МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1995

УДК 539.3:534.1

 Г. И. МИХАСЕВ

О ВОЛНОВЫХ ФОРМАХ ДВИЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающей движение бесконечной тонкой круговой цилиндрической оболочки. Предполагается, что толщина оболочки, коэффициенты упругости и плотность материала являются функциями продольной координаты x. В качестве начальных условий рассматриваются функции, осциллирующие в окрестности замкнутой линии $x=0$ и быстро затухающие вдали от нее. Предлагается комплексная ВКБ — процедура, с использованием которой строится асимптотическое решение задачи в виде локализованных семейств (пакетов) изгибных и продольных волн, бегущих в осевом направлении оболочки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную упругую цилиндрическую оболочку радиуса R. Для описания осесимметричного движения оболочки используем систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\nu g u_3) - m\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon^4\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(d\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right) - \nu g\frac{\partial u_1}{\partial x} + g u_3 + m\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0$$

$$u_j = u_j'/R \ (j = 1, 3), \ x = x_1/R, \ t = T/T_*$$

$$g(x) = Eh(1-\nu^2)^{-1}, \ d(x) = Eh^3(1-\nu^2)^{-1}, \ m(x) = \rho h$$

$$E = E'/E_*, \ h = h'/h_*, \ \rho = \rho'/\rho_*$$

$$T_* = \varepsilon^{-1}R(\rho_*/E_*)^{1/2}, \ \varepsilon^4 = h^2/(12R^2)$$

Здесь x_1 $(-\infty < x_1 < +\infty)$ — продольная координата; T — время, u_1', u_3' — тангенциальное (в осевом направлении) и нормальное перемещение точек срединной поверхности; $h'(x)$, $\rho'(x)$, $E'(x)$, $\nu(x)$ — переменные толщина, плотность материала, модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно; h_*, E_*, ρ_* — характерные значения функций h', E', ρ' (см. ниже); T_* — характерное время, ε — естественный малый параметр.

Уравнения (1.1) получаются из известных уравнений движения в усилиях, основанных на гипотезах Кирхгофа — Лява (см. [1], стр. 63), в предположении, что деформации осесимметричны, а толщина и физические характеристики материала есть функции продольной координаты x.

В дальнейшем считаем, что $g(x)$, $d(x)$, $m(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции, имеющие все производные порядка $O(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим начальные условия

$$u_j|_{t=0} = \lambda_j(x, \varepsilon)\Phi_0(x, \varepsilon) \ (j = 1, 3) \tag{1.2}$$

$$\partial u_j/\partial t|_{t=0} = i\mu_j\eta_j(x, \varepsilon)\Phi_0(x, \varepsilon), \ \mu_1 = \varepsilon^{-1}, \ \mu_3 = 1$$

$$\Phi_0(x, \varepsilon) = \exp\{i\varepsilon^{-1}(a_0x + \tfrac{1}{2}ib_0x^2)\}$$

где i — мнимая единица; a_0, $0 < b_0$ — вещественные числа; $\lambda_j(x, \varepsilon)$, $\eta_j(x, \varepsilon)$ — комплекснозначные функции, представимые в виде

$$\lambda_r = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} N_{rk}(\zeta), \quad \eta_r = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} M_{rk}(\zeta) \quad (r = 1, 3) \tag{1.3}$$

где $\zeta = \varepsilon^{-1/2} x$, $N_{rk}(\zeta)$, $M_{rk}(\zeta)$ — полиномы степеней n_{rk} и m_{rk} соответственно с комплексными (в общем случае) коэффициентами. Условия (1.2) задают на поверхности оболочки осесимметричный волновой пакет с изменяемостью порядка ε^{-1}, локализованный в окрестности линии $x = 0$. Пусть $h_* = h'(0)$, $E_* = E'(0)$, $\rho_* = \rho'(0)$.

2. Изгибное движение оболочки. Для исследования изгибного движения оболочки положим $u_3 = W$, $u_1 = \varepsilon U_n$, $t = \varepsilon^{-1} t_1$, где W, $U_n \sim 1$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда для поперечных волн получим систему уравнений

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(g \frac{\partial U_n}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\nu g W) - \varepsilon^3 m \frac{\partial^2 U}{\partial t_1^2} = 0 \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(d \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) - \varepsilon \nu g \frac{\partial U_n}{\partial x} + gW + \varepsilon^2 m \frac{\partial^2 W}{\partial t_1^2} = 0$$

относительно функций $W(x, t_1, \varepsilon)$, $U(x, t_1, \varepsilon)$.

Принимая во внимание вид начальных условий, введем следующее предположение: решение системы уравнений (2.1) представляет собой волновые пакеты с центром в точке $x = q_n(t_1)$, где $q_n(t_1)$ — дважды дифференцируемая по t_1 функция, такая что

$$q_n(0) = 0 \tag{2.2}$$

Перейдем к новой системе координат по формуле

$$x = q_n(t_1) + \varepsilon^{1/2} \xi_n \tag{2.3}$$

Все коэффициенты, входящие в уравнения (2.1), разложим в ряды Тейлора по степеням $\varepsilon^{1/2}\xi_n$ в окрестности подвижной точки $x = q_n(t_1)$.

Решение уравнений (2.1) будем искать в виде

$$W = W^* \Phi_n, \; U_n = U_n^* \Phi_n, \; W^* = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_k(\xi_n, t_1), \; U_n^* = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} u_{nk}(\xi_n, t_1) \tag{2.4}$$

$$\Phi_n = \exp\left\{i\left[\varepsilon^{-1} \int \omega_n(t_1)\, dt_1 + \varepsilon^{-1/2} p_n(t_1)\, \xi_n \frac{1}{2} b_n(t_1)\, \xi_n^2\right]\right\}$$

где ω_n, p_n, b_n — дважды дифференцируемые по t_1 функции; $\operatorname{Im} b_n(t_1) > 0$ для любого $t_1 \geq 0$, а $w_k(\xi_n, t_1)$, $u_{nk}(\xi_n, t_1)$ — полиномы по ξ_n. Здесь $\omega_n(t_1)$ имеет смысл мгновенной частоты колебаний оболочки в окрестности линии $x = q_n(t_1)$, $p_n(t_1)$ определяет изменяемость в направлении x, а $b_n(t_1)$ характеризует скорость затухания амплитуды волн при удалении от центра $x = q_n(t_1)$.

Отметим, что разложения вида (2.4), в случае, когда $q_n = 0$, а ω_n, p_n, b_n — константы, были построены в [2—4] для уравнений собственных колебаний и устойчивости оболочек. Таким образом, предлагаемая здесь асимптотическая конструкция волновых пакетов обобщает известный метод, распространяясь на случай динамических задач.

Подставим (2.3), (2.4) в (2.1). Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$ и исключая функции u_{nk}, получим последовательность уравнений

$$\sum_{j=0}^{k} L_{nj} w_{k-j} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

для определения $\omega_n(t_1)$, $q_n(t_1)$, $p_n(t_1)$, $b_n(t_1)$, $w_k(\xi_n, t_1)$.

$$L_{n0} = d(q_n)\,p_n^4 + g(q_n)\,[1 - \nu^2(q_n)] - m(q_n)\,(\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2$$

$$L_{n1} = \left(b_n \frac{\partial L_{n0}}{\partial p_n} + \frac{\partial L_{n0}}{\partial q_n} + \dot{p}_n \frac{\partial L_{n0}}{\partial \omega_n}\right) \xi_n - i\frac{\partial L_{n0}}{\partial p_n}\frac{\partial}{\partial \xi_n}$$

$$L_{n2} = \frac{1}{2}\left(b_n^2 \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial p_n^2} + 2b_n \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial p_n \partial q_n} + \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial q_n^2} + \dot{p}_n^2 \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial \omega_n^2} + \right.$$

$$\left. + 2\dot{p}_n \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial \omega_n \partial q_n} + 2\dot{p}_n b_n \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial \omega_n \partial p_n} + \dot{b}_n \frac{\partial L_{n0}}{\partial \omega_n}\right) \xi_n^2 + \tag{2.6}$$

$$+ a_{n0}\frac{\partial^2}{\partial \xi_n} + a_{n1}\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} + a_{n2}\frac{\partial}{\partial t_1} + a_{n3}, \quad a_{n0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial p_n^2}$$

$$a_{n1} = -1\left(b_n \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial p_n^2} + \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial p_n \partial q_n} + \dot{p}_n \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial \omega_n \partial p_n}\right), \quad a_{n2} = -i\frac{\partial L_{n0}}{\partial \omega_n}$$

$$a_{n3} = -i\left(\frac{1}{2} b_n \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial p_n^2} + \frac{1}{2}\dot{\omega}_n \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial \omega_n^2} + \dot{p}_n \frac{\partial^2 L_{n0}}{\partial \omega_n \partial p_n} + 2d'(q_n)\,p_n^3 + m(q_n)\,p_n \ddot{q}_n\right)$$

Точка и штрих здесь и ниже означают дифференцирование по t_1 и q_n соответственно.

Функции u_{nk} находятся последовательно из неоднородных уравнений и выражаются через $w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}$. В частности $u_{n0} = -i\nu[q_n(t_1)]\,p_n^{-1}(t_1)w_0$.

Рассматривая уравнение (2.5) при $k=0$, находим

$$\omega_n(t_1) = \dot{q}_n(t_1)\,p_n(t_1) \mp H_n\,[p_n(t_1), \dot{q}_n(t_1)] \tag{2.7}$$

$$H_n(p_n, q_n) = m^{-1/2}(q_n)\,\{d(q_n)\,p_n^4 + g(q_n)\,[1 - \nu^2(q_n)]\}^{1/2} \tag{2.8}$$

где $H_n(p_n, q_n)$ — гамильтониан исследуемой системы (2.1).

В первом приближении ($k=1$), с учетом (2.7), получим однородное уравнение

$$L_{n1}w_0 = 0 \tag{2.9}$$

относительно w_0. Для того чтобы последнее имело решение в виде полинома по ξ_n, необходимо, чтобы $p_n(t_1)$, $q_n(t_1)$ являлись решением системы Гамильтона

$$\dot{p}_n = -\partial H_n^{\pm}/\partial q_n, \quad \dot{q}_n = \partial H_n^{\pm}/\partial p_n \tag{2.10}$$

где $H_n^+ \equiv H_n$, $H_n^- \equiv -H_n$. Неоднозначность определения функций p_n, q_n связана с неоднозначностью определения частоты ω_n из формулы (2.7). В дальнейшем условимся знаки ($\pm$) опускать, подразумевая одну из ветвей решения.

Из (1.2), (2.2), (2.4) следует, что

$$p_n(0) = a_0, \quad q_n(0) = 0 \tag{2.11}$$

Пусть $h(x)$, $E(x)$, $\nu(x)$, $\rho(x)$ — положительные бесконечно дифференцируемые функции. Тогда задача (2.10), (2.11) имеет единственное (с точностью до ветви) решение $p_n(t_1)$, $q_n(t_1)$. Функции $p_n(t_1)$, $q_n(t_1)$ обращают оператор L_{n1} в ноль, а уравнение (2.9) в тождество.

Рассмотрим уравнение (2.5) при $k=2$. В силу (2.10) оно принимает вид

$$L_{n2}w_0 = 0 \tag{2.12}$$

Из условия существования решения последнего в виде многочлена по ξ_n получим уравнение Риккати

$$\dot{b}_n + \frac{\partial^2 H_n}{\partial p_n^2} b_n^2 + 2\frac{\partial^2 H_n}{\partial q_n \partial p_n} b_n + \frac{\partial^2 H_n}{\partial q_n^2} = 0 \tag{2.13}$$

Сравнивая (1.2) и (2.4), находим начальное условие

$$b_n(0) = ib_0 \tag{2.14}$$

Нетрудно доказать, что если $b_0 > 0$, то на любом конечном отрезке времени существует решение $b_n(t_1)$ задачи (2.13), (2.14) такое, что $0 < \operatorname{Im} b_n(t_1) < +\infty$. Очевидность этого утверждения следует из того факта, что $b_n = ZY^{-1}$ и $\operatorname{Im}(ZY^{-1}) = -1/2i\,|Y|^{-2}(ZY^* - Z^*Y) = b_0\,|Y|^{-2}$, где $Z(t_1)$, $Y(t_1)$ — единственное [5] решение системы в вариациях по отношению к системе (2.10) с начальными условиями $Z(0) = ib_0$, $Y(0) = 1$, такое, что $Y \neq 0$ [6, 7], а $Z^*(t_1)$, $Y^*(t_1)$ — сопряженные им функции.

Неравенство $\operatorname{Im} b_n(t_1) > 0$ гарантирует затухание амплитуды волн при удалении от линии $x = q_n(t_1)$.

Вернемся к уравнению (2.12), которое теперь, с учетом (2.13), примет вид

$$L^{\circ}_{n2} w_0 \equiv a_{n0} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi_n^2} + a_{n1} \xi_n \frac{\partial w_0}{\partial \xi_n} + a_{n2} \frac{\partial w_0}{\partial t_1} + a_{n3} w_0 = 0 \tag{2.15}$$

Функции $a_{nk}(t_1)$ определяются формулами (2.6). Решением уравнения (2.15) является полином

$$w_0 = P_{0(m_0)}(\xi_n, t_1; c_{00}, c_{01}, \ldots, c_{0m_0}) = \sum_{k=0}^{m_0} A_{nk} \xi_n^k \tag{2.16}$$

степени m_0 с коэффициентами

$$A_{nm_0}(t_1; c_{00}) = c_{00} z_0(t_1), \quad A_{nm_0-1}(t_1; c_{01}) = c_{01} z_1(t_1)$$

$$A_{nm_0-r}(t_1; c_{0r}, c_{0r-2}, c_{0r-4}, \ldots) = z_r(t_1) \Big[c_{0r} - (m_0 - r + 2)(m_0 -$$

$$- r + 1) \int a_{n0}(t_1)\, a_{n2}^{-1}(t_1)\, A_{nm_0-r+2}(t_1; c_{0r-2}, c_{0r-4}, \ldots)\, z_r^{-1}(t_1)\, dt_1 \Big]$$

$$z_j(t_1) = \exp\left\{ -\int \frac{(m_0 - j)\, a_{n1}(t_1) + a_{n3}(t_1)}{a_{n2}(t_1)} dt_1 \right\} \tag{2.17}$$

где $r = 2, 3, \ldots, m_0$; $j = 0, 1, \ldots, m_0$, c_{0j} — произвольные комплексные числа.

При $k = 3$ в (2.5) получим неоднородное уравнение

$$L^{\circ}_{n2} w_1 = - L_{n3} P_{0(m_0)} \tag{2.18}$$

относительно w_1. Операторы L_{nk} при $k \geq 3$ ввиду громоздкости здесь не приводятся. Заметим только, что $L_{n3}P_{0(m_0)}$ — полином степени $m_0 + 3$. Тогда функция

$$w_1 = P_{1(m_1)}(\xi_n, t_1; c_{10}, c_{11}, \ldots, c_{1m_1}) = \tag{2.19}$$

$$= P_{0(m_1)}(\xi_n, t_1; c_{10}, c_{11}, \ldots, c_{1m_1}) + P_1^*(\xi_n, t_1)$$

является решением уравнения (2.18), где $P_{0(m_1)}$ — полином степени m_1, задаваемый формулами (2.16), (2.17), а P_1^* — полином степени $m_0 + 3$, являющийся каким-либо частным решением уравнения (2.18).

Аналогичным образом из рассмотрения последующих приближений могут быть найдены функции w_k при $k \geq 2$ в виде полиномов $P_{k(m_k)}$ степеней m_k.

3. Тангенциальное движение оболочки. Для исследования тангенциального движения оболочки в (1.1) положим $u_1 = U$, $u_3 = \varepsilon W_\tau$, где U, $W_\tau \sim 1$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда уравнения продольного движения оболочки примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(\nu g W_\tau) - m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1}$$

$$\varepsilon^5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(d\frac{\partial^2 W_\tau}{\partial x^2}\right) - \nu g\frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon g W_\tau + \varepsilon m\frac{\partial^2 W_\tau}{\partial t^2} = 0$$

Решение последних будем также искать в виде волнового пакета с центром в точке $x = q_\tau(t)$, где $q_\tau(t)$ — дважды дифференцируемая функция, такая что $q_\tau(0) = 0$. Пусть $\xi_\tau = \varepsilon^{-1/2}[x - q_\tau(t)]$. Все коэффициенты уравнений (3.1) разложим в ряды по степеням $\varepsilon^{1/2}\xi_\tau$ в окрестности точки $x = q_\tau(t)$. Решение уравнений (3.1) представим в виде

$$U = U^*\Phi_\tau,\ W_\tau = W_\tau^*\Phi_\tau,\ U^* = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}u_k(\xi_\tau, t),\ W_\tau^* = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}w_{\tau k}(\xi_\tau, t) \tag{3.2}$$

$$\Phi_\tau = \exp\left\{i\left[\varepsilon^{-1}\int\omega_\tau(t)\,dt + \varepsilon^{-1/2}p_\tau(t)\,\xi_\tau + \frac{1}{2}b_\tau(t)\,\xi_\tau^2\right]\right\}$$

где ω_τ, p_τ, b_τ — дважды дифференцируемые по t функции; $\operatorname{Im} b_\tau(t) > 0$ для любого $t > 0$, а $u_k(\xi_\tau, t)$, $w_{\tau k}(\xi_\tau, t)$ — полиномы по ξ_τ. Величины ω_τ, p_τ, b_τ имеют тот же механический смысл, что и ω_n, p_n, b_n в случае изгибного движения оболочки.

Подставляя (3.2) в (3.1) и исключая $w_{\tau k}$ получим последовательность уравнений

$$\sum_{j=0}^{k} L_{\tau j}u_{k-j} = 0\quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

$$L_{\tau 0} = -g(q_\tau)\,p_\tau^2 + m(q_\tau)(\omega_\tau - \dot q_\tau p_\tau)^2 \tag{3.4}$$

Точка в (3.4) означает производную по t. Операторы $L_{\tau k}$ при $k \geq 1$ здесь не приводятся, ибо они определяются теми же формулами, что и операторы L_{nk}, в которых индекс n следует заменить на τ, а

$$a_{\tau 1} = -i\left(\frac{\partial^2 L_{\tau 0}}{\partial p_\tau \partial p_\tau} + \dot p_\tau\frac{\partial^2 L_{\tau 0}}{\partial\omega_\tau\partial p_\tau}\right),\quad a_{\tau 2} = -i\frac{\partial L_{\tau 0}}{\partial\omega_\tau} \tag{3.5}$$

$$a_{\tau 3} = -i\left\{\frac{1}{2}\dot\omega_\tau\frac{\partial^2 L_{\tau 0}}{\partial\omega_\tau^2} + \dot p_\tau\frac{\partial^2 L_{\tau 0}}{\partial\omega_\tau\partial p_\tau} - p_\tau[g'(q_\tau) + m(q_\tau)\,\ddot q_\tau]\right\}$$

Из рассмотрения нулевого ($k = 0$) и первого ($k = 1$) приближений находим

$$\omega_\tau(t) = \dot q_\tau(t)\,p_\tau(t) \mp H_\tau[p_\tau(t), q_\tau(t)] \tag{3.6}$$

где $H_\tau(p_\tau, q_\tau) = g^{1/2}(q_\tau)\,m^{-1/2}(q_\tau)\,p_\tau$ — гамильтониан уравнений (3.1), а функции $p_\tau(t)$, $q_\tau(t)$ определяются из системы (2.10), в которой $H_n^\pm$ следует заменить на $H_\tau^\pm$. Здесь $H_\tau^+ \equiv H_\tau$, $H_\tau^- \equiv -H_\tau$. Решая систему Гамильтона с начальными условиями $p_\tau(0) = a_0$, $q(0) = 0$, находим

$$p_\tau^\pm(t) = \frac{a_0}{f[q_\tau^\pm(t)]},\quad t = \pm\int_0^{q_\tau^\pm}\frac{dq}{f(q)} \tag{3.7}$$

$$f(q) = [g(q)/m(q)]^{1/2}$$

Для того чтобы уравнение (3.3) при $k=2$ имело решение в виде полинома по ξ_τ, необходимо, чтобы функция $b_\tau(t)$ являлась решением уравнения

$$\dot{b}_\tau + 2\frac{\partial^2 H_\tau^\pm}{\partial q_\tau \partial p_\tau} b_\tau + \frac{\partial^2 H_\tau^\pm}{\partial q_\tau^2} = 0 \tag{3.8}$$

Интегрируем (3.8) с начальным условием $b_\tau(0) = ib_0$. Учитывая (3.7), находим

$$b_\tau^\pm(t) = \frac{ib_0 + a_0\{f'(0) - f'[q_\tau^\pm(t)]\}}{f^2[q_\tau^\pm(t)]} \tag{3.9}$$

Тогда уравнение (3.3) при $k=2$ примет вид

$$L_{\tau 2}^\circ \equiv a_{\tau 1}\xi_\tau \frac{\partial u_0}{\partial \xi_\tau} + a_{\tau 2}\frac{\partial u_0}{\partial t} + a_{\tau 3}u_0 = 0 \tag{3.10}$$

Последнее имеет решение в виде многочлена степени n_0:

$$u_0 = R_{0(n_0)}(\xi_\tau, t; d_{00}, d_{01}, \ldots, d_{0n_0}) = \sum_{k=0}^{n_0} A_{\tau k}\xi_\tau^k \tag{3.11}$$

$$A_{\tau k}(t; d_{0k}) = d_{0k}\exp\left\{-\int \frac{k a_{\tau 1}(t) + a_{\tau 3}(t)}{a_{\tau 2}(t)}\,dt\right\} \tag{3.12}$$

где d_{0k} — произвольные комплексные числа.

Из рассмотрения последующих приближений ($k \geq 3$) могут быть найдены функции $u_k = R_{k(n_k)}(\xi_\tau, t; d_{k0}, d_{k1}, \ldots, d_{kn_k})$ в виде некоторых полиномов степеней n_k, содержащих неопределенные константы $d_{k0}, \ldots, d_{kn_k}$. Функции $w_{\tau k}$ находятся последовательно из неоднородных уравнений и выражаются через u_0, $u_1, \ldots, u_{k-1}$. В частности

$$w_{\tau 0} = -\frac{i\nu[q_\tau(t)]\,g[q_\tau(t)]\,p_\tau(t)}{m[q_\tau(t)]\,[\omega_\tau(t) - \dot{q}_\tau(t)\,p_\tau(t)]^2}\,u_0 \tag{3.13}$$

4. Решение задачи (1.1), (1.2). Рассмотрим функции

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} u_k^+ \Phi_\tau^+ + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} u_k^- \Phi_\tau^- \tag{4.1}$$

$$W_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_{\tau k}^+ \Phi_\tau^+ + \sum_{k=0}^{\infty} e^{k/2} w_{\tau k}^- \Phi_\tau^- \tag{4.2}$$

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_k^+ \Phi_n^+ + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_k^- \Phi_n^- \tag{4.3}$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} u_{nk}^+ \Phi_n^+ + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} u_{nk}^- \Phi_n^- \tag{4.4}$$

$$\Phi_n^\pm = \exp\left\{i\left[\varepsilon^{-1}\int \omega_n^\pm(t_1)\,dt + \varepsilon^{-1/2}p_n^\pm(t_1)\,\xi_n^\pm + \frac{1}{2}b_n^\pm(t_1)\,(\xi_n^\pm)^2\right]\right\}$$

$$\Phi_\tau^\pm = \exp\left\{i\left[\varepsilon^{-1}\int \omega_\tau^\pm(t)\,dt + \varepsilon^{-1/2}p_\tau^\pm(t)\,\xi_\tau^\pm + \frac{1}{2}b_\tau^\pm(t)\,(\xi_\tau^\pm)^2\right]\right\}$$

$$\xi_n^\pm = \varepsilon^{-1/2}[x - q_n^\pm(t_1)],\quad \xi_\tau^\pm = \varepsilon^{-1/2}[x - q_\tau^\pm(t)]$$

Знаки (+) и (−) здесь указывают на то, что берутся соответственно положительная и отрицательная ветви найденных выше функций. Пусть

$$u_1 = U(x, t, \varepsilon) + \varepsilon U_p(x, t_1, \varepsilon) \tag{4.5}$$

$$u_3 = W(x, t_1, \varepsilon) + \varepsilon W_\tau(x, t, \varepsilon) \tag{4.6}$$

Непосредственная подстановка функций (4.5), (4.6) в уравнения (1.1), с учетом формул (4.1)—(4.4), а также уравнений (2.1), (3.1), приводит к последовательности тождеств при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. Таким образом, функции (4.5), (4.6) есть формальное асимптотическое решение уравнений (1.1).

Для определения констант m_k, $c_{kj}^{\pm}$ и n_k, $d_{kj}^{\pm}$, содержащихся в $w_k^{\pm}$ и $u_k^{\pm}$ соответственно, подставим функции (4.5), (4.6) в начальные условия (1.2). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$, а также учитывая (1.3) и равенство $\xi_n^{\pm} = \xi_\tau^{\pm} = \zeta$, имеющее место при $t = 0$, получим последовательность уравнений

$$(u_k^+ \pm u_k^-)|_{t=0} = F_{1k}^{\pm}(\zeta),\ (w_k^+ \pm w_k^-)|_{t_1=0} = F_{3k}^{\pm}(\zeta) \tag{4.7}$$

относительно $c_{kj}^{\pm}$, $d_{kj}^{\pm}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, где

$$F_{10}^+ = N_{10}(\zeta),\ F_{10}^- = -M_{10}(\zeta) H_\tau^{-1}(a_0, 0),\ F_{30}^+ = N_{30}(\zeta)$$

$$F_{30}^- = -\frac{1}{H_n(a_0, 0)} - \left[M_{30}(\zeta) + \frac{i\nu(0)\, a_0 M_{10}(\zeta)}{H_\tau^2(a_0, 0)}\right], \ldots \tag{4.8}$$

Рассмотрим уравнения (4.7) при $k = 0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ, можем получить систему из $4(m_0 + n_0)$ линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно комплексных величин $c_{00}^{\pm}, \ldots, c_{0m_0}^{\pm}$, $d_{00}^{\pm}, \ldots, d_{0n_0}^{\pm}$, где $m_0 = \max\{n_{30}, m_{30}\}$, $n_0 = \max\{n_{10}, m_{10}\}$. Аналогичным образом могут быть найдены остальные константы при $k \geq 1$.

Формулы (4.8) указывают на зависимость амплитуды изгибных волн от начальных скоростей продольных волн.

5. Анализ решения. Из анализа формул (4.1)—(4.6) следует, что начальный волновой пакет разбивается на две группы волновых пакетов, распространяющихся в осевом направлении оболочки. Первая группа содержит два пакета («положительный» и «отрицательный») продольных волн (см. (4.1)) с центрами в точках $x = q_\tau^{\pm}(t)$ и два пакета (положительный и отрицательный) изгибных волн (см. (4.2)) с центрами в тех же точках, и порожденных вышеупомянутыми продольными волнами U. Положительные и отрицательные пакеты распространяются в противоположных направлениях с групповыми скоростями $v_{\tau g}^{\pm}(t) = dq_\tau^{\pm}/dt$. Изменяемость волн в пределах первой группы пропорциональна $\varepsilon^{-1} p_\tau^{\pm}(t)$, а ширина пакетов $J_\tau^{\pm}(t) \sim \varepsilon^{1/2}/\operatorname{Im} b_\tau^{\pm}(t)$.

Вторая группа содержит два пакета (положительный и отрицательный) изгибных волн (см. (4.3)) с центрами в точках $x = q_n^{\pm}(t_1)$ и два порожденных ими пакета продольных волн (см. (4.4)) с центрами в тех же точках. Групповые скорости волн этой группы вычисляются по формуле $v_{ng}^{\pm}(t_1) = \varepsilon dq_n^{\pm}/dt_1$, изменяемость волн $\sim \varepsilon^{-1} p_n^{\pm}(t_1)$, а ширина пакетов $J_n^{\pm}(t) \sim \varepsilon^{1/2}/\operatorname{Im} b_n^{\pm}(t_1)$.

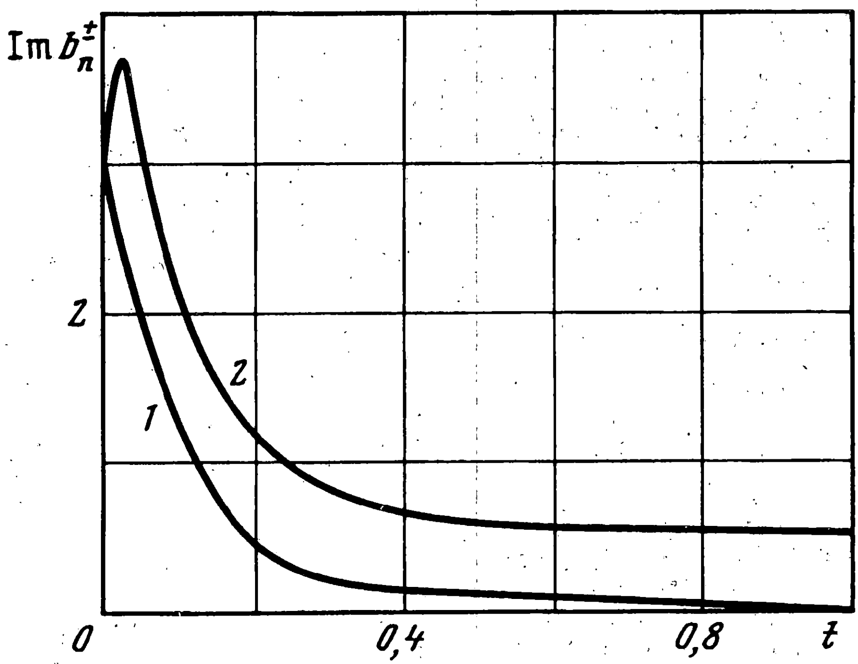
Амплитуды порожденных волновых пакетов есть величины порядка ε, поэтому при вычислении u_1 и u_3 с точностью до $O(\varepsilon)$ функции εW_τ, εU_n в (4.5), (4.6) могут быть отброшены. Однако при определении скорости $\partial u_3/\partial t$ учет второго слагаемого в (4.6) является обязательным, ибо $\partial W(x, \varepsilon t, \varepsilon)/\partial t \sim \sim \varepsilon \partial W_\tau(x, t, \varepsilon)/\partial t \sim \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

6. Пример. Пусть $h = h(x)$ — функция от x, $h(0) = E = \rho = 1$, ν, λ_r, η_r $(r = 1, 3)$ — константы. Для продольных волн получаем

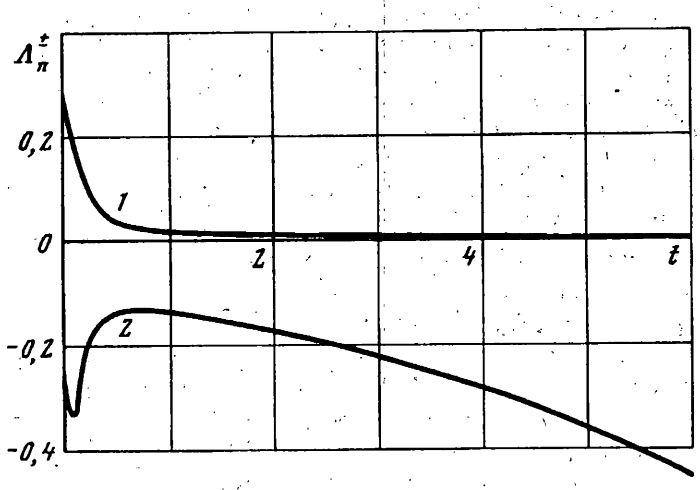
$$q_\tau^{\pm}(t) = \pm\, \delta^{-1/2} t,\ p_\tau^{\pm} = a_0,\ b_\tau^{\pm} = ib_0,\ \omega_\tau^{\pm} = 0$$

$$u_0^{\pm}(t) = \frac{d_{00}^{\pm}\delta^{1/4}}{h^{1/2}[q_\tau^{\pm}(t)]},\ \delta = 1 - \nu^2 \tag{6.1}$$

$$d_{00}^{\pm} = 2^{-1}\delta^{-1/4}(\lambda_1 \mp \delta^{1/2}\eta_1 a_0^{-1})$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда

$$U(x,t,\varepsilon) = \delta^{1/4}\left\{\left[\frac{d_{00}^{\pm}}{h^{1/2}(\delta^{-1/2}t)} + O(\varepsilon^{1/2})\right]\Phi_\tau^{+}(x,t,\varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{d_{00}^{-}}{h^{1/2}(-\delta^{-1/2}t)} + O(\varepsilon^{1/2})\right]\Phi_\tau^{-}(x,t,\varepsilon)\right\} \qquad (6.2)$$

$$\Phi_\tau^{\pm} = \exp\{i\varepsilon^{-1}[a_0(x \mp \delta^{-1/2}t) + \tfrac{1}{2}ib_0(x \mp \delta^{-1/2}t)^2\}$$

Из (6.1), (6.2) следует, что начальный пакет продольных волн разбивается на два пакета, двигающиеся неограниченно в противоположных направлениях с групповыми скоростями $|v_{\tau g}^{\pm}| = (1 - \nu^2)^{-1/2}$. Изменяемость волн в пределах обоих пакетов и их ширина остаются постоянными. Амплитуда продольных волн в пакете, двигающемся в сторону убывания толщины оболочки, увеличивается.

Для изгибных волн система (2.10) с начальными условиями (2.11) позволяет найти интеграл

$$h\,[q_n(t)]\,p_n^2\,[q_n(t)] = a_0^2 \tag{6.3}$$

Пусть $h'(x) > 0$ для любого x, $h_- = \lim h(x)$ при $x \to -\infty$, $h_+ = \lim h(x)$ при $x \to +\infty$. Введем обозначения

$$p_{n\infty}^{\pm} = \lim_{t\to\infty} p_n^{\pm}(t), \quad v_{n\infty}^{\pm} = \lim_{t\to\infty} v_{ng}^{\pm}(t)$$

Из анализа системы (2.10) получаем

$$dq_n^+/dt_1 > 0, \; dv_{ng}^+/dt_1 > 0, \; dp_n^+/dt_1 < 0$$

$$dq_n^-/dt_1 < 0, \; d\,|v_{ng}^-|/dt_1 < 0, \; dp_n^-/dt_1 > 0.$$

Тогда, учитывая (6.3), находим

$$p_{n\infty}^{\pm} = (a_0^2/h_\pm)^{1/2}, \quad v_{n\infty}^{\pm} = 2a_0^3\,[h_\pm/(1 + a_0^4)]^{1/2}$$

На фиг. 1, 2 цифрами *1*, *2* отмечены графики функций $\operatorname{Im} b_n^+(t)$, $\Lambda_n^+(t) = \operatorname{Re}(w_0^+\Phi_n^+)|_{x=q_n^+(t)}$, $\operatorname{Im} b_n^-(t)$, $\Lambda_n^-(t) = \operatorname{Re}(w_0^-\Phi_n^-)|_{x=q_n^-(t)}$ соответственно при $h(x) = 1 + thx$; $h_*/R = 4\cdot10^{-3}$; $R = 50$ см; $E_* = 6{,}24\cdot10^{-7}$ кг/(см·с^2); $\nu = 0{,}3$; $\rho_* = 1{,}18\cdot10^{-3}$ кг/см^3; $a_0 = 1$; $b_0 = 3$; $\eta_1 = 3i$; $\lambda_3 = \eta_3 = 0$. Амплитуда λ_1 начальных продольных перемещений здесь во внимание не принималась, так как она влияет лишь на продольные волны U (см. (6.2)). Кривые *1* показывают, что положительный пакет изгибных волн, бегущий в сторону возрастания функции $h(x)$, быстро расплывается, а амплитуда волн убывает. Поведение отрицательного пакета является более сложным: при $0 < t < 0{,}03$ наблюдается его фокусировка, затем при $t \to \infty$ он медленно расплывается, а амплитуда волн растет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. М.: Наука, 1976. 416 с.
2. *Товстик П. Е.* Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек//ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 815—822.
3. *Михасев Г. И., Товстик П. Е.* Устойчивость конических оболочек под действием внешнего давления//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 99—104.
4. *Михасев Г. И.* О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек//Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 9. С. 50—55.
5. *Богданов Ю. С., Сыроид Ю. Б.* Дифференциальные уравнения. Минск: Вышэйш. шк., 1983. 239 с.
6. *Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А.* Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 272 с.
7. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.

Витебск

Поступила в редакцию
7.II.1994