\lambda} = \lambda \circ \Omega_x, \quad \Omega_x = \omega_0 + \omega_x \tag{1.1}$$

где  $\omega_0$  — произвольная функция, связанная с нормой  $\lambda^2$  кватерниона  $\lambda$  следующим дифференциальным соотношением

$$2\dot{\lambda} = \omega_0 \lambda, \quad \lambda = (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{0.5} \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1), (1.2) и далее точка означает производную по времени  $t$ , запись вида  $a_\eta$  означает отображение вектора  $a$  на базис  $\eta$  ( $\eta = \xi, Z, X$ ). Отметим, что производная от кватерниона вычисляется в предположении неизменности ортов гиперкомплексного пространства.

Под задачей кинематического управления ориентацией твердого тела будем понимать задачу приведения связанной с телом системы координат  $X$  к опорной системе координат  $Z$ , вращающейся с программной абсолютной угловой скоростью  $\omega^\circ$ , за счет сообщения связанной системе координат  $X$  абсолютной угловой скорости  $\omega$ , рассматриваемой в качестве управления [1, 2].

Требуемая абсолютная угловая скорость вращения твердого тела формируется следующим образом [1]:  $\omega = \omega_k + \omega^*$ , где  $\omega^*$  — вектор угловой скорости, проекции  $\omega_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) которого в базисе  $X$  равны заданным в базисе  $Z$  проекциям  $\omega_n^\circ$  программной угловой скорости  $\omega^\circ$ ;  $\omega_k$  — вектор угловой скорости коррекции, сообщение которой твердому телу при наличии ошибки ориентации приводит к совпадению базисов  $X$  и  $Z$ .

В [2] предложены законы формирования кватерниона коррекции  $\Omega_k = \omega_0 + \omega_k$ , являющиеся кватернионными аналогами позиционной, интегральной и интегрально-позиционной коррекций. Наибольший интерес представляет закон формирования кватерниона коррекции (1.15) [2], принимающий в случае скалярных коэффициентов коррекции  $k, m$  вид

$$\Omega_{kx} = \omega_0 + \omega_{kx} = \lambda^{-1} \circ \left[ k(\mu^{-1} - 1) \circ \lambda + m \left( \int_0^t (1 - \mu) d\tau \right) \circ \lambda^\circ \right] \quad (1.3)$$

Отображение кватерниона коррекции  $\Omega_k$ , формируемого в связанном базисе в соответствии с (1.3), на инерциальный базис является лишь функцией кватерниона ошибки ориентации  $\mu$ , определенного своими компонентами в инерциальном базисе, и имеет следующий вид:

$$\Omega_{k\xi} = \omega_0 + \omega_{k\xi} = k(\mu^{-1} - 1) + m \left[ \int_0^t (1 - \mu) d\tau \right] \circ \mu^{-1} \quad (1.4)$$

Кватернионное уравнение ошибок замкнутой системы управления ориентацией твердого тела для интегрально-позиционного закона коррекции (1.3) ((1.4)), записанное относительно кватерниона ошибки ориентации  $\mu$ , является линейным (без линеаризации), стационарным, инвариантным относительно произвольного программного (невозмущенного) движения и имеет вид [2]:

$$2\mu'' + k\mu' + m(\mu - 1) = 0 \quad (1.5)$$

Это позволяет дать полный анализ свойств процесса коррекции ориентации твердого тела и аналитически определить требуемые значения коэффициентов коррекции  $k, m$ .

Следует отметить, что для формирования вектора  $\omega_k$  угловой скорости коррекции в связанном или инерциальном базисе необходимо выделить в кватернионной формуле (1.3) или (1.4) скалярную и векторную части. Так из (1.4) имеем

$$\omega_0 = k(\|\mu\|^{-1} \mu_0 - 1) + m \text{sqal} \left( \left( \int_0^t (1 - \mu) d\tau \right) \circ \mu^{-1} \right)$$

$$\omega_{k\xi} = -k \|\mu\|^{-1} \mu_v + m \text{vect} \left( \left( \int_0^t (1 - \mu) d\tau \right) \circ \mu^{-1} \right)$$

$$\|\mu\| = \mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2, \quad \mu_v = \text{vect } \mu$$

Получаемое выражение для векторной части  $\omega_k$  является алгоритмом формирования необходимого вектора корректирующей угловой скорости, а выражение для скалярной части  $\omega_0$ , уравнение (1.2) и равенство  $\|\mu\| = \|\lambda\|$  используются для вычисления нормы  $\|\mu\|$  кватерниона ошибки ориентации  $\mu$ , фигурирующей в алгоритме формирования вектора  $\omega_k$ .

В публикуемой работе приводятся результаты аналитического и численного исследования закона коррекции (1.3), обсуждаются вопросы выбора коэффициентов коррекции  $k$ ,  $m$ . Причем для этих целей используется выражение для отображения кватерниона коррекции на инерциальный базис (1.4).

Полученные результаты могут быть использованы и в другой задаче кинематического управления ориентацией твердого тела, в которой роль управления играет вектор абсолютного углового ускорения твердого тела, так как соответствующее построение закона формирования корректирующего углового ускорения приводит к кватернионному уравнению ошибок того же вида ((1.5)), что и в случае рассматриваемой кинематической задачи управления ориентацией твердого тела для интегрально-позиционного закона коррекции.

2. Позиционный закон коррекции. Кватернион коррекции  $\Omega_{k\varepsilon}$  в этом случае имеет вид

$$\Omega_{k\varepsilon} = k(\mu^{-1} - 1) \quad (2.1)$$

где  $k$  — скалярный коэффициент ( $k > 0$ ), имеющий смысл коэффициента позиционной коррекции.

Для исследования поведения функции  $\omega_k(t) = \text{vect } \Omega_k(t)$  рассмотрим уравнение ошибок замкнутой системы управления ориентацией твердого тела для закона коррекции (2.1) [2]:

$$2\mu' = k(1 - \mu) \quad (2.2)$$

Общее решение уравнения (2.2) имеет вид [2]:

$$\mu = \exp(-0,5kt) c + 1 \quad (2.3)$$

где  $c$  — кватернионная константа, определяемая начальными условиями движения (начальной ошибкой ориентации):  $c = \mu(t_0) - 1$ ,  $t_0 = 0$ .

В соответствии с (2.3) выражение для нормы кватерниона  $\mu$  имеет вид

$$\|\mu(t)\| = \exp(-kt) \|c\| + 2c_0 \exp(-0,5kt) + 1 \quad (2.4)$$

$$\|c\| = (\mu_0(0) - 1)^2 + \sum_{n=1}^3 \mu_n^2(0)$$

Учитывая (2.1), (2.3) и (2.4), получим явные временные зависимости для абсолютной угловой скорости коррекции  $\omega_k$  и абсолютного углового ускорения коррекции  $\varepsilon_k$  в отображениях на инерциальный базис  $\xi$ :

$$\omega_{k\varepsilon} = - \frac{k \exp(-0,5kt)}{\exp(-kt) \|c\| + 2c_0 \exp(-0,5kt) + 1} c_v \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{k\varepsilon} = \omega_{k\varepsilon}' = - \frac{k^2 \exp(-0,5kt) (\exp(-kt) \|c\| - 1)}{2 (\exp(-kt) \|c\| + 2c_0 \exp(-0,5kt) + 1)^2} c_v \quad (2.6)$$

где  $c_v = \text{vect } c$  — векторная часть кватерниона  $c$ .

Из (2.5) и (2.6) видно, что в процессе коррекции твердое тело совершает плоский эйлеров разворот вокруг оси, определяемой векторной частью  $c$ , ква-

термина с, неизменно ориентированной в инерциальной системе координат, с угловой скоростью

$$\dot{\varphi}^*(t) = - \frac{k \exp(-0,5kt)}{\exp(-kt) \|c\| + 2c_0 \exp(-0,5kt) + 1} |c_v|$$

и угловым ускорением

$$\ddot{\varphi}^*(t) = - \frac{k^2 \exp(-0,5kt) (\exp(-kt) \|c\| - 1)}{2 (\exp(-kt) \|c\| + 2c_0 \exp(-0,5kt) + 1)^2} |c_v|$$

Угол эйлера разворота изменяется по закону

$$\varphi(t) = 2 \arccos(\exp(-0,5kt) c_0 + 1)$$

На основании (2.5), (2.6) может быть решена задача выбора коэффициента коррекции  $k$ , обеспечивающего выполнение условия

$$|\omega_k|_{\max} \leq \omega^*, \quad |\omega_k| = (\omega_{k1}^2 + \omega_{k2}^2 + \omega_{k3}^2)^{0,5} \quad (2.7)$$

где  $\omega^*$  — заданная величина максимально допустимого модуля абсолютной угловой скорости коррекции.

Из (2.5) и (2.6) получаем значения  $\omega$  и  $\varepsilon$  для  $t = t_0 = 0$ :

$$\omega_{k\varepsilon}(0) = - \frac{k}{\|c\| + 2c_0 + 1} c_v, \quad \varepsilon_{k\varepsilon}(0) = - \frac{k^2 (\|c\| - 1)}{2 (\|c\| + 2c_0 + 1)^2} c_v \quad (2.8)$$

Отметим, что при  $\|c(0)\| = 1$  значение  $\|c\| + 2c_0 + 1 = 1$  и выражения (2.8) существенно упрощаются.

Из (2.8) видно, что в силу безынерционности объекта управления (рассматривается кинематическая постановка задачи управления) при наличии ошибки ориентации угловая скорость и угловое ускорение твердого тела изменяются скачкообразно (мгновенно).

Анализ (2.5) и (2.6) показывает, что в зависимости от величины начальной ошибки ориентации угловая скорость коррекции может изменяться с течением времени качественно различным образом.

1. Угловая скорость коррекции, принимая максимальное значение для начального момента времени  $t_0 = 0$ , в дальнейшем монотонно убывает, стремясь к нулю. В этом случае векторы  $\omega_k$  и  $\varepsilon_k$  направлены в противоположные стороны (тело при отсутствии программного движения вращается замедленно). Из сопоставления (2.5) с (2.6) видно, что этот случай имеет место, когда

$$\|c\| \leq 1 \quad (2.9)$$

Условие (2.9) с учетом равенства  $c = \mu(0) - 1$  принимает вид

$$\|\mu(0)\| - 2\mu_0(0) \leq 0, \quad \mu_0(0) = \text{sqal } \mu(0) \quad (2.10)$$

Полагая, что  $\|\mu(0)\| = 1$  (как правило, это равенство обеспечивается алгоритмом решения задачи начальной выставки системы ориентации), из (2.10) получим  $\mu_0(0) = \cos(0,5\varphi(0)) \geq 0,5$ , где  $\varphi(0)$  — ошибка ориентации в угловой мере для начального момента времени (угол разворота твердого тела вокруг эйлеровой оси  $c_v$  относительно его требуемого (программного) углового положения).

Таким образом, если ошибка ориентации в начальный момент времени  $\varphi(0) \leq 120$  град., то угловая скорость коррекции с течением времени монотонно убывает.

В этом случае коэффициент коррекции  $k$  должен удовлетворять неравенству

$$k \leq \omega^* (\|c\| + 2c_0 + 1) |c_v|^{-1} = \omega^* |c_v|^{-1}, \quad |c_v| = (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^{0,5} \neq 0 \quad (2.11)$$

вытекающему из первого равенства (2.8), (2.7) и равенств  $\|\mu(0)\| = 1$ ,  $|\omega_{k\bar{\xi}}(0)| = |\omega_k|_{\max}$ .

2. Угловая скорость коррекции возрастает на интервале времени  $[t_0, t^*]$ , а затем монотонно убывает, стремясь к нулю. Этот случай имеет место, когда  $\|\bar{c}\| > 1$ , т. е. когда  $\varphi(0) > 120$  град.

Момент времени  $t^*$ , для которого выполняется условие  $|\omega_k| = |\omega_k|_{\max}$ , можно определить (приравняв к нулю равенство (2.6)) по формуле

$$t^* = k^{-1} \ln \|\bar{c}\| \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.5), имеем

$$\omega_{k\bar{\xi}}(t^*) = -0,5k(c_0 + |\bar{c}|)^{-1} c_v$$

$$c_0 = \text{sqal } \bar{c}, \quad |\bar{c}| = (c_0^2 + \sum_{n=1}^3 c_n^2)^{0,5}$$

Отсюда находим

$$k = 2(c_0 + |\bar{c}|) |c_v|^{-1} |\omega_k(t^*)| = 2(c_0 + |\bar{c}|) |c_v|^{-1} |\omega_k|_{\max}$$

Следовательно, для того, чтобы угловая скорость коррекции не превосходила максимально допустимой величины, коэффициент коррекции  $k$  должен удовлетворять в силу (2.7) соотношению

$$k \leq 2(c_0 + |\bar{c}|) |c_v|^{-1} \omega^* \quad (2.13)$$

*Замечание.* При  $\|\mu(0)\| = 1$

$$c_0 = \cos(0,5\varphi(0)) - 1, \quad |c_v| = \sin(0,5\varphi(0))$$

и формулы (2.11), (2.13) принимают соответственно вид:

$$k \leq (\sin(0,5\varphi(0)))^{-1} \omega^* \quad (2.14)$$

$$k \leq 2(\cos(0,5\varphi(0)) + 2\sin(0,5\varphi(0))) [\sin(0,5\varphi(0))]^{-1} \omega^*$$

Отметим, что для выбора коэффициента  $k$  в формулах (2.11), (2.13), (2.14) необходимо подставлять такие значения  $|c_v|$ ,  $c_0$ ,  $|\bar{c}|$ ,  $\varphi(0)$ , которые соответствуют максимально возможному отклонению действительной ориентации твердого тела от его программной ориентации.

Скалярную часть  $\omega_0$  кватерниона коррекции  $\Omega_{k\bar{\xi}}$  получим, используя соотношения (2.1) и (2.3):

$$\omega_0 = k(\|\mu\|^{-1} \mu_0 - 1) = k \left( \frac{\exp(-0,5kt) c_0 + 1}{\exp(-kt) \|\bar{c}\| + 2c_0 \exp(-0,5kt) + 1} - 1 \right) \quad (2.15)$$

Из рассмотрения (2.15) следует, что скалярная функция  $\omega_0(t)$ , определяющая в процессе управления ориентацией твердого тела изменение нормы переменной  $\mu$  (нормы кватерниона ошибки ориентации, а следовательно, и нормы кватерниона текущей ориентации твердого тела [2]), с течением времени стремится к нулю. Для начального момента времени  $t_0 = 0$  из (2.15) имеем, полагая  $\|\mu(0)\| = 1$ ,  $\omega_0(0) = kc_0 = k(\mu_0(0) - 1)$ . Таким образом,  $\omega_0(0) = 0$  при  $\mu_0(0) = 1$ , т. е. при нулевой ошибке ориентации твердого тела в начальный момент времени.

Полученные соотношения наглядно показывают, что закон коррекции (2.1) на кинематическом уровне обеспечивает асимптотическую устойчивость программного углового движения твердого тела, позволяют дать полный анализ процесса коррекции и выбрать необходимый коэффициент коррекции  $k$ .

3. Интегральный закон коррекции. Рассмотрим интегральный закон коррекции

$$\Omega_{k_\xi} = m \left( \int_{t_0}^t (1 - \mu) d\tau \right) \circ \mu^{-1} \quad (3.1)$$

где  $m$  — скаляр ( $m > 0$ ), имеющий смысл коэффициента интегральной коррекции. Дифференциальное уравнение для кватерниона ошибки  $\mu$  [2]:

$$2\mu' = \Omega_{k_\xi} \circ \mu \quad (3.2)$$

для закона коррекции (3.1) принимает вид

$$2\mu' = m \int_{t_0}^t (1 - \mu) d\tau \quad (3.3)$$

Дифференцируя (3.3) по времени, получаем уравнение ошибок замкнутой системы управления ориентацией твердого тела в следующей форме:

$$N' + qN = 0, \quad N = \mu - 1, \quad q = 0,5m \quad (3.4)$$

Общее решение уравнения (3.4) имеет вид

$$N = c_1 \cos(\sqrt{q} t) + c_2 \sin(\sqrt{q} t)$$

$$c_1 = \mu(0) - 1 = N(0), \quad c_2 = q^{-0,5} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)_{t=0}$$

где  $c_1, c_2$  — кватернионные постоянные интегрирования.

Из (3.1), (3.3) для  $t = 0$  имеем:  $\Omega_{k_\xi}(0) = 0, \mu'(0) = 0$ . Поэтому  $c_2 = 0$  и выражение для кватерниона ошибки ориентации  $\mu$  в рассматриваемом случае принимает вид

$$\mu = c \cos(\sqrt{q} t) + 1, \quad c = c_1 = \mu(0) - 1 \quad (3.5)$$

Явную зависимость кватерниона коррекции  $\Omega_{k_\xi}$  от времени  $t$  получим, используя выражения (3.2) и (3.5).

Скалярная часть кватерниона коррекции

$$\omega_0 = \text{sqal } \Omega_{k_\xi} = -2 \sqrt{q} \|\mu\|^{-1} \sin(\sqrt{q} t) (\cos(\sqrt{q} t) \|\mu\| + c_0) \quad (3.6)$$

Векторная часть кватерниона коррекции

$$\omega_{k_\xi} = \text{vect } \Omega_{k_\xi} = -2 \sqrt{q} \|\mu\|^{-1} \sin(\sqrt{q} t) c_v \quad (3.7)$$

$$c_0 = \text{sqal } c, \quad c_v = \text{vect } c, \quad c = c_1$$

$$\|\mu\| = \|\mu\| \cos^2(\sqrt{q} t) + 2c_0 \cos(\sqrt{q} t) + 1 \quad (3.8)$$

Из (3.5) определяется момент времени  $t^\circ$  прохождения объектом управления программной ориентации:

$$t^\circ = q^{-0,5} (0,5\pi + \pi n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Анализируя выражения (3.2), (3.4) — (3.9), можно сделать вывод о том, что система управления ориентацией твердого тела, реализующая интегральный закон коррекции (3.1), в случае  $\mu'(0) = 0$  является неасимптотически устойчивой и

обеспечивает плоский эйлеров разворот твердого тела вокруг оси, определяемой вектором  $c_v = \mu_v(0)$ , с угловой скоростью (3.7). Амплитуда колебаний модуля угловой скорости  $\omega_k$  определяется начальными условиями движения и коэффициентом коррекции  $m$ , частота колебаний равна  $\sqrt{0,5m}$ .

Задача приведения твердого тела в требуемое угловое положение за заданный временной интервал решается с помощью формулы (3.9), которая позволяет найти необходимое значение коэффициента коррекции  $m$  по заданному времени  $t^\circ$  перевода твердого тела из произвольного начального углового положения в требуемое конечное.

4. Интегрально-позиционный закон коррекции. Кватернион коррекции в этом случае формируется в виде (1.3) или (1.4):

$$\Omega_{k_s} = k(\mu^{-1} - 1) + m \left( \int_{t_0}^t (1 - \mu) d\tau \right) \circ \mu^{-1} \quad (4.1)$$

Уравнение ошибок (3.2) системы управления ориентацией твердого тела для закона коррекции (4.1) принимает вид

$$2\mu' = k(1 - \mu) + m \int_{t_0}^t (1 - \mu) d\tau \quad (4.2)$$

Дифференцируя (4.2) по времени, получим уравнение ошибок в такой форме [2]:

$$N'' + pN' + qN = 0 \quad (4.3)$$

$$N = \mu - 1, \quad p = 0,5k, \quad q = 0,5m$$

Общее решение уравнения (4.3) для различных корней  $z_1, z_2$  соответствующего характеристического уравнения имеет вид

$$N = c_1 \exp(z_1 t) + c_2 \exp(z_2 t), \quad c_1 = \mu(0) - c_2 - 1$$

$$c_2 = (z_2 - z_1)^{-1} (\mu'(0) + z_1 (1 - \mu(0))), \quad z_1 \neq z_2$$

где  $c_1, c_2$  — кватернионные константы.

Из (4.1), (4.2) для  $t = t_0 = 0$  имеем

$$\Omega_{k_s}(0) = k(\mu(0))^{-1} - 1, \quad \mu'(0) = 0,5k(1 - \mu(0))$$

Поэтому

$$c_1 = \mu(0) - c_2 - 1$$

$$c_2 = (z_2 - z_1)^{-1} [0,5k + z_1] (1 - \mu(0))$$

и выражение для кватерниона ошибки ориентации  $\mu$  в случае комплексно сопряженных корней  $z_1$  и  $z_2$  принимает вид

$$\mu = \exp(-at) F_1(t) N(0) + 1, \quad N(0) = \mu(0) - 1 \quad (4.4)$$

$$a = -0,5p, \quad b = 0,5(p^2 - 4q)^{0,5}$$

$$F_1(t) = [(a - 0,5k) \sin(bt) + \cos(bt)] / b$$

Из (4.4) видно, что процесс отработки ошибки ориентации твердого тела имеет колебательный асимптотически устойчивый характер. Определить момент времени  $t^\circ$  прохождения твердым телом программной ориентации можно, используя следующее соотношение:

$$t^\circ = (\pi n - r) / b$$

<i>N</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu_0(t_0)$	-0,299	-0,299	-0,299	0,972	0,972	0,972	0,494	-0,167
$\mu_1(t_0)$	-0,599	-0,599	-0,599	0,111	0,111	0,111	0,124	0,713
$\mu_2(t_0)$	0,766	0,766	0,766	0,145	0,145	0,145	-0,852	-0,681
$\mu_3(t_0)$	0,032	0,032	0,032	-0,145	-0,145	-0,145	0,119	-0,003
$\lambda_0(t_0)$	1,0	1,0	1,0	0,972	0,972	0,972	1,0	1,0
$\lambda_1(t_0)$	0,0	0,0	0,0	0,111	0,111	0,111	0,0	0,0
$\lambda_2(t_0)$	0,0	0,0	0,0	0,145	0,145	0,145	0,0	0,0
$\lambda_3(t_0)$	0,0	0,0	0,0	-0,145	-0,145	-0,145	0,0	0,0
$\lambda_0^1(t_0)$	-0,299	-0,299	-0,299	1,0	1,0	1,0	0,494	-0,167
$\lambda_1^1(t_0)$	0,599	0,599	0,599	0,0	0,0	0,0	-0,124	-0,713
$\lambda_2^1(t_0)$	-0,766	-0,766	-0,766	0,0	0,0	0,0	0,852	0,681
$\lambda_3^1(t_0)$	-0,032	-0,032	-0,032	0,0	0,0	0,0	-0,119	0,003
<i>k</i>	0,0121	0,0	0,054	0,0121	0,0	0,054	0,2007	0,2554
<i>m</i>	0,0	0,0119	0,0146	0,0	0,0119	0,0146	0,0	0,0
$\varphi$	146	146	146	27	27	27	120,7	160,7
<i>t<sub>k</sub></i>	1200	600	400	1200	600	600	60	40
<i>N<sub>i</sub></i>	1, <i>a</i>	1, <i>b</i>	1, <i>c</i>	2, <i>a</i>	2, <i>b</i>	2, <i>c</i>	3, <i>a</i>	3, <i>b</i>

$n = 0, 1, 2, \dots$ , если  $r \leq 0$ ;  $n = 1, 2, \dots$ , если  $r > 0$ .

$\sin r = 1/A^*$ ,  $\cos r = (a - 0,5k)/(bA^*)$ ,  $A^* = ((a/b - k/2b)^2 + 1)^{0,5}$

Для получения временных зависимостей компонент кватерниона  $\Omega_{k\epsilon}$  используем уравнения (3.2) и (4.4). Получим

$$\omega_0 = \text{scal } \Omega_{k\epsilon} = 2 \exp(-at) \|\mu\|^{-1} F_1^2(t) (\exp(-at) F_1(t) \|\mu(0) - 1\| + \mu_0(0))$$

$$\omega_{k\epsilon} = \text{vect } \Omega_{k\epsilon} = 2 \exp(-at) \|\mu\|^{-1} F_1^2(t) \mu_0$$

$$\|\mu\| = \exp(-2at) F_1^2(t) \|\mu(0) - 1\| + 2 \exp(-at) F_1(t) \mu_0(0) + 1$$

Отметим некоторые особенности, вытекающие из полученных формул: вектор абсолютной угловой скорости коррекции  $\omega_k$  направлен по эйлеровой оси переориентации, определяемой кватернионом ошибки  $\mu(0)$ ; частота и начальная фаза колебаний объекта управления определяется параметрами системы ( $k, m$ ); переориентация объекта управления носит колебательный характер, причем при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mu(t) \rightarrow 1$ ,  $\omega_k(t) \rightarrow 0$ ; нормы кватерниона текущей ориентации  $\lambda$  и кватерниона ошибки ориентации  $\mu$  с течением времени стремятся к единице (кватернионы  $\lambda$  и  $\mu$  становятся нормированными).

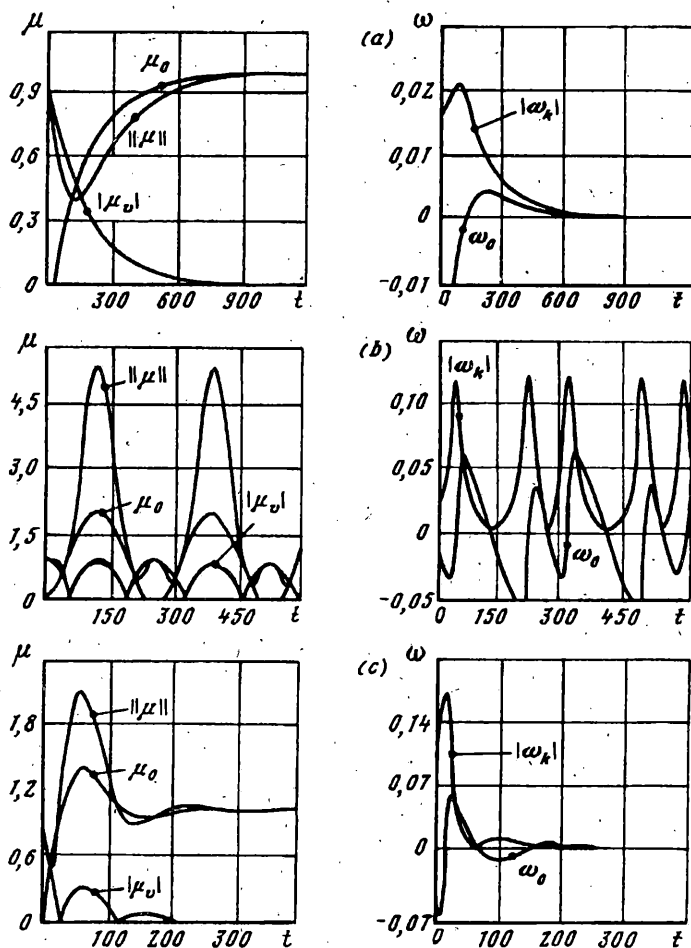
5. Численное исследование законов коррекции. Численное исследование алгоритмов кинематического управления проводилось путем интегрирования дифференциального уравнения [2] (5.1), которое описывает движение замкнутой системы «объект управления (твердое тело) + система управления ориентацией»

$$2\lambda = \lambda \circ \omega^\circ(t) + k(\lambda^\circ(t) - \lambda) + m \left( \int_{t_0}^t (1 - \lambda \circ \bar{\lambda}^\circ(\tau)) d\tau \right) \circ \lambda^\circ(t) \quad (5.1)$$

Интегрирование уравнения (5.1) проводилось методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности с шагом  $h = 0,01$  сек.

Результаты моделирования контрольных примеров  $N$ , числовые данные для





Фиг. 1

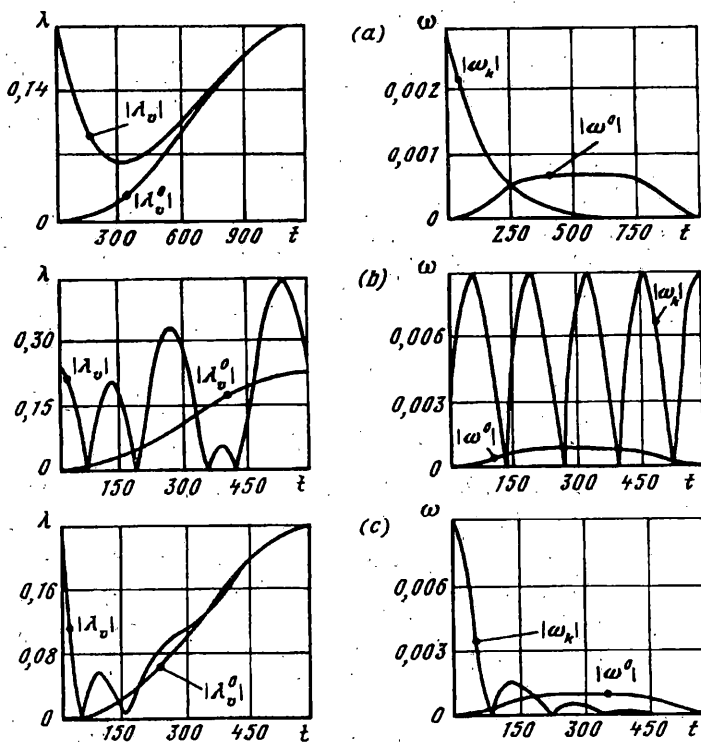
которых представлены в таблице, приведены на фиг. 1—3 ( $N_i$  — номера фигур). Параметр  $\varphi$ , фигурирующий в таблице, означает ошибку ориентации твердого тела в угловой мере для момента времени  $t = t_0$ .

На фиг. 1 и 3 представлены переходные процессы в системе управления угловым движением твердого тела для случая, когда  $\omega^\circ(t) = 0$ ,  $\lambda^\circ(t) = 1$  ( $t_0 \leq t \leq t_k$ ). Фиг. 2 иллюстрирует переходные процессы с учетом программного движения, которое строилось в виде плоского эйлера разворота и имело участки разгона, движения с постоянной скоростью и торможения. При этом ставилась задача переориентации твердого тела за конечный интервал времени, а для формирования зависимостей  $\lambda^\circ = \lambda^\circ(t)$  и  $\omega^\circ = \omega^\circ(t)$  использовались кубические сплайны.

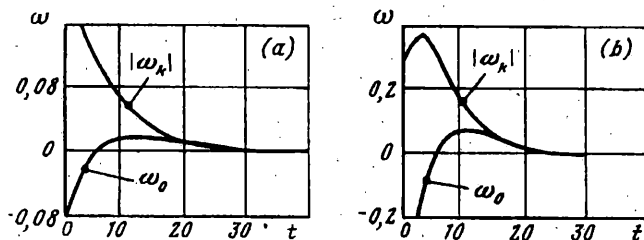
Значения коэффициентов коррекции выбирались таким образом, чтобы обеспечить определенное значение модуля  $|\omega_k|$  абсолютной угловой скорости коррекции  $\omega_k$ . Так, для вариантов моделирования, приведенных на фиг. 1, а, 3, а и 3, б, были заданы соответственно следующие значения величины  $|\omega_k|_{\max} = \omega^* : 1 \text{ град/с}, 10 \text{ град/с}, 20 \text{ град/с}$ .

Представленные на фиг. 1—3 графики показывают качественное совпадение полученных аналитически зависимостей с реакцией замкнутой системы.

**6. Алгоритм управления ориентацией.** На основании проведенных исследований



Фиг. 2



Фиг. 3

и моделирования можно предложить следующий алгоритм функционирования системы управления ориентацией твердого тела.

По измеренному вектору  $\omega_x$  абсолютной угловой скорости вращения твердого тела находим нормированный кватернион  $\lambda^n$ , определяющий ориентацию твердого тела в системе координат  $\xi$ . Для этого численно интегрируем в реальном масштабе времени кватернионное кинематическое уравнение

$$2(\lambda^n)' = \lambda^n \circ \omega_x \quad (6.1)$$

Находим скалярную  $\mu_0^n$  и векторную  $\mu_i^n$  части нормированного кватерниона  $\mu^n$  ошибки ориентации твердого тела:

$$\mu^n = \mu_0^n + \mu_i^n = \lambda^n \circ \bar{\lambda}^o \quad (6.2)$$

Вычисляем тензор  $\mu$  ненормированного кватерниона  $\mu$  ошибки ориентации, интегрируя в реальном масштабе времени уравнение

$$\mu' = 0,5\omega_0\mu \quad (6.3)$$

$$\omega_0 = k (\mu^{-2}\mu_0^n - 1) + m \text{sqal} \left( \left( \int_{t_0}^t (1 - \mu\mu^n) d\tau \right) \circ \mu^{-2}\mu^n \right)$$

Начальное условие интегрирования уравнения (6.3):  $\mu = 1$ .

Вычисляем проекции вектора корректирующей угловой скорости и вектора требуемой абсолютной угловой скорости твердого тела на оси связанной системы координат:

$$\omega_{kx} = \text{vect } \lambda^{-1} \circ \left[ k\lambda^\circ + m \left( \int_{t_0}^t (1 - \mu) d\tau \right) \circ \lambda^\circ \right]$$

$$\omega_x = \omega_{kx} + \omega_z^\circ, \quad \lambda = \mu\lambda^n$$

Процесс переориентации целесообразно разделить на два этапа. На первом этапе, используя соотношение (3.9), выбираем значение коэффициента коррекции  $m$ , а формирование вектора  $\omega_k$  корректирующей абсолютной угловой скорости на интервале времени  $[t_0, t^\circ]$  будем производить, используя интегральный закон коррекции вида (3.1). Второй этап переориентации начинается с момента времени  $t^\circ$  (т. е. при выведении твердого тела в окрестность нулевого значения величины  $\mu$ ). На этом этапе системой управления ориентацией твердого тела должен реализовываться либо позиционный закон коррекции вида (2.1) (в этом случае получаются эффективные с вычислительной точки зрения алгоритмы), либо интегрально-позиционный закон коррекции вида (4.1), который позволяет более точно обрабатывать ошибку ориентации объекта управления, но при этом требуется выполнить большее количество вычислений.

Программное движение твердого тела (кватернион программной ориентации твердого тела  $\lambda^\circ(t)$  и вектор программной абсолютной угловой скорости  $\omega^\circ(t)$ ) может быть построено различным образом в зависимости от требований к задаче переориентации. Это следует из того, что уравнение ошибок системы управления ориентацией для кватерниона рассогласования  $\mu$  инвариантно относительно программного движения [2].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Плотников П. К., Сергеев А. Н., Челноков Ю. Н. Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9—18.

Саратов

Поступила в редакцию  
4.III.1993