МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1995

УДК 533.6.013.42

© 1995 г. А. А. ИЛЬЮШИН, И. А. КИЙКО

ЗАКОН ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКЕ И ПРОБЛЕМА ПАНЕЛЬНОГО ФЛАТТЕРА

В подавляющем большинстве работ по панельному флаттеру (см., напр., [1—3]) принимается гипотеза о том, что давление взаимодействия колеблющего тонкостенного элемента конструкции с обтекающим его потоком газа вычисляется по приближенной формуле так называемой поршневой теории $\Delta p = p - p_0 = \gamma p_0 v / C_0$, где p_0, C_0 — давление и скорость звука в невозмущенном потоке, γ — показатель политропы, v — скорость поршня. Выписанное выражение — это линейное приближение для давления на поршне, подсчитанного соответственно по теории простых или ударных волн [4]:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{C_0} \right)^{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}$$

$$p = p_0 \left[1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \frac{v^2}{C_0^2} + \frac{\gamma v}{C_0} \left(1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \frac{v^2}{C_0^2} \right)^{1/2} \right]$$

Первая формула справедлива, когда поршень постепенно ускоряется до скорости v, вторая — когда поршень мгновенно получает постоянную скорость v и далее движется с этой скоростью; в области скоростей $v/C_0 \leq 2$ обе формулы дают близкие значения давления [4]. Теория флаттера строится далее на равенстве $v = (\partial w / \partial x) V + \partial w / \partial t$, которое является следствием условия непроницаемости; w — нормальные прогибы оболочки, V — скорость потока (ось Ox параллельна вектору скорости).

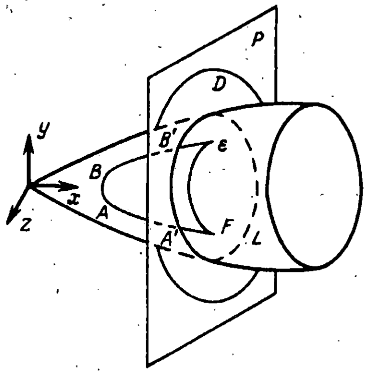
Формулу для избыточного давления

$$\Delta p = \frac{\gamma p_0}{C_0} \left(V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

можно считать обоснованной только для случая пластины, обтекаемой с одной стороны потоком, параллельным ее плоскости, поскольку именно в этом случае она является следствием закона плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике (линеаризованная теория несущей поверхности [5]). В других, наиболее интересных случаях, когда панель находится в области за ударной волной, корректность и достаточность данного соотношения представляется сомнительной. Необходимо, следовательно, рассмотреть проблему флаттера с общих позиций.

1. Рассмотрим удлиненное тело (летательный аппарат), которое движется поступательно со скоростью V. В пространстве выделим плоскость P, ортогональную вектору скорости; в момент времени $t = 0$ тело касается плоскости носиком, а в некоторый момент t занимает положение, которое показано на фигуре, где контуры L и D — сечения P-плоскостью поверхностей тела и ударной волны (D — волны) соответственно. С телом связана система координат $Oxyz$, ось x которой направлена противоположно вектору скорости. В этой системе уравнение певерхности тела запишем в форме $\Phi(x, y, z) = 0$; поскольку в момент t плоскость находится на расстоянии $x = Vt$ от носика, уравнением контура L будет $\Phi(Vt, y, z) = 0$.

В дальнейшем изложении предполагается, что решение (численное или аналитическое) задачи об обтекании тела (основное состояние) известно; будем полагать, что оно найдено в соответствии с законом плоских сечений [6] как решение плоской задачи газовой динамики о движении газа в P — плоскости, которое происходит вследствие расширения контура L по заданному закону $\Phi(Vt, y, z) = 0$.



Пусть $ABEF$ — контур деформируемого элемента панели, совершающей малые упругие колебания; задача обтекания с учетом этих колебаний, в рамках закона плоских сечений, исследуется методом возмущений основного состояния.

Взаимодействия возмущений с D — волной не будут учитываться; задача для возмущенного состояния формулируется как задача излучения в неограниченной P — плоскости. Это предположение безусловно выполняется, если возмущения, возникшие в момент, когда кромка AB пересечет P — плоскость, отразившись от D — волны, достигнут поверхности тела к моменту, когда кромка EF минует P — плоскость. Если же это положение не соблюдается точно и некоторая (вообще, незначительная) часть области $ABEF$ будет находиться под действием отраженных волн, этим эффектом будем пренебрегать.

В реальных условиях панель $ABEF$ ограничена подкрепляющими ребрами и имеет размеры, относительно небольшие по сравнению с поперечными размерами тела (например, наименьшим из диаметров в сечении AB); удобно поэтому ось y направить параллельно нормали к дуге $A'B'$ в ее середине, тогда оболочку $ABEF$ как геометрическую поверхность можно будет параметризовать декартовыми координатами Oxz, как это принято в теории пологих оболочек.

Обозначим $w(x, z, t)$ — нормальный прогиб панели, тогда вектор нормального перемещения будет $\mathbf{W} = w\mathbf{n}^\circ = w \operatorname{grad}\Phi / |\operatorname{grad}\Phi|$, его проекция $w^\vee$ на ось y запишется в виде $w^\vee = w\Phi_y' / |\operatorname{grad}\Phi|$. Отсюда с той же точностью, что и при установлении закона плоских сечений, следует $w^\vee \cong w$. Запишем уравнение поверхности $\Phi = 0$ в виде, разрешенном относительно y: $y = f(x, z)$; деформированная поверхность, следовательно, будет описываться уравнением $y = f(x, z) + w(x, z, t)$, а закон расширения контура L примет форму

$$\Phi_1(y, z, t) \equiv y - f(Vt, z) - w(Vt, z, t) = 0 \tag{1.1}$$

2. Движение газа в плоскости P будем описывать в переменных Лагранжа; координаты частиц y, z, давление p и плотность ρ как функции начальных координат η, ζ и времени t должны быть определены из уравнений движения, неразрывности и энергии

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial p}{\partial \zeta}, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial p}{\partial \eta} \tag{2.1}$$

$$\rho_0 = \rho\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0$$

На контуре L выполняется условие непроницаемости $\partial\Phi_1/\partial t + \mathbf{v}\operatorname{grad}\Phi_1 = 0$, которое на основании (1.1) приводит к уравнению

$$v_y - v_z(f_z' + w_z') - V(f_x' + w_x') - w_t' = 0 \tag{2.2}$$

$$v_y = \partial y/\partial t, \quad v_z = \partial z/\partial t$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости частиц $\mathbf{v} = \{v_y, v_z\}$. На бесконечности должно быть выполнено условие излучения.

Исследование системы (2.1), (2.2) проведем методом возмущений. Полагая, что решение y, z, p, ρ при $w = 0$ известно, введем решение с малыми добавками: $y + y_1$, $z + z_1$, $p + p_1$, $\rho + \rho_1$; подставив в (2.1), после обычной процедуры получим уравнения в возмущениях:

$$
\begin{gathered}
\rho_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial z_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial z_1}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} \\
\rho_0 \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial y_1}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \qquad (2.3) \\
p_1 = \frac{\gamma p \rho}{\rho_0} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial y_1}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z_1}{\partial \eta} \right)
\end{gathered}
$$

условие на контуре L преобразуется в следующее:

$$
\frac{\partial y_1}{\partial t} - f_z' \frac{\partial z_1}{\partial t} = V w_x' + v_z w_z' + w_t'. \qquad (2.4)
$$

Чтобы вернуться к задаче обтекания, в выписанной системе следует сделать замену $Vt = x$ (у функции прогиба $w(Vt, z, t)$ замену надо сделать только в первом из выписанных аргументов). Добавив к (2.3), (2.4) уравнения теории пологих оболочек (см., напр., [7]):

$$
L_2 (w, \Phi^{\text{V}}) = q(x, z, t), \quad L_3 (w, \Phi^{\text{V}}) = 0 \qquad (2.5)
$$

с соответствующими граничными условиями, получим замкнутую систему уравнений для исследования панельного флаттера. В (2.5) Φ^{V} — функция напряжений, нагрузка $q(x, z, t)$ складывается из сил инерции и аэродинамического взаимодействия

$$
q = - \rho^\circ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (p + p_1 - p_0 - p^\circ)_L \qquad (2.6)
$$

где p_0 — давление в невозмущенном потоке, ρ° — плотность материала пластины, p° — внутреннее давление в оболочке.

3. Система (2.3)—(2.6), будучи линейной, остается все-таки еще достаточно сложной; максимально упрощенную постановку можно получить, если предположить, что задача в возмущениях может быть сформулирована как одномерная. Основания к тому следующие. Положим $y = \eta + u_y$, $z = \zeta + u_z$, тогда в области панели, вообще говоря, справедливы оценки

$$
|\partial z/\partial \eta| = |\partial u_z/\partial \eta| \ll |\partial z/\partial \zeta| = |1 + \partial u_z/\partial \zeta|
$$

С учетом этих неравенств из первого и третьего уравнений (2.3) получим не зависящую от z_1 систему относительно y_1, p_1:

$$
\rho_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial p_1}{\partial \eta}, \quad p_1 = - \frac{\gamma p \rho}{\rho_0} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \qquad (3.1)
$$

Граничное условие (2.4) переходит при этом в приближенное условие для нормальной скорости на поверхности оболочки

$$
\frac{\partial y_1}{\partial t} = V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (3.2)
$$

Уравнения (3.1) совместно с (2.5) и граничным условием (3.2) вполне доступны для численного анализа на ЭВМ.

Дальнейшее упрощение в постановке задачи основано на предположении о том, что функции $\partial z/\partial \zeta$ и $(\partial z/\partial \zeta)\gamma p \rho/\rho_0$ слабо и плавно зависят в области панели от координаты η и времени t (таким свойством обладает, например, решение в задаче об обтекании конических и близких к ним тел [8]); тогда (3.1) имеет приближенное решение

$$y_1 = \Psi(t - \eta/a), \quad a^2 = (\gamma p \rho/\rho_0^2)(\partial z/\partial \zeta)^2$$

С учетом граничного условия (3.2) для давления p_1 на поверхность оболочки окончательно получим

$$p_1\Big|_L = (\gamma (p\rho)_L)^{1/2} \left(V \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_L \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \tag{3.3}$$

при этом в выражениях $(p\rho)_L$ и $(\partial z/\partial t)_L$ должна быть сделана замена $Vt = x$.

4. Представим теперь, что пологая цилиндрическая оболочка является частью поверхности клина, который движется со скоростью V перпендикулярно ребру (плоская задача обтекания профиля). Основное состояние характеризуется параметрами $z = \zeta$, $y = y(\eta, t)$, $p = p(\eta, t)$, $\rho = \rho(\eta, t)$, которые удовлетворяют уравнениям (в системе координат, ось x которой направлена противоположно вектору скорости, z — вдоль ребра, y — перпендикулярно первым двум):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad \rho_0 = \rho \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \tag{4.1}$$

Соответственно этому имеем уравнения в возмущениях

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_1}{\partial \eta}, \quad \rho_1 \frac{\partial y}{\partial \eta} + \rho \frac{\partial y_1}{\partial \eta} = 0, \quad p_1 = \frac{\gamma p \rho_1}{\rho} \tag{4.2}$$

из которых следует

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\gamma p \rho}{\rho_0^2} \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right) \tag{4.3}$$

Граничное условие получается из (3.2) при $\partial z/\partial t = 0$

$$(\partial y_1/\partial t)_L = V(\partial w/\partial x) + \partial w/\partial t \tag{4.4}$$

Особенно простым оказывается случай, когда поверхности клина — плоскости, образующие двугранный угол 2α, а панель вырождается в пластину. Система (4.1) имеет автомодельное решение [8]:

$$y = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) D_0 t + \frac{\rho_0}{\rho}\eta, \quad p = p^*, \quad \rho = \rho^*$$

$$p^* = \frac{2}{\gamma + 1}\rho_0 D_0^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_0, \quad \rho^* = \rho_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\left(1 + \frac{2}{\gamma - 1}\frac{a_0^2}{D_0^2}\right)^{-1}$$

$$D_0 = \frac{\gamma + 1}{4} V \operatorname{tg}\alpha + \left[\frac{\gamma + 1}{4} V \operatorname{tg}\alpha + a_0^2\right]^{1/2}$$

где p^*, ρ^* — постоянные значения давления и плотности за ударной волной; p_0, ρ_0, $a_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$ — характеристики невозмущенного потока, D_0 — скорость ударной волны.

Уравнение (4.3) имеет решение $y_1 = \Psi_1(t - \eta/a_1)$, $a_1^2 = \gamma p \rho/\rho_0^2$, откуда с учетом (4.2) и (4.4) находим давление на поверхности пластины ($\eta = 0$):

$$p_1 = \frac{\gamma p}{a}\left(V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \tag{4.5}$$

где $a = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ — скорость звука в газе за ударной волной. Давление на пластину выразится формулой

$$\Delta p = p + p_1 - p_0 - p^\circ = \frac{2\gamma p_0}{\gamma + 1}\left(\frac{D_0^2}{a_0^2} - 1\right) - p^\circ + \frac{\gamma p}{a}\left(V\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

Подставив эту формулу в уравнение движения пластины, получим

$$D\Delta^2 w + \rho^\circ h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\gamma p}{a}\left(V\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\right) + \frac{2\gamma p_0}{\gamma + 1}\left(\frac{D_0^2}{a_0^2} - 1\right) - p^\circ = 0 \qquad (4.6)$$

присоединив сюда граничные условия, приходим к задаче о флаттере пластины.

Выделим в (4.6) «статическое» решение $w_0(x, z)$,

$$D\Delta^2 w_0 + \frac{\gamma p}{a} V\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{2\gamma p_0}{\gamma + 1}\left(\frac{D_0^2}{a_0^2} - 1\right) - p^\circ = 0$$

удовлетворяющее заданным граничным условиям; тогда «динамический» прогиб $W(x, z, t)$ будет удовлетворять однородному уравнению при заданных начальных и тех же краевых условиях

$$D\Delta^2 W + \frac{\gamma p}{a}\left(V\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial t}\right) + \rho^\circ h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.7)$$

Отметим, что если исследуется флаттер прямоугольной пластины, а вектор скорости **V** не параллелен ни одной из ее сторон, то целесообразно в (4.7) преобразованием поворота перейти к новым координатам, направленным по сторонам пластины; уравнение (4.7) преобразуется к инвариантной форме

$$D\Delta^2 W + \frac{\gamma p}{a}\left(\mathbf{V}\,\mathrm{grad}\,W + \frac{\partial W}{\partial t}\right) + \rho^\circ h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.8)$$

В такой форме уравнение флаттера пластин впервые получено в [9], а основанные на нем решения конкретных задач и обнаруженные новые механические эффекты приведены в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мовчан А. А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе//ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 211—222.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. *Огибалов П. М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1963. 419 с.
4. Основы газовой динамики/Под ред. Г. Эммонс. М.: Изд-во иностр. лит. 1963. 702 с.
5. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
6. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей// ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 733—755.
7. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
8. *Черный Г. Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
9. *Ильюшин А. А., Кийко И. А.* Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки//ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 137—144.
10. *Ильюшин А. А., Кийко И. А.* Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа//Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 1994. № 4. С. 40—44.

Москва

Поступила в редакцию 13.XII.1993