

УДК 531.39

© 1995 г. И. В. НОВОЖИЛОВ

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

Предлагается модель движения с проскальзыванием деформируемого колеса. Известные модели Келдыша, Гоздека и другие получаются из этой модели как частные предельные случаи.

Классическая модель абсолютно жесткого колеса с неголономными условиями непроскальзывания в точке контакта с опорной поверхностью работоспособна лишь в простейших случаях, например, для учебного примера с качением колеса, в задаче о «кинематическом влиянии» железнодорожной колесной пары и т. п. Для более сложных транспортных устройств, имеющих более одной колесной пары или для пневматических деформируемых колес классическая модель приводит к качественному отличию от эксперимента либо вообще дает переопределенную систему уравнений.

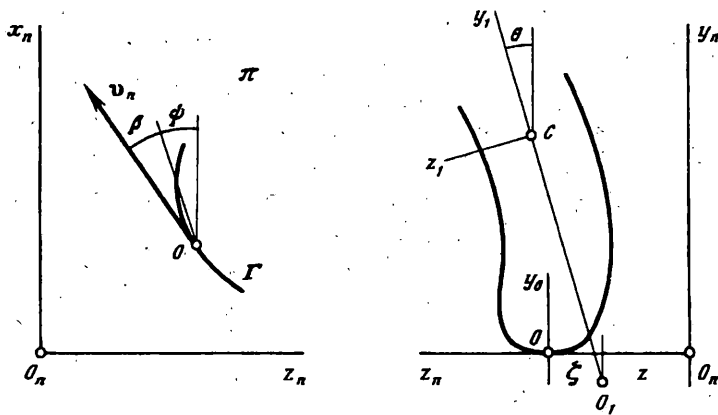
Выход из положения дается моделями качения Келдыша, Гоздека, Рокара, Левина — Фуфаева и др. [1]. В эти модели заложены следующие главные гипотезы: 1. В малой окрестности пятна контакта допускается деформация колеса; 2. Деформированное состояние характеризуется дискретным набором переменных; 3. Для сил, действующих на колесо со стороны опорной поверхности, постулируется статическая зависимость от составляющих деформации; 4. Постулируется «непроскальзывание» пятна контакта с поверхностью; 5. Условия непроскальзывания приводят к набору уравнений, число которых недостаточно для замыкания задачи. Задача доопределяется дополнительными, априорными соотношениями, связывающими кинематические параметры с составляющими деформации. В обоснование такого доопределения приводятся качественные, «физические» соображения. Константы в этих дополнительных уравнениях предлагается идентифицировать из эксперимента.

Указанные модели плодотворно используются в транспортной механике. Однако их нельзя применять для описания движений со скольжением пятна контакта — режимов пробуксовки, юза, заноса. Для этих случаев необходима модель движения деформируемого колеса, позволяющая проскальзывание. От такой модели естественно потребовать, чтобы в случае чистого качения она согласовывалась с моделями, освященными практикой и традицией, и чтобы в ее рамках получали механическую интерпретацию доопределяющие, физические соотношения, о которых говорилось выше.

Построим феноменологическую модель движения колеса, отвечающую этим требованиям. Опишем сначала модель Келдыша, вводя попутно необходимые понятия и обозначения.

Рассмотрим неподвижную плоскость Π , опорную для колеса (фиг. 1). Введем неподвижную правую, ортогональную систему координат $O_n x_n y_n z_n$. Координатная плоскость $O_n x_n z_n$ совпадает с плоскостью Π . Ось x_n направим по ходу движения, y_n — вверх, z_n — вправо по ходу.

Будем считать, что колесо состоит из жесткой, недеформируемой части — диска и деформируемой периферии — пневматика. Сечение внешней поверхности пневматика его продольной плоскостью симметрии называют средней линией поверхности качения. Если не учитывать рисунок протектора, то средняя линия в невозмущенном состоянии будет окружностью, которая касается плоскости Π в одной точке. Обозначим через O материальную точку колеса, совпадающую в данный момент времени с точкой касания. Введем линейный элемент средней линии в точке O . В невозмущенном состоянии он ориентирован по оси x_n . Обозначим через S точку пересечения продольной плоскости симметрии пневматика с осью вращения колеса. Введем трехгранник $Sx_1 y_1 z_1$, ось z_1 которого



Фиг. 1

совпадает с осью вращения. В невозмущенном положении трехгранники $x_n y_n z_n$ и $x_1 y_1 z_1$ ориентированы одинаково. Зададим в системе $Sx_1 y_1 z_1$ вектор $R = CO_1$ его длиной $CO_1 = R = \text{const}$ — радиусом колеса и полярным углом $\varphi = -\pi/2$ в плоскости $Sx_1 y_1$. В невозмущенном положении векторы CO_1 и CO совпадают. Возмущенное положение трехгранника $x_1 y_1 z_1$ зададим последовательными углами поворота ψ , $\chi = \theta$, переводящими ось z_n в положение z_1 (фиг. 1). Величины ψ , χ определяются углами поворота корпуса транспортного средства, углами поворота подвески. Нагрузим колесо внешними силами. Точечная зона контакта превратится в пятно. Возмущенное положение точки O называют центром пятна контакта.

В возмущенном положении вектор $R = CO_1$, связанный с диском, уже не совпадает с вектором CO . Как и в модели Келдыша, будем рассматривать боковое движение колеса. Зададим возмущенное положение точки O в боковом направлении координатой z точки O_1 и боковым смещением ζ точки O относительно точки O_1 , определяемым поперечной деформацией пневматика. Возмущенное положение линейного элемента средней линии в точке O зададим на плоскости Π углом поворота диска ψ и угловой деформацией β пневматика относительно диска (см. фиг. 1).

Формализуем основное допущение (4) модели Келдыша о непроскальзывании пятна контакта. Рассмотрим геометрическое место точек O' на плоскости Π , совпадающих в каждый момент времени с центром O пятна контакта, — линию качения пневматика Γ . В соответствии с гипотезами 1, 2, будем считать, что пятно контакта не проскальзывает в боковом направлении, если совпадают: координаты по оси z_n точек O и O' ; направления линейного элемента средней линии и касательной к линии Γ в точке O' ; угловые скорости вращения вокруг оси y_n линейного элемента и касательной. Тогда с погрешностью второго порядка малости по z , ζ , ψ , β , χ :

$$z' + \zeta' = -V(\psi + \beta) \quad (1)$$

$$\psi' + \beta' = -V/\rho \quad (2)$$

Здесь V — величина скорости точки O' вдоль кривой Γ , а ρ — радиус кривизны этой кривой в точке O' .

Переменные z , ψ , χ , V в (1), (2) определяются уравнениями остальных, помимо колеса, частей транспортного средства. Двумя уравнениями (1), (2) вводят три дополнительных переменные ζ , β , ρ . Для замыкания задачи в модели Келдыша принимается (по гипотезе 5) дополнительное доопределяющее соотношение [1, 2]:

$$1/\rho = -a_1 \zeta + a_2 \beta + a_3 \chi, \quad (a_1, a_2, a_3 = \text{const}) \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) дает

$$\psi' + \beta' = -V(-a_1\xi + a_2\beta + a_3\chi) \quad (4)$$

Уравнения (1), (4) замыкают задачу и позволяют определить деформации ξ , β , через которые (по гипотезе 3) выражаются силовые воздействия дороги на колесо.

Уравнения (1), (4) образуют два неинтегрируемых соотношения, которые называют уравнениями неголономных связей в модели Келдыша.

Дополним модель Келдыша следующим образом. Введем фиксированный по форме, малый по толщине геометрический элемент, прилегающий к плоскости П, связанный с пятном контакта пневматика, и целиком включающий пятно при возможных изменениях его размеров. Будем называть этот элемент контактным.

Введем трехгранник $Ox_0y_0z_0$, связанный с контактным элементом. Его начало поместим в центр пятна контакта, ось x_0 свяжем с линейным элементом средней линии, ось y_0 ориентирована по оси y_n . Возмущенное положение точки O определяется уравнением (см. фиг. 1):

$$CO = CO_1 + O_1O \quad (5)$$

Здесь $O_1O = \Delta(\xi, \eta, \zeta)$ — вектор линейной деформации пневматика, ξ, η, ζ — составляющие этого вектора в осях $x_0y_0z_0$. Вектор малого поворота ϵ , переводящий трехгранник $x_1y_1z_1$ к одинаковой ориентации с $x_0y_0z_0$ задает угловую деформацию пневматика. Обозначим через γ, β, α составляющие ϵ по осям $x_0y_0z_0$.

Определим кинематические связи, налагаемые на движение трехгранника $Ox_0y_0z_0$. Будем допускать проскальзывание контактного элемента по опорной плоскости. Потребуем безотрывного прилегания элемента к плоскости. Эти требования выполняются при

$$y_{0y_n} = 0, \quad \cos(y_0, x_n) = 0, \quad \cos(y_0, z_n) = 0 \quad (6)$$

Из (6) следуют кинематические уравнения

$$V_{0y_n} = 0, \quad \omega_{0x_0} = 0, \quad \omega_{0z_0} = 0 \quad (7)$$

Здесь $\omega_{0x_0}, \omega_{0z_0}$ — проекции абсолютной угловой скорости трехгранника $x_0y_0z_0$ на свои оси.

Распишем уравнения связей (6), (7) в явной форме. Примем традиционные в транспортной литературе допущения о малости величин $\psi, \chi, \psi', \chi', \beta, \beta', V_{cz_n}, \xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ и дополнительные допущения о малости γ, α . Величины γ', α' могут быть не малы из-за резких деформаций пневматика при пробегании пятна контакта по колесу. Дальнейшие выкладки будем делать с точностью до величин первого порядка малости по оговоренным переменным. Из условий (6) на направляющие косинусы, следует

$$\gamma + \chi = 0, \quad \alpha = 0 \quad (8)$$

Вектор ω_0 угловой скорости трехгранника $x_0y_0z_0$ определяется уравнением

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega + \epsilon' \quad (9)$$

где ω_1 — вектор угловой скорости трехгранника $x_1y_1z_1$, ω — собственной угловой скорости диска, ϵ' — угловой скорости деформации. Распишем (9) по осям $x_0y_0z_0$. Тогда

$$\omega_{0x_0} = \chi' - \omega_{z_1}\beta + \gamma', \quad \omega_{0y_0} = \psi' + \omega_{z_1}\gamma + \beta', \quad \omega_{0z_0} = \omega_{z_1} + \alpha' \quad (10)$$

Здесь ω_{z_1} — проекция вектора собственного вращения $\bar{\omega}$ на ось z_1 . Из (10) с учетом (8) получаются выражения для составляющих угловой скорости деформации

$$\gamma' = -\chi' + \omega_{z_1}\beta, \quad \alpha' = -\omega_{z_1}$$

Этими величинами определяется рассеяние энергии в материале пневматика за счет деформации. Из (10) с учетом (8) получим угловую скорость вращения контактного элемента

$$\omega_{\theta_{y_0}} = \psi' + \beta' - \omega_{z_1}\chi' \quad (11)$$

Уравнений (6) (или (7)) недостаточно для замыкания задачи. Получим доопределяющие уравнения.

Рассмотрим в рамках эйлерова формализма механическую систему, образованную материальными частицами пневматика, которые в данный момент времени находятся в геометрическом объеме контактного элемента. Запишем уравнения динамики для этой механической системы. Внешними для нее силами будут упругие силы взаимодействия с основным телом пневматика, силы нормального давления и силы трения со стороны опорной поверхности. По аналогии с гипотезами 1—3, будем считать, что эти силы выражаются через геометрические и кинематические переменные, определяющие положение и скорость контактного элемента.

* Считая массу и моменты инерции рассматриваемой системы малыми, пренебрежем в динамических уравнениях инерционными слагаемыми. Обоснование допустимости перехода от динамических к статическим уравнениям может быть проведено по методике фракционного анализа [3] при помощи аппарата сингулярно возмущенных систем. Основным условием допустимости этого перехода является требование сильного разнесения спектра высокочастотных собственных составляющих движения пневматика со спектром низкочастотных составляющих движения транспортного средства, которые предполагается исследовать при помощи данной модели колеса. Запишем указанные статические уравнения в проекциях на оси трехгранника $Ox_0y_0z_0$:

$$F_{x_0} + P_{x_0} = 0, \quad F_{y_0} + N = 0, \quad F_{z_0} + P_{z_0} = 0 \quad (12)$$

$$M_{x_0} - z_k N = 0, \quad M_{y_0} + z_k P_{x_0} - x_k P_{z_0} + L_{y_0} = 0, \quad M_{z_0} + x_k N + M_{kz} = 0$$

Здесь F_{x_0} , F_{y_0} , F_{z_0} и M_{x_0} , M_{y_0} , M_{z_0} — составляющие главного вектора и главного момента упругих сил. В качестве точки приведения для этих сил взята точка O . Через N обозначена величина равнодействующей сил нормальных реакций со стороны опорной поверхности, через x_k , z_k — координаты точки K , в которой приложена равнодействующая, P_{x_0} , P_{z_0} , L_{y_0} — составляющие главного вектора и главного момента сил трения, приводимых к точке K , а M_{kz} — составляющая момента трения качения. Для M_{kz} примем традиционное в литературе представление

$$M_{kz} = -\varphi_z N \operatorname{sign} \omega_{z_1} \quad (13)$$

где φ_z — коэффициент трения качения.

Для описания явлений в зоне контакта было введено шесть составляющих деформаций ξ , η , ξ , γ , β , α , две координаты x_k , z_k и две реакции N , M_{kz} — всего десять дополнительных неизвестных. Они связываются шестью уравнениями (12), тремя уравнениями связи (7) и уравнением (13). Следовательно, задача становится замкнутой.

При этом надо, разумеется, считать заданными зависимости всех сил и моментов, входящих в уравнения от перечисленных неизвестных.

Указанные зависимости определяются с трудом — и расчетно, и в эксперименте. Расчеты удастся довести до конца лишь для простейших моделей типа «нить», «brush — модель» [1, 6, 7]. Эксперимент сложен и обычно проводится для частных случаев движения [1, 4, 7, 8].

В дальнейшем будем задаваться силомоментными характеристиками достаточно простого вида, что уже позволит сделать ряд качественных выводов. При другом виде характеристик выкладки продельваются аналогично.

Относительно составляющих сил и моментов взаимодействия контактного элемента с пневматиком будем считать, что они зависят от одноименных составляющих деформации и не зависят от их скоростей

$$F_{x_0} = -F_x(\xi), \quad F_{y_0} = -F_y(\eta), \quad F_{z_0} = -F_z(\zeta) \quad (14)$$

$$M_{x_0} = -M_x(\gamma), \quad M_{y_0} = -M_y(\beta), \quad M_{z_0} = -M_z(\alpha)$$

Функции в (14) будем считать нечетными и обладающими требуемой далее степенью гладкости.

Обратимся к силам взаимодействия контактного элемента с опорной поверхностью. Записывая выражения для P_{x_0} , P_{z_0} , учтем следующие особенности пневматических шин [1, 4, 7, 8]: линия действия вектора силы трения не совпадает с вектором V_0 для неизотропных по фрикционным свойствам пневматиков, характеристика силы непрерывна, ограничена и проходит через нуль при $V_0/V_C = 0$; (V_0 , V_C — величины скоростей точек O и C). Эти особенности будут учтены, если принять

$$P_{x_0} = -f_x N \frac{V_{0x}}{V_0} p \left(\frac{V_0}{V_C} \right), \quad P_{z_0} = -f_z N \frac{V_{0z}}{V_0} p \left(\frac{V_0}{V_C} \right) \quad (15)$$

где $f_x \neq f_z$ — коэффициенты трения. Качественный вид функции $p(V_0/V_C)$ представлен на фиг. 2. Выражения для скоростей в (15) получим, продифференцировав (5) и проделав соответствующие выкладки с точностью до членов первого порядка

$$V_{0x_0} = V_{Cx_n} + \omega_{z_1} R + \xi$$

$$V_{0z_0} = V_{Cx_n}(\psi + \beta) + V_{Cx_n} + \omega_{z_1} R\beta - \chi R + \zeta \quad (16)$$

$$V_0 = (V_{0x_0}^2 + V_{0z_0}^2)^{1/2}$$

Для момента трения верчения примем зависимость [1, 7, 8]:

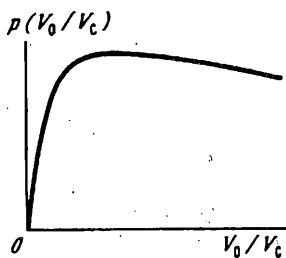
$$L_{y_0} = -\varphi_y N l_y(\omega_{y_0}, V_{0z_0}/V_C) \quad (17)$$

Здесь φ_y — коэффициент трения верчения, l_y — ограниченная функция требуемой гладкости.

Подставим (14), (15) в первое и третье уравнения из (12). В пятом уравнении из (12) исключим при помощи четвертого и шестого уравнений величины x_k , z_k , подставим выражения (13), (15), (17), учтем уравнения связей (8). В результате получим

$$-F_x(\xi) - f_x N \frac{V_{0x}}{V_0} p \left(\frac{V_0}{V_C} \right) = 0, \quad -F_z(\zeta) - f_z N \frac{V_{0z}}{V_0} p \left(\frac{V_0}{V_C} \right) = 0 \quad (18)$$

$$-M_y(\beta) + \frac{M_x(\chi)}{N} F_x(\xi) - \varphi_z \operatorname{sign} \omega_{z_1} \cdot F_z(\zeta) - \varphi_y N l_y \left(\omega_{y_0}, \frac{V_{0z_0}}{V_C} \right) = 0$$



Фиг. 2

Величина N в (18) находится из первого уравнения (6), второго — из (14) и второго — из (12).

Уравнения (18), дополненные (11), (16), определяют деформации ξ , ζ , β через параметры движения диска $V_{c_{x_n}}$, $V_{c_{z_n}}$, ω_{z_1} , ψ , χ . После этого величины продольной силы $F_{x_0} = -F_x(\xi)$, боковой $F_{z_0} = -F_z(\zeta)$ и восстанавливающего момента $M_{y_0} = -M_y(\beta)$ находятся по (14).

Рассмотрим частный, «келдышевский» случай движения, когда параметры продольного и вертикального движения изменяются медленно по сравнению с параметрами бокового движения. Корректное разделение этих движений может быть проведено так же, как в [5] для железнодорожного вагона. При этом в (18) примем $N \approx \text{const}$, равной вертикальной нагрузке на колесо, а также V_c , $\omega_{z_1} \approx \text{const}$ и $\omega_{z_1} = -\omega < 0$. Ограничимся линейными участками силомоментных характеристик, рассматривая малые значения их аргументов. Тогда уравнения (18), дополненные (11) и (16), примут вид

$$F_x^{\xi} \xi + P_x^V V_{0x_0} = 0, \quad F_z^{\zeta} \zeta + P_z^V V_{0z_0} = 0 \quad (19)$$

$$-M_y^{\beta} \beta + \frac{M_y^{\chi}}{N} P_{x_0} \chi + \varphi_z F_z^{\zeta} \zeta - L_y^{\omega} \omega_{y_0} - L_y^V V_{0z_0} = 0,$$

$$V_{0x_0} = V_{c_{x_n}} - \omega R + \xi^*, \quad V_{0z_0} = V_{c_{z_n}} (\psi + \beta) + V_{c_{z_n}} - \omega R \beta - \chi R + \zeta^*$$

$$\omega_{y_0} = \psi^* + \beta^* + \omega \chi$$

Здесь F_x^{ξ} , ..., L_y^V — соответствующие коэффициенты линеаризации.

Первое из уравнений (19) с точностью до обозначений совпадает с уравнением Гоздека, которое получается с помощью априорных доопределяющих соотношений [1]. Уравнением Гоздека описывается продольное движение.

Условие непроскальзывания Келдыша (1) для бокового движения можно получить из второго уравнения (19). Проведем в нем предельный переход $P_z^V \rightarrow \infty$. Тогда $V_{0z_0} \rightarrow 0$, так что произведение $P_z^V V_{0z_0}$ остается равным конечной боковой силе $-F_z^{\zeta}$. Предельное уравнение $V_{0z_0} = 0$ совпадает с (1), если слагаемому z^* из (1) сопоставить слагаемое $V_{c_{z_n}} - \omega R \beta - \chi R$ из (19), равное соответствующей проекции скорости точки O_1 .

Третье уравнение из (19) при $V_{0z_0} = 0$, $P_{x_0} = \text{const}$ с точностью до обозначений совпадает с доопределяющим соотношением (4) Келдыша. Априорно задаваемые коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 из (4) теперь выражаются из (19) через силовые и кинематические характеристики системы.

Из (19) видно, что движение системы по составляющим деформации ξ , ζ , β описывается уравнениями аperiодических звеньев, по отношению к которым движение диска выступает как возмущение. Постоянные времена этих звеньев $\tau_{\xi} = P_x^V / F_x^{\xi}$, $\tau_{\zeta} = P_z^V / F_z^{\zeta}$, $\tau_{\beta} = L_y^{\omega} / M_y^{\beta}$ могут принимать различные значения в зависимости от величин коэффициентов жесткости и трения. Соответственно, из (19) могут быть получены различные варианты моделей качения. При τ_{ξ} , $\tau_{\zeta} \rightarrow 0$ из (19) следуют уравнения моделей Рокара и крипа, при $\tau_{\xi} \rightarrow \infty$ — уравнение (1) модели Келдыша. Любопытно, что постоянные времена этих звеньев могут оставаться конечными и при традиционном предельном переходе к модели абсолютно жесткого колеса с непроскальзыванием, если коэффициенты жесткости и трения устремляются к бесконечности так, что их отношение остается конечным.

Уравнения (19) получены из (18) для линейных участков характеристик сил

и моментов. При выходе системы на существенно нелинейные участки характеристик вместо (19) надо возвращаться к исходным уравнениям (18). Эти нелинейные уравнения представляют собой неинтегрируемые соотношения, связывающие переменные задачи. С тем же этимологическим основанием, что и (1), (4), они могут быть названы уравнениями неголономных, на этот раз нелинейных, связей.

В классической механике почти на уровне постулата утвердилось мнение о невозможности нелинейных неголономных связей. Поэтому высказанное только что утверждение следует обсудить особо.

В классической механике неголономные связи налагаются на систему с конечной размерностью пространства конфигураций. Наложение связей не изменяет размерности этого пространства и не изменяет матрицу инерционных коэффициентов, определяющую метрику пространства [9—11].

Линейность неголономных связей в классической механике определяется тем, что обсуждаемые в литературе связи имеют кинематический характер — запреты на те или иные взаимные движения тел. В силу линейности теоремы сложения скоростей любые ограничения на относительные скорости имеют линейную структуру.

В обсуждаемой задаче о качении колеса исходная механическая система бесконечномерна за счет пневматика. Конечномерной задачу позволяет сделать предположение о малости зоны контакта. Отсюда же следует возможность пренебрежения массой контактного элемента и корректность сингулярного вырождения динамических уравнений контактного элемента к квазистатическим уравнениям. Полученные таким способом соотношения — это, вообще говоря, неинтегрируемые уравнения первого порядка, которые при их линеаризации совпадают с так называемыми уравнениями неголономных связей теории качения. Линейность или нелинейность этих квазистатических уравнений — обстоятельство совершенно не принципиальное, зависящее лишь от вида силовых характеристик.

Задание обобщенных координат для контактного элемента расширяет размерность конфигурационного пространства системы с жестким колесом. Сингулярное пренебрежение массой контактного элемента вырождает матрицу коэффициентов инерции системы в этом пространстве. Получившиеся квазистатические уравнения можно, таким образом, трактовать как уравнения связей, налагаемых на систему в расширенном конфигурационном пространстве с метрикой, определяемой вырожденной матрицей.

Похожие ситуации известны давно в электро- и радиопизике [12]. Вырождения по малым индуктивностям приводят там к моделям с «половинными» степенями свободы — прямым аналогам моделей, обсуждаемых выше.

В механике типичным примером неголономных зависимостей, получающихся при сингулярном вырождении матрицы коэффициентов инерции, могут служить прецессионные соотношения. Понятия вида «неголономная связь», «неголономное движение» широко используются в гироскопической литературе [13].

В динамике полета при изучении траекторных движений уравнения углового движения самолета обычно записываются в форме уравнений квазистатического баланса моментов аэродинамических и прочих сил. Эти «балансирующие» уравнения также имеют неголономную структуру, и они квадратичны по скорости движения центра масс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин М. А., Фуфаева Н. А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 269 с.
2. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
3. Новожилов И. В. Фракционный анализ. М.: Изд. МГУ, 1991. 189 с.
4. Эллис Д. Р. Управляемость автомобиля. М.: Машиностроение, 1975.
5. Новожилов И. В. Разделение движений рельсового экипажа // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 55—59.

6. Вильке В. Г. О качении вязкоупругого колеса//Изв. АН МТТ. 1993. № 6. С. 11—15.
7. Расајка Н. В. Lateral dynamics of road vehicles. Vehicle system dynamics. 1987. V. 16. P. 75—120.
8. Динамика системы дорога — шина — автомобиль — водитель/Под ред. А. А. Хачатурова. М.: Машиностроение, 1976. 535 с.
9. Лурье А. И. Аналитическая механика. Т. 2. М.: ГИФ — МЛ, 1961. 824 с.
10. Калинин В. В., Новожилов И. В. О необходимых и достаточных условиях реализуемости неголономных связей силами кулонова трения//Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 15—19.
11. Карапетян А. В. О реализуемости неголономных связей и об устойчивости кельтских камней//ПММ. 1981. Т. 44. Вып. 1. С. 42—51.
12. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
13. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд. АН СССР, 1963. 482 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.XII.1993