

УДК 624.072.4

© 1995 г. С. А. КУЛИЕВ

ИЗГИБ КРУГЛОГО КОЛЬЦЕВОГО БРУСА С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Рассматривается задача поперечного изгиба круглого кольцевого бруса (т. е. изгиб консольной балки) с двумя прямолинейными разрезами выходящими на внутренний контур L_1 (окружность радиуса r). Радиус внешней окружности L_2 обозначим через R .

Поперечное сечение рассматриваемого бруса обозначим через S , направим оси x и y так чтобы изгибающая сила P , приложенная в конце бруса, совпадала с направлением оси абсцисс x , а прямолинейные разрезы лежали на оси ординат y . Концевые точки разреза обозначены через $\pm ie$.

Как известно [1, 2, 4] задача изгиба призматических брусков сводится к определению функции $\varphi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, удовлетворяющая граничным условиям

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(\bar{t})} = f_j(t) + C_j \quad \text{на } L_j \quad (j = 1, 2)$$

где t — аффикс точек контура L_j , ν — коэффициент Пуассона, C_j — некоторые вещественные постоянные. Одну из них, например C_2 примем равной нулю, а другая постоянная C_1 , подлежит определению.

Правая часть равенства (1) имеет вид:

$$f_j(t) = - (2 - \nu) \frac{1}{3} y^3 - \nu x^2 y + 4(1 + \nu) \int_{L_j} xy dx$$

Интеграл в $f_j(t)$ берется по всему контуру L_j (либо по окружности L_2 либо по окружности с прямолинейными разрезами L_1). Решение задачи можно получить двумя способами (ниже рассматриваются оба этих приема).

1. Следуя [3, 4], регулярную в области s функцию $\varphi(z)$ представим в следующей форме:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \xi^{-n} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad (1.1)$$

Значение функции $\varphi(z)$ на внутреннем контуре L_1 имеет вид

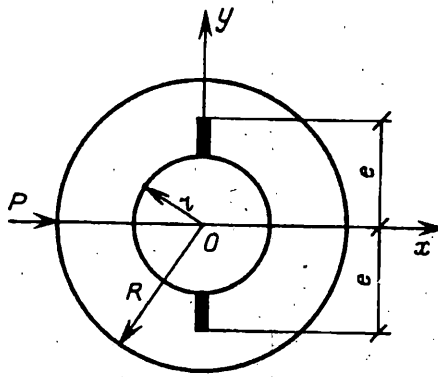
$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \tau^{-n} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{t_1}{R}\right)^k \quad (1.2)$$

Внешность внутреннего контура L_1 (т. е. окружность с двумя прямолинейными разрезами) отображается на внешность единичной окружности τ в плоскости ξ , с помощью функции [4]:

$$t_1 = r\tau \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^{-n} \quad (1.3)$$

Значение всех величин γ_{n-1} определяются согласно формулы (если сила P направлена так как на фигуре):

$$\gamma_{n-1} = i\gamma_{n-1}^*$$



$$\gamma_{n-1}^* = \sum_{k=0}^n 2\lambda (-1)^{1/2k} C_{1/2}^{1/2k} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-k} C^{1/2(n-k)} \quad (1.4)$$

Функция обратная с отображающей функции (1.3) имеет вид [5]:

$$\xi = \chi(t) = \frac{z}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n-1} \left(\frac{r}{z}\right)^n \quad (1.5)$$

$$\delta_{n-1} = \sum_{k=0}^n 2\lambda (-1)^{1/2k} C_{1/2}^{1/2k} \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{1-k} C_{1-k}^{1/2(n-k)}$$

$$\lambda = 1 \quad (k=0); \quad \lambda = 1/2 \quad (k \neq 0)$$

Таким образом, функция $\varphi(z)$ на внутреннем контуре L_1 с учетом отображающей функции (1.3) может быть представлена в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \tau^n + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k R^{-k} \left[r \tau \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^{-n} \right]^k$$

или

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \tau^n + \sum_{n=0}^{\infty} N_1(n) \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} N_2(n) \tau^n \quad (1.6)$$

Значение функции $\varphi(z)$ на внешнем контуре L_2 (т. е. на окружности радиуса R) после несложных выкладок, имеет вид

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} N_3(n) \left(\frac{R}{t}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\frac{t}{R}\right)^n \quad (1.7)$$

В формулах (1.5) и (1.7) введены обозначения:

$$N_1(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \beta_k \left(\frac{r}{R}\right)^k \gamma_{-1}^k g_{k-n}^{(k)}, \quad N_2(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{r}{R}\right)^k \gamma_{-1}^k g_{k+n}^{(k)},$$

$$N_3(n) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (\delta_{-1})^{-n} L_{n-k}^{(k)} \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в соответствующие граничные условия после несложных математических выкладок, получаем следующие системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_k и β_k :

$$\alpha_n + \overline{N_1(n)} + N_2(n) = \frac{2\nu - 1}{2} i r^3 \left[\gamma_{-1}^3 g_{n+3}^{(3)} - (\overline{\gamma_{-1}})^3 \overline{g_{3-n}^{(3)}} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} i^3 [\gamma_{-2}^2 V_3(n+1) - (\bar{\gamma}_{-1})^2 V_5(n-1)] \\
N_1(n) + \bar{\alpha}_n + \overline{N_2(n)} & = \frac{2\nu-1}{12} i^3 [\gamma_{-1}^3 g_3^{(3)} \varepsilon_1 - (\bar{\gamma}_{-1})^3 \bar{g}_{n+3}^{(3)}] + \\
& + \frac{1}{4} i^3 [\bar{\gamma}_{-1}^2 V_3(1) \varepsilon_2 + \gamma_{-1}^2 V_4(n-1) - (\bar{\gamma}_{-1})^2 V_6(n+1)] \quad (1.8)
\end{aligned}$$

$$V_1(k) = \sum_{n=0}^k g_n^{(2)} \gamma_{k-n-1}(n-k), \quad V_2(k) = \sum_{n=0}^k \bar{g}_n^{(2)} (k-n-1) \bar{\gamma}_{k-n-1} \quad (1.9)$$

$$V_3(k) = \sum_{n=k}^{\infty} g_n^{(2)} \bar{\gamma}_{n-k-1}, \quad V_4(k) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(3)} \bar{\gamma}_{k+n-1}$$

$$V_5(k) = \sum_{n=k}^{\infty} \bar{g}_{n-k}^{(2)} \gamma_{n-1}, \quad V_6(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}_{n+k}^{(2)} \gamma_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + N_1(0) + \bar{\alpha}_0 + \overline{N_1(0)} & = \frac{2\nu-1}{12} i^3 [\gamma_{-1}^3 g_3^{(3)} - (\bar{\gamma}_{-1})^3 \bar{g}_3^{(3)}] + \\
& + \frac{1}{4} i^3 [\gamma_{-1}^2 V_3(1) - (\bar{\gamma}_{-1})^2 V_6(1)] - \frac{1+\nu}{2} i^3 [\gamma_{-1}^2 V_1(3) 2\pi i - \\
& - (\bar{\gamma}_{-1})^2 V_2(3) 2\pi i - (\bar{\gamma}_{-1})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}_n^{(2)} (-n) \gamma_n 2\pi i + \gamma_{-1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(2)} (n-2) \bar{\gamma}_{n-2} 2\pi i] \quad (1.10)
\end{aligned}$$

$$\beta_n + \overline{N_3(n)} = iR^3 [-1/4 \varepsilon_3 + 1/4 (3+2\nu) \varepsilon_1] \quad (1.11)$$

$$N_3(n) + \bar{\beta}_n = iR^3 [1/4 \varepsilon_3 - 1/4 (3+2\nu) \varepsilon_1], \quad \beta_0 + \bar{\beta}_0 + N_3(0) + \overline{N_3(0)} = 0$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 3 \\ 1 & \text{при } n \geq 3 \end{cases}, \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1 \\ 0 & \text{при } n \neq 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{3,4} = 1 \text{ при } n = 3, \quad \varepsilon_{3,4} = 0 \text{ при } n \neq 3$$

Удерживая первые несколько членов из каждой пары уравнений (1.8) и (1.11) и решая их совместно, находим неизвестные коэффициенты α_k и β_k , а тем самым регулярную функцию $\varphi(z)$.

Далее по известным формулам определяем компоненты касательных напряжений τ_{xz_1} и τ_{yz_1} в характерных точках, сечениях и разрезах [1—3]:

$$\tau_{xz_1} - i\tau_{yz_1} = -\frac{P}{2(1+\nu)J} \left\{ i\varphi'(z) + \frac{1}{4} [(1+2\nu)\bar{z}^2 - (3z^2 - 2z\bar{z})] \right\} \quad (1.12)$$

$$J = J_y = \int \int_S x^2 dx dy = \frac{1}{3} \left[\int_{L_2} x^3 dy - \int_{L_1} x^3 dy \right] \quad (1.13)$$

где J — момент инерции сечения относительно оси y , нормальной к направлению силы P , изгибающий брус.

2. Далее рассмотрим второй метод решений этой задачи.

Следуя [3, 4] введем на внешнем контуре L_2 (т. е. на окружности радиуса R) вспомогательную чистомнимую функцию $\omega(t)$, удовлетворяющую условию

$$\varphi(t) - \overline{\varphi(\bar{t})} = 2\omega t \text{ на } L_2 \quad (2.1)$$

Сложив почленно сумму и разность функций $\varphi(t)$ и $\overline{\varphi}(t)$ будем иметь

$$\varphi(t_2) = \omega(t_2) + \frac{1}{2}f_2(t_2) \quad \text{на } L_2 \quad (2.2)$$

На основании свойств интеграла Коши равенство (2.2) можно записать в следующей форме [4, 5]:

$$\begin{aligned} \varphi(t_{02}) - \lim_{z \rightarrow t_{02}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_2) + \frac{1}{2}f_2(t_2)}{t_2 - z} dt_2 = \\ = - \lim_{z \rightarrow t_{02}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_2) + \frac{1}{2}f_2(t_2)}{t_2 - z} dt_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где в первом интеграле $z = t_{02}$ изнутри L_2 , а во втором $z \rightarrow t_{02}$ извне L_2 .

Введем новую регулярную в области S функцию $F(z)$ согласно условию [3, 4]:

$$F(z) = \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_2) + \frac{1}{2}f_2(t_2)}{t_2 - z} dt_2. \quad (2.4)$$

Функция $F(z)$ в силу правой части равенства (2.4) аналитически продолжима вне контура L_2 . Таким образом, функция регулярна всюду вне внутреннего контура L_1 (стало быть, и на внешнем контуре L_2 тоже) и обращается в нуль на бесконечности. На внутреннем контуре L_1 в силу равенства (2.4) функция $\varphi(z)$ примет следующее значение:

$$\varphi(t_1) = F(t_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_2) + \frac{1}{2}f_2(t_2)}{t_2 - t_1} dt_2 \quad (2.5)$$

где t_1 — аффикс точек внутреннего контура L_1 , t_2 — аффикс точек внешнего контура L_2 .

Значение функции $\varphi(z)$ на внешнем контуре L_2 будет иметь следующий вид (отметим, что при $z \rightarrow t_{02}$ изнутри L_2 из-под интеграла выходит главная часть функции):

$$\begin{aligned} \varphi(t_{02}) = F(t_{02}) + \frac{1}{2}\omega(t_{02}) + \frac{1}{4}f_2(t_{02}) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_2) + \frac{1}{2}f_2(t_2)}{t_2 - t_{02}} dt_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $z \rightarrow t_{02}$ изнутри L_2 .

Подставляя в граничное условие (на L_1) равенство (2.5) и сопряженное с ним выражение, получим

$$\begin{aligned} F(t_1) + \overline{F(t_1)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_2) + \frac{1}{2}f_2(t_2)}{t_2 - t_1} dt_2 - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{\omega(t_2)} + \frac{1}{2}\overline{f_2(t_2)}}{\overline{t_2} - \overline{t_1}} d\overline{t_2} = f_1(t_1) + C_1 \quad \text{на } L_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Поскольку $\omega(t_2) = -\overline{\omega(t_2)}$ и $f_2(t_2) = -\overline{f_2(t_2)}$, то введя функционалы

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t_2)}{t_2^{k+1}} dt_2, \quad \overline{\varepsilon}_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{\omega(t_2)}}{(\overline{t_2})^{k+1}} d\overline{t_2} \quad (2.8)$$

граничное условие (2.7) приводится к виду

$$F(t_1) + \overline{F(t_1)} = f_1(t_1) - \sum_{k=0}^{\infty} [\varepsilon_k t_1^k + \bar{\varepsilon}_k (\bar{t}_1)^k] - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{1}{2} f_2(t_2) \left[\left(\frac{t_1}{t_2} \right)^k \frac{dt_2}{t_2} - \left(\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_2} \right)^k \frac{d\bar{t}_2}{\bar{t}_2} \right] + C_1 \text{ на } L_1 \quad (2.9)$$

После преобразований получим

$$F(t_1) + \overline{F(t_1)} = \frac{2\nu - 1}{12} i r^3 \left[\gamma_{-1}^3 \tau^3 \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(3)} \tau^{-3} - (\bar{\gamma}_{-1})^3 \tau^{-3} \times \right. \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}_n^{(3)} \tau^n \left. \right] + \frac{1}{4} i r^3 \left[\gamma_{-1}^2 \tau \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} T_3(n) + \right. \\ \left. + \gamma_{-1}^2 \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n T_4(n) - (\bar{\gamma}_{-1})^2 \tau^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} T_5(n) - \right. \\ \left. - (\bar{\gamma}_{-1})^2 \tau^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n T_6(n) \right] - \frac{1 - \nu}{2} i r^3 \left[\gamma_{-1}^3 T_7(3) 2\pi i - \right. \\ \left. - (\bar{\gamma}_{-1})^2 T_8(3) 2\pi i - (\bar{\gamma}_{-1})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}_n^{(2)} (-n) \gamma_{-1} 2\pi i + \right. \\ \left. + \gamma_{-1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(2)} (n - 2) \bar{\gamma}_{-1} 2\pi i \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[r \tau \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k-1} \tau^{-k} \right]^n - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varepsilon}_n \left[r \tau^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\gamma}_{k-1} \tau^k \right]^n + \frac{1}{8} \left[r \tau \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^{-n} \right]^3 - \\ - \frac{3 + 2\nu}{8} i R^2 r \tau \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^{-n} - \frac{1}{8} \left[r \tau^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}_{n-1} \tau^n \right]^3 + \\ + \frac{3 + 2\nu}{8} i R^2 r \tau^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}_{n-1} \tau^n + C_1 \text{ на } L_1 \quad (2.10)$$

Согласно работам [2, 3, 4], функцию $F(z)$, регулярную всюду вне внутреннего контура L_1 вне единичной окружности в плоскости ξ , представим в следующей форме:

$$F(t_1) = F^*(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \tau^k \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в равенство (2.10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ , получим следующие системы уравнений:

$$D_k = \frac{2\nu - 1}{12} i r^3 \left[\gamma_{-1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+3}^{(3)} - (\bar{\gamma}_{-1})^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{g}_{3-k}^{(3)} \varepsilon_k \right] + \\ + \frac{1}{4} i r^3 \left[\gamma_{-1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_3(k+1) - (\bar{\gamma}_{-1})^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_5(k-1) \right] - \overline{T_1(k)} -$$

$$\begin{aligned}
& -T_2(k) + \frac{i}{8} r^3 \gamma_{-1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+3}^{(3)} - \frac{3+2\nu}{8} iR^2 r \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\gamma}_k + \\
& + \frac{1}{8} i r^3 (\bar{\gamma}_{-1})^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{g}_{k+3}^{(3)} - \frac{3+2\nu}{8} iR^2 r \bar{\gamma}_{-1} \varepsilon_2' \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_k &= \frac{2\nu-1}{12} i r^3 \left[\gamma_{-1}^3 g_{3-k}^{(3)} \varepsilon_k' - (\bar{\gamma}_{-1})^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{g}_{k+3}^{(3)} \right] + \\
& + \frac{1}{4} i r^3 \left[\gamma_{-1}^2 T_3(0) \varepsilon_2' + \gamma_{-1}^2 \sum_{k=2}^{\infty} T_4(k) \varepsilon_3' - (\bar{\gamma}_{-1})^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_6(k+1) \right] - T_1(k) - \overline{T_2(k)} + \\
& + \frac{i}{8} r^3 \gamma_{-1}^3 g_{3-k}^{(3)} \varepsilon_k' - \frac{3+2\nu}{8} iR^2 r \gamma_{-1} \varepsilon_2' + \frac{1}{8} i r^3 (\bar{\gamma}_{-1})^3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{g}_{k+3}^{(3)} - \frac{3+2\nu}{8} iR^2 r \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\gamma}_k \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$T_1(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k r^k \gamma_{-1}^k g_{k-n}^{(k)}, \quad \overline{T_1(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\varepsilon}_k r^k (\bar{\gamma}_{-1})^k \bar{g}_{k-n}^{(k)}$$

$$T_2(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n r^n \gamma_{-1}^n g_{k+n}^{(n)}, \quad \overline{T_2(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varepsilon}_n r^n (\bar{\gamma}_{-1})^n \bar{g}_{k+n}^{(n)}$$

$$T_3(k) = \sum_{n=k}^{\infty} g_n^{(2)} \bar{\gamma}_{n-k-1}, \quad T_4(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}_n^{(2)} \gamma_{k+n-1}$$

$$T_5(k) = \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_{n-1} \bar{g}_{n-k}^{(2)}, \quad T_6(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \bar{g}_{n-k}^{(2)}$$

Для свободных членов (т. е. коэффициентов при нулевой степени переменной τ) получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
D_0 + \bar{D}_0 &= \frac{2\nu-1}{12} i r^3 \left[\gamma_{-1}^3 g_3^{(3)} - (\bar{\gamma}_{-1})^3 \bar{g}_3^{(3)} \right] + \\
& + \frac{i}{4} r^3 \left[\gamma_{-1}^2 T_3(1) - (\bar{\gamma}_{-1})^2 T_6(1) \right] - \frac{1+\nu}{2} i r^3 \left[\gamma_{-1}^3 T_7(3) \times \right. \\
& \times 2\pi i - (\bar{\gamma}_{-1})^2 T_8(3) 2\pi i - (\bar{\gamma}_{-1})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}_n^{(2)} (-n) \gamma_n 2\pi i + \\
& + \gamma_{-1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(2)} \bar{\gamma}_{n-2} 2\pi i \left. \right] - T_1(0) - \overline{T_1(0)} + \frac{1}{8} i r^3 \gamma_{-1}^3 g_3^{(3)} - \frac{3+2\nu}{8} iR^2 r \gamma_0 + \\
& + \frac{1}{8} r^3 (\bar{\gamma}_{-1})^3 \bar{g}_3^{(3)} - \frac{3+2\nu}{8} iR^2 r \bar{\gamma}_0 + C_1
\end{aligned}$$

$$T_7(k) = \sum_{n=0}^k g_n^{(2)} \gamma_{k-n-1} (n-k), \quad T_8(k) = \sum_{n=0}^k \bar{g}_n^{(2)} (k-n-1) \bar{\gamma}_{k-n-1}$$

Далее преобразуем граничное условие на внешнем контуре L_2 (т. е. на окружности радиуса R).

Вспомогательную чисто мнимую функцию $\omega(t_2)$ можно представить в виде [3, 4]:

$$\omega(t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{t_2}{R} \right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_k \left(\frac{R}{t_2} \right)^k \quad (2.14)$$

Причем установлено, что $d_k = -\bar{d}_k$. Подставляя значение функции $\varphi(t_2)$ на внешнем контуре L_2 , определяемая равенством (2.6), в (2.1) (можно было и в (1)) с учетом равенств (2), (2.11) и (2.14) получено:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k \tau^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{D}_k \tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left[\left(\frac{t_2}{R} \right)^k + \left(\frac{R}{t_2} \right)^k \right] - iR^3 \left[-\frac{1}{8} \left(\frac{t_2}{R} \right)^3 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{t_2} \right)^3 + \frac{3+2\nu}{8} \left(\frac{t_2}{R} - \frac{R}{t_2} \right) \right] \text{ на } L_2 \quad (2.15)$$

С учетом функции (1.5), обратной к отображающей, можно преобразовать суммы, входящие в левые части равенства (2.15). Тогда приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t_2/R , получим следующие системы:

$$E_k = d_k - \frac{1}{8} iR^3 \varepsilon_4' - \frac{1}{8} (3+2\nu) iR^3 \varepsilon_2' \quad (2.16)$$

$$-\bar{E}_k = d_k + \frac{1}{8} iR^3 \varepsilon_4' + \frac{1}{8} (3+2\nu) iR^3 \varepsilon_2' \quad (2.17)$$

$$E_n = \sum_{k=0}^n D_k \delta_{-k} L_{n-k}^{(k)} \left(\frac{r}{R} \right)^n, \quad \bar{E}_n = \sum_{k=0}^n \bar{D}_k (\delta_{-1})^{-k} \bar{L}_{n-k}^{(k)} \left(\frac{r}{R} \right)^n$$

$$\varepsilon_1' = \begin{cases} 0 & \text{при } k \geq 3 \\ 1 & \text{при } k < 3 \end{cases}, \quad \varepsilon_2' = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 1 \\ 1 & \text{при } k = 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_3' = \begin{cases} 0 & \text{при } k < 2 \\ 1 & \text{при } k \geq 2 \end{cases}, \quad \varepsilon_4' = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 3 \\ 1 & \text{при } k = 3 \end{cases}$$

Причем все величины $L_n^{(k)}$ определяются согласно условию [4]:

$$L_n^{(k)} + \frac{1}{h_0^{(k)}} \sum_{n_1=1}^n L_{n-n_1}^{(k)} h_{n_1}^{(k)} = 0, \quad h_n = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{-1}} \quad (2.18)$$

Для свободных членов (коэффициентов при нулевой степени t_2/R) будем иметь $E_0 - \bar{E}_0 = 2d_0$.

Значения величин $g_n^{(k)}$, $h_n^{(k)}$ ($k = 2, 3, \dots$) определяются согласно рекуррентной формулы [3, 4]:

$$a_n^{(k)} = \sum_{n_1=0}^n a_{n_1}^{(1)} a_{n-n_1}^{(k-1)} \quad (2.19)$$

Первые 10 значений $a_n^{(k)}$ ($n = 1-10$, $k = 1-9$) приведены в [4].

Анализ систем (2.12) и (2.13), а также (2.16) и (2.17) показал, что они идентичны, поэтому из каждой пары (2.12), (2.13) и (2.16), (2.17) уравнений можно взять по одному уравнению, например (2.12) и (2.16).

Удерживая несколько первых членов из систем уравнений (2.12), (2.16) и решая их совместно, находим искомые коэффициенты D_k и d_k .

После определения коэффициентов D_k и d_k можно по формулам (2.4) и (2.11) с учетом (2.14) найти функции $\varphi(z)$ и $F(z)$; затем определяются компоненты касательных напряжений τ_{xz_1} и τ_{yz_1} в характерных точках сечения бруса. Зная компоненты касательных напряжений τ_{xz_1} и τ_{yz_1} , можно найти коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), т. е. K_3 в вершинах трещины. При изгибе призматических брусков с прямолинейной сквозной трещиной, очевидно имеет место деформация продольного изгиба, возникающая при так называемой антиплоской деформации. Под антиплоской деформацией понимается напряженное

состояние в цилиндрическом теле, вызванное нагрузками направленными вдоль образующих цилиндра и постоянными вдоль них.

В случае антиплоской деформации отличными от нуля будут компоненты касательных напряжений τ_{xz_1} и τ_{yz_1} (ось z_1 направлена вдоль оси симметрии бруса и перпендикулярна плоскости oxy), а также перемещение $w = w(x, y)$ вдоль оси призматического тела.

Вблизи вершины-разреза (т. е. локальной близости точек $\pm ie$) указанные величины τ_{xz_1} , τ_{yz_1} и w в полярных координатах ρ, θ запишутся так [4, 5]:

$$\tau_{xz_1} = \frac{K_3}{\sqrt{2\rho}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tau_{yz_1} = \frac{K_3}{\sqrt{2\rho}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad w = \frac{K_3}{G} \sqrt{2\rho} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.20)$$

где K_3 — коэффициент интенсивности напряжений вблизи вершины трещины-дефекта продольного сдвига ($\rho \ll l$) $l = e - r$ — длина трещины.

Иногда для определения K_3 удобно использовать непосредственно следующую формулу:

$$K_3 = iG \frac{F'(\tau_0)}{\sqrt{\omega''(\tau_0)} e^{-\theta}} \quad (2.21)$$

Здесь G — модуль сдвига, $\tau_0 = e^{i\theta}$ — отображающая функция, $z = \omega(\tau_0)$ — точки единичной окружности в плоскости ξ , соответствующие вершинам (т. е. точкам $\pm ie$) дефекта трещины согласно преобразованию $z = l + z_1 e^{i\theta}$, θ — угол между осью ou и полярной осью локальной системы координат (началом в вершине трещины).

Следует также отметить, что для трещины продольного сдвига эффект от наличия свободной границы отсутствует: коэффициент K_3 для центрально расположенной и поверхностной трещины совпадают. В то же время КИН, т. е. K_1 и K_2 например, у края полуплоскости на 12% больше, чем K_1 и K_2 для изолированной трещины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М.: Высш. шк., 1976. 272 с.
2. Мухелишвели Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. Шерман Д. И. Изгиб поперечной силой эллиптического бруса, ослабленного продольно круговой цилиндрической полостью//Инж. сб. 1953. Т. 17. С. 121—150.
4. Кулиев С. А. Двумерные задачи теории упругости. М.: Стройиздат, 1991. 349 с.
5. Си Г. Распределение напряжений вблизи концов трещины продольного сдвига//Прикл. механика. Сер. Е. 1965. Т. 32. № 1. С. 57—65.

Баку

Поступила в редакцию
19.X.1993