МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1995

УДК 531.38

© 1995 г. А. А. БУРОВ, А. В. КАРАПЕТЯН

О ДВИЖЕНИИ КРЕСТООБРАЗНЫХ ТЕЛ

Известно [1—3], что равенство главных центральных моментов инерции твердого тела определяет наличие у него определенных динамических свойств, в общем случае не известных в динамике твердого тела с различными моментами инерции. Исследование этих свойств, обычно, осуществляется за счет более точного учета структуры сил, действующих на тело. В частности, для задачи о движении твердого тела в поле сил ньютоновского тяготения это делается за счет принятия во внимание старших членов в разложении потенциала сил по тому или иному возникающему в задаче малому параметру (см., например, [4]).

Оказывается, что сходные свойства могут быть обнаружены и в случае, когда главные центральные моменты инерции тела в общем случае различны [5]. При этом такие свойства могут проявляться, когда эти моменты инерции близки друг к другу. Естественно, исследование таких свойств оказывается наиболее удобным, когда распределение масс тела обладает дискретными симметриями. В этом случае удается найти не только интересные динамические свойства, такие как наличие «косых» относительных равновесий в задаче о движении твердого тела в центральном поле ньютоновского притяжения, но и сопоставить качественные свойства динамики тела, выявляемые с помощью точных и приближенных выражений для сил, действующих на тело. Такому сопоставлению для плоских тел крестообразной формы посвящена настоящая работа.

Близкие задачи рассматривались ранее разными авторами (см. обзор [6], а также [7]). В частности, достаточные условия устойчивости прямых решений для крестообразного тела, составленного из трех однородных стержней, исследовались в [8]. Факт смены устойчивости у прямых стационарных движений исследовался для гантелеобразных тел в [9].

1. Рассмотрим задачу о движении твердого тела крестообразной формы и материальной точки C под действием взаимного притяжения. Будем считать, что крест образован парой невесомых взаимно перпендикулярных стержней l_1 и l_2 с длинами $2a_1$ и $2a_2$, делящихся в точке их пересечения O пополам. Будем считать, что на каждом из концов стержня l_i, $i = 1, 2$ сосредоточена масса m_i. Предположим также, что во все время движения крест расположен в плоскости, содержащей точку C. Пусть Ox_1x_2 — связанная с телом прямоугольная декартова система координат с осями, направленными вдоль стержней l_1 и l_2. Тогда в этой системе координат $\mathbf{CO} = r \cdot (\gamma_1, \gamma_2)$, $|\mathbf{CO}| = r$.

При этом кинетическая и потенциальная энергия системы имеют вид

$$T = \tfrac{1}{2} m\mu\,(v_r^2 + r^2 v_\varphi^2) + (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)\,(v_\vartheta + v_\varphi)^2$$

$$U = -fM\,(m_1\,(\xi_1 + \eta_1) + m_2\,(\xi_2 + \eta_2))$$

$$\xi_i = (r^2 + 2ra_i\gamma_i + a_i^2)^{-1/2}, \quad \eta_i = (r^2 - 2ra_i\gamma_i + a_i^2)^{-1/2} \quad (i = 1, 2)$$

$$m = 2\,(m_1 + m_2), \quad \mu = M/(M + m), \quad \gamma_1 = \cos\vartheta, \quad \gamma_2 = \sin\vartheta$$

$$v_r = dr/dt, \quad v_\varphi = d\varphi/dt, \quad v_\vartheta = d\vartheta/dt$$

Здесь f — постоянная всемирного тяготения, M — масса точки C, φ — угол между фиксированным в абсолютном пространстве направлением, принадлежащим плоскости движения, и прямой OC.

Координата φ — циклическая. Следовательно, помимо интеграла энергии $H = T + U$ уравнения движения допускают интеграл площадей: $\partial T / \partial v_\varphi = p_\varphi = \text{const}$.

Разрешая его относительно переменной v_φ, имеем

$$v_\varphi = v_\varphi (p_\varphi, v_r, r, v_\vartheta, \vartheta).$$

Игнорируя циклическую координату по Раусу, представим уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial v_\vartheta}\right) = \frac{\partial R}{\partial \vartheta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial v_r}\right) = \frac{\partial R}{\partial r}$$

где R — функция Рауса:

$$R = (T - U - p_\varphi v_\varphi) \Big|_{v_\varphi = v_\varphi(p_\varphi, v_r, r, v_\vartheta, \vartheta)} = R_2 + R_1 + R_0$$

R_k — однородная форма по переменным v_r и v_ϑ степени k, $k = 0, 1, 2$. При этом эффективный потенциал $W = -R_0$ имеет вид $W = U + p_\varphi^2/(4I(r))$, где $I(r) = m_1 (a_1^2 + \mu r^2) + m_2 (a_2^2 + \mu r^2)$.

2. Найдем критические точки эффективного потенциала W на фиксированном уровне интеграла площадей p_φ. Им будут соответствовать стационарные движения рассматриваемой механической системы. Для этого вычислим производные эффективного потенциала по ϑ и по r и приравняем их нулю:

$$\partial W/\partial \vartheta = -fMr \{m_1 a_1^2 (\eta_1^3 - \xi_1^3) \gamma_2 + m_2 a_2^2 (\eta_2^3 - \xi_2^3) \gamma_1\} = 0 \tag{2.1}$$

$$\partial W/\partial r = \mu m r 4^{-1} I^{-2} (r) [-p_\varphi^2 + F(r, \theta)] = 0 \tag{2.2}$$

$$F(r, \theta) = 4f(M + m) I^2 (r) m^{-1} r^{-1} \{m_1 (\xi_1^3 (r + a_1\gamma_1) + \eta_1^3 (r - a_1\gamma_1)) +$$
$$+ m_2 (\xi_2^3 (r + a_2\gamma_2) + \eta_2^3 (r - a_2\gamma_2))\}$$

Решениям этих уравнений соответствуют стационарные движения, на которых твердое тело «смотрит» на точку C одной и той же точкой, а центр масс тела и точка C движутся по круговым орбитам с постоянной угловой скоростью $\omega = p_\varphi \{2I(r)\}^{-1}$.

Уравнения (2.1) допускают пару семейств решений $\vartheta = 0 + \pi k$ и $\vartheta = \pi/2 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, т. е. $\vartheta = 0 \pmod \pi$ и $\vartheta = \pi/2 \pmod \pi$, при любых значениях параметров $P(p) = \{m_1/m_2, a_1/r, a_2/r\}$. Существование этих решений легко видеть, впрочем, из симметрии задачи. Соотношения между постоянной линейного интеграла p_φ и радиусом орбиты определяются на этих движениях формулами

$$p_\varphi^2 = F_i (r) \quad (i = 1, 2), \quad F_{1,2} (r) = F(r, \theta) \Big|_{\vartheta = 0, \pi/2} \tag{2.3}$$

Рассмотрим вопрос о разрешимости уравнений относительно r. Аналогично тому, как это проделано в [10], можно показать, что при значениях постоянной площадей, превосходящих некоторый предел, каждое из соотношений (2.3) разрешимо относительно r и имеет по крайней мере по два решения $r = r_i^\pm (p_\varphi^2)$ $(i = 1, 2)$, причем $r_i^+ (p_\varphi^2) > r_i^0 > r_i^- (p_\varphi^2) > a_i$, где r_i^0 — корень уравнения $dF_i/dr = 0$.

Пусть $a_\varkappa = \min (a_1, a_2)$, $a_\lambda = \max (a_1, a_2)$, $\varkappa, \lambda \in \{1, 2\}$. Тогда на интервале $r \in (a_\varkappa, a_\lambda)$ соотношение (2.3) всегда имеет решение относительно r. Другое из соотношений (2.3) имеет решение на этом интервале лишь при

$m_\varkappa/m_\lambda > 4a_\varkappa^3 a_\lambda (a_\varkappa^2 - a_\lambda^2)^{-2}$. При этом корень $r = r_\lambda(p_\varphi^2)$ существует лишь при достаточно малых значениях постоянной p_φ и располагается на интервале $r_\lambda \in (a_\varkappa, r_{\lambda 0})$, где $r_{\lambda 0}$ — корень уравнения $m_\varkappa/m_\lambda = 2a_\lambda(r^2 + a_\varkappa^2)^{3/2}(r^2 - a_\lambda^2)^{-2}$.

На интервале $r \in (0, a_\varkappa)$ при выполнении условия $(a_\varkappa/a_\lambda)^3/2 < m_\varkappa/m_\lambda < 2(a_\varkappa/a_\lambda)^3$ каждое из соотношений (2.3) разрешимо относительно r. При этом $r_\varkappa \in (0, r_{\varkappa 0})$, $r_\lambda \in (0, r_{\lambda 0})$. Соотношение, отвечающее только номеру $\varkappa$, разрешимо на интервале $(a_\varkappa, a_\lambda)$ относительно r при условии $((a_\varkappa/a_\lambda)^3/2) < 2(a_\varkappa/a_\lambda)^3 < m_\varkappa/m_\lambda$. Соотношение, отвечающее индексу λ, при этом условии неразрешимо, а $r_\varkappa \in (0, r_{\varkappa 0})$. Наконец, оба уравнения неразрешимы при выполнении условия $m_\varkappa/m_\lambda < (a_\varkappa/a_\lambda)^3/2$.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании так называемых косых равновесий, т.е. равновесий, на которых тело не обращено к притягивающему центру ни одной из своих осей симметрии. Для этого представим вне множества $\{\vartheta = 0, \vartheta = \pi/2 \pmod \pi\}$ уравнения (2.1) в виде

$$m_1 a_1^2 \zeta_1^3 f_1(\vartheta) = m_2 a_2^2 \zeta_2^3 f_2(\vartheta), \quad f_1(\vartheta) = ((1 - \varepsilon_1\gamma_1)^{-3/2} - (1 + \varepsilon_1\gamma_1)^{-3/2})\gamma_1^{-1} \tag{2.4}$$

$$f_2(\vartheta) = ((1 - \varepsilon_2\gamma_2)^{-3/2} - (1 + \varepsilon_2\gamma_2)^{-3/2})\gamma_2^{-1}, \quad \varepsilon_i = 2ra_i\zeta_i^2$$

где $\zeta_i = \xi_i$ при $\gamma_i = 0$.

Рассмотрим теперь свойства функций $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$ на интервале $(0, \pi/2)$. Разложим выражение для f_1 в сходящийся ряд по степеням параметра $\varepsilon_1\gamma_1 \in (0, 1)$. Получим

$$f_1(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{1k}(\varepsilon_1)\gamma_1^{2k}$$

где все функции $f_{1k}(\varepsilon_1)$ положительны. Следовательно, так как любая натуральная степень косинуса на интервале $(0, \pi/2)$ строго монотонно убывает, то и функция $f_1(\vartheta)$ также строго монотонно убывает от $\delta_1 = f_1(0)$ до $3\varepsilon_1$.

Аналогично, разлагая выражение для $f_2(\vartheta)$ в сходящийся ряд по степеням параметра $\varepsilon_2\gamma_2 \in (0, 1)$, имеем (коэффициенты f_{1k} те же)

$$f_2(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{1k}(\varepsilon_2)\gamma_2^{2k}$$

Так как любая натуральная степень синуса на интервале $(0, \pi/2)$ строго монотонно возрастает, то и функция $f_2(\vartheta)$ также строго монотонно возрастает от $3\varepsilon_2$ до $\delta_2 = f_2(\pi/2)$.

Таким образом, если одновременно выполняются условия $m_1 a_1^2 \zeta_1^3 \delta_1 > 3m_2 a_2^2 \zeta_2^3 \varepsilon_2$ и $m_2 a_2^2 \zeta_2^3 \delta_2 > 3m_1 a_1^2 \zeta_1^3 \varepsilon_1$, то уравнение (2.4) имеет единственное по ϑ решение.

При этом одно из условий выполнено при любых значениях r из промежутка $I_i = (a_i, \infty)$, а другие — при r из интервала $I_j = (a_j, r_{pj})$, где r_{pj} — значение r, для которого это другое условие обращается в равенство. Здесь $m_i a_i^3 > m_j a_j^3$, $(i, j \in \{1, 2\},\ i \neq j)$.

Таким образом, косые решения всегда существуют при $r \in (a_\lambda, r_{p\lambda})$, а также при $r \in (a_\varkappa, r_{p\varkappa})$, если $m_\lambda a_\lambda^3 > m_\varkappa a_\varkappa^3$. При $r \in (0, r_\varkappa) \cup (r_\varkappa, r_\lambda)$ не всегда существуют даже прямые решения, поэтому условия существования косых решений данного типа в этом случае не обсуждаются.

3. Рассмотрим вопрос о достаточных условиях устойчивости этих решений. Для этого рассмотрим матрицу вторых производных

$$\begin{pmatrix} \partial^2 W/\partial r^2 & \partial^2 W/\partial r\partial\vartheta \\ \partial^2 W/\partial r\partial\vartheta & \partial^2 W/\partial\theta^2 \end{pmatrix}$$

На движениях $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/2 \pmod \pi$ эти производные имеют вид

$$\partial^2 W/\partial^2 r = -p_\varphi^2 (m_1 + m_2)/(2I^2(r)) + 2p_\varphi^2 (m_1 + m_2)^2 r^2/I^3(r) -$$

$$- 3fM(m_1 R_1 + 2m_2 r^2 \zeta_2^5) \equiv \mu m r 4^{-1} I^{-2}(r)\, dF_1/dr$$

$$\partial^2 W/\partial^2 \vartheta = -fMr\{-m_1 a_1^2 R_1 + 6m_2 a_2^3 r \zeta_2^5\} \equiv -fMr\{m_1 a_1^2 \zeta_1^3 d_1 + 3m_2 a_2^2 \varepsilon_2 \zeta_2^3\}$$

$$\partial^2 W/\partial r \partial \vartheta = 0$$

и

$$\partial^2 W/\partial^2 r = -p_\varphi^2 (m_1 + m_2)/(2I^2(r)) + 2p_\varphi^2 (m_1 + m_2)^2 r^2/I^3(r) -$$

$$- 3fM(2m_1 r^2 \zeta_1^5 + m_2 R_2) \equiv \mu m r 4^{-1} I^{-2}(r)\, dF_2/dr$$

$$\partial^2 W/\partial^2 \vartheta = -fMr\{-6m_1 a_1^3 r \zeta_1^5 + m_2 a_2^2 R_2\}$$

$$\partial^2 W/\partial r \partial \vartheta = 0, \quad R_i = ((r + a_i)^{-3} + |r - a_i|^{-3}) \quad (i = 1, 2)$$

Условия устойчивости можно записать в виде неравенств $\partial^2 W/\partial \vartheta^2 > 0$, $\partial^2 W/\partial r^2 > 0$. Эти условия полезно сопоставить с условиями существования косых стационарных движений. Из такого сопоставления видно, что в пространстве $P\{p\} \times S^1(\vartheta)$ множество косых решений ответвляется от одного из решений $\{\vartheta = 0,\ \vartheta = \pi/2 \pmod \pi\}$ при изменении знака $\partial^2 W/\partial \vartheta^2$. При этом в случае общего положения изменяется степень неустойчивости решений как функций от параметров. Это множество стремится к другому из этих решений при стремлении значений параметров задачи к тем значениям, при которых изменяется в общем случае степень неустойчивости этих решений.

Отмеченной в работе [9] смене устойчивости отвечает ветвление решений по радиусу при сохранении ориентации небесного тела. Бифуркация, изученная выше, отвечает ветвлению решений по угловой переменной и, следовательно, появлению других, «косых» ориентаций.

4. Полученные в работе результаты о смене устойчивости стационарных движений, на которых тело обращено к притягивающему центру одной из главных центральных осей инерции, и о существовании косых стационарных движений полностью согласуются с результатами классических исследований. На самом деле, разложим выражение для потенциальной энергии U в ряд по классическим малым параметрам $\alpha_i = a_i/r$ с точностью до членов четвертого порядка малости

$$U = -fMm_1 r^{-1}((1 + 2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_1^2)^{-1/2} + (1 - 2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_1^2)^{-1/2}) -$$

$$- fMm_2 r^{-1}((1 + 2\alpha_2\gamma_2 + \alpha_2^2)^{-1/2} + (1 - 2\alpha_2\gamma_2 + \alpha_2^2)^{-1/2}) =$$

$$= -fMr^{-1}(2(m_1 + m_2) - (m_1\alpha_1^2 + m_2\alpha_2^2) + 3/4\,(m_1\alpha_1^4 + m_2\alpha_2^4) +$$

$$+ 3(m_1\alpha_1^2\gamma_1^2 + m_2\alpha_2^2\gamma_2^2) - 15/2\,(m_1\alpha_1^4\gamma_1^2 + m_2\alpha_2^4\gamma_2^2) + 35/4\,(m_1\alpha_1^4\gamma_1^4 + m_2\alpha_2^4\gamma_2^4) + \ldots) =$$

$$= -fMr^{-1}(2(m_1 + m_2) + 1/2\,(m_1\alpha_1^2 + m_2\alpha_2^2) - 13/16\,(m_1\alpha_1^4 + m_2\alpha_2^4) +$$

$$+ 3/2\,(m_1\alpha_1^2 - m_2\alpha_2^2)\cos 2\vartheta + 5/8\,(m_1\alpha_1^4 - m_2\alpha_2^4)\cos 2\vartheta +$$

$$+ 35/16\,(m_1\alpha_1^4 + m_2\alpha_2^4)\cos^2 2\vartheta + \ldots)$$

В обычном «спутниковом» приближении ограничиваются лишь удержанием в разложении для потенциала слагаемых второго порядка малости по α_i. Вместе с тем, для тел, близких к динамически симметричным, эти слагаемые могут иметь тот же порядок малости, что и отброшенное слагаемое $35/16\,(m_1\alpha_1^4 + m_2\alpha_2^4)\cos^2 2\vartheta$. Отметим, что слагаемое $3/2\,(m_1\alpha_1^2 - m_2\alpha_2^2)\cos 2\vartheta$ может иметь как более высокий, так и более низкий порядок малости по отношению к $5/8\,(m_1\alpha_1^4 - m_2\alpha_2^4)\cos 2\vartheta$, если $m_1\alpha_1^2 - m_2\alpha_2^2$ гораздо больше или соответственно меньше $m_1\alpha_1^4 + m_2\alpha_2^4$. Так объясняется утрата упомянутых выше динамических эффектов при рассмотрении задачи в приближенной постановке.

Если же тело не близко к динамически симметричному, то слагаемые второго порядка играют решающую роль и привычное удержание лишь членов второго порядка малости позволяет отследить все требуемые динамические эффекты.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (93-013-16242), а также ISF (Grant MAK000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суликашвили Р. С.* О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения//Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1987. С. 57—66.

2. *Суликашвили Р. С.* О влиянии моментов инерции третьего и четвертого порядков на движение твердого тела//ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 268—274.

3. *Суликашвили Р. С.* О стационарных движениях тел, допускающих группы симметрий правильных многогранников, в Ньютоновском поле сил//ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582—586.

4. *Meirovitch L.* On the effect of higher-order inertia integrals on the attitude stability of earth-pointing satellites//The J. Astronaut. Sci. 1968. V. 15. No. 1. P. 14—18.

5. *Буров А. А.* О динамике тел, допускающих симметрии//Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1993. С. 3—12.

6. *Баркин Ю. В., Демин В. Г.* Поступательно-вращательное движение небесных тел//Итоги науки и техники. Астрономия. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 87—206.

7. *Wang Li-Sheng, Maddocks J. H., Krishnaprasad P. S.* Steady rigid-body motions in a central gravitational field//J. Astronaut. Sci. 1992. V. 40. No. 4. P. 449—478.

8. *Pascal M.* Sur le mouvement d'un triple bâtonnet dans un champ Newtonien//J. de Mécanique. 1972. V. 11. No. 1. P. 147—160.

9. *Белецкий В. В., Пономарева О. Н.* Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле//Космич. исследования. 1990. Т. 28. № 5. С. 664—675.

10. *Абрарова Е. В., Карапетян А. В.* О стационарных движениях твердого тела в центральном гравитационном поле//ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 68—73.

Москва

Поступила в редакцию
4.III.1994