

УДК 539.375.

© 1995 г. А. В. БАЛУЕВА, И. Н. ДАШЕВСКИЙ

## КАЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ РОСТА ГАЗОНАПОЛНЯЮЩИХСЯ ТРЕЩИН

В работе дан теоретический анализ развития трещины в безграничной среде при диффузии в нее растворенного в металле атомарного водорода, а также при накоплении в ней газа по произвольному закону  $f(t)$ . Изучены как квазистатический, так и кинетический режимы распространения трещины, что существенно для современных полимерных материалов, ВТСП-керамик, материалов ядерной энергетики, а также трубопроводных сталей, находящихся под воздействием агрессивных сред. Дана классификация режимов, приводящих к убыстрению, замедлению либо постоянству скорости роста трещины. Получены аналитические решения кинетического уравнения для характерных типов зависимостей скорости роста трещины от КИН. Проведено качественное изучение поведения решений при произвольном виде кинетической кривой и  $f(t)$ .

**Введение в задачу.** В трещинах, содержащихся в таких материалах, как металлы, находящиеся под воздействием агрессивных сред, деградирующие полимеры и керамики (например, ВТСП-керамики), газонасыщенные горные породы и т. п., может скапливаться газ. Важно уметь прогнозировать поведение трещин в таких условиях.

В [1] в связи с явлениями выбросов в шахтах и горных ударов изучались эффекты, возникающие при быстрой разгрузке находящихся под действием горного давления газонасыщенных горных пород.

Модель развития дискообразной трещины в трубопроводных сталях в результате диффузии в нее атомарного водорода была предложена в [2] и развита в [3]. В [4, 5] аналогичная модель изучалась в более общей постановке. Считалось, что трещина занимает плоскую область произвольной формы в плане. Учитывалась кинетика, т. е. рассматривался случай, когда характеристикой трещиностойкости материала является, вообще говоря, не константа, а функция зависимости скорости прорастания трещины от величины коэффициента интенсивности напряжений (КИН) на ее контуре. При этом сначала в численном эксперименте, а затем и аналитически был установлен интересный качественный результат: асимптотическое стремление скорости распространения дискообразной трещины к константе, для определения которой указано алгебраическое конечное соотношение. Отметим еще работы [6, 7] о трещинах гидроразрыва, растущих в результате закачки в них жидкости по некоторому заданному закону.

В настоящей работе рассматривается развитие одиночной плоской или дискообразной трещины начального размера  $r_0$  (в безграничной среде) при накоплении в ней газа по некоторому закону  $f(t)$ . Газ считается идеальным, процесс распространения трещины изотермическим. Изучается как квазистатический, так и кинетический режимы распространения трещины. В случае горных пород кинетическая зависимость  $V(K)$  может быть связана с физикохимическим воздействием воды и водных растворов или агрессивных сред на материал в концевой зоне трещины. Отметим, что задача о кинетическом подрастании трещин в горных породах при закачке в них ограниченного объема газа изучалась в [5].

**1. Стадия накопления.** Если в трещине размера  $r_0$  в момент времени  $t=0$  началось накопление газа по некоторому закону  $f(t)$ , то первоначально до достижения критического состояния трещина некоторое время  $t_i$  (время инкубации)

будет оставаться неподвижной (стадия накопления), после чего начнется стадия распространения трещины.

Пусть  $f(t)$  — количество молей газа, накопившегося в трещине к моменту времени  $t$ . Выясним, какой КИН на контуре трещины размера  $r$  будет создаваться этим газом. По закону Менделеева—Клапейрона

$$f(t) \equiv m/\mu = pV/(RT) \quad (1.1)$$

где  $m$  — масса газа,  $\mu$  — его молекулярный вес,  $p$  — давление газа в трещине,  $V$  — объем трещины,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — температура.

Связь между  $p$ ,  $V$  и  $r$  дается формулой

$$V = \alpha p r^{\alpha+1} \quad (1.2)$$

где, для плоской трещины [8]  $r$ -ее полудлина,  $\alpha = 1$ ,  $a = \pi(1 - \nu^2)/E$ , для дискообразной трещины  $r$ -ее радиус,  $\alpha = 2$ ,  $a = \frac{16}{3}(1 - \nu^2)/E$ .

В свою очередь  $r$ ,  $p$  и  $K$  связаны соотношением [9]:

$$K = Ap\sqrt{r}, \quad p = K/(A\sqrt{r}) \quad (1.3)$$

где  $A = \sqrt{\pi}$ ,  $2/\sqrt{\pi}$  соответственно для плоской и дискообразной трещин.

Из формул (1.1)—(1.3) получим связь между  $f(t)$ ,  $r$  и  $K$  в виде

$$f(t) = B_\alpha K^2 r^\alpha \quad (1.4)$$

$$B_\alpha = \frac{1 - \nu^2}{ERT} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{\alpha-1} \quad (1.5)$$

$\alpha = 1, 2$  соответственно для плоской и дискообразной трещин.

Начало стадии распространения трещины, а стало быть и период инкубации  $t_i$  определяется достижением на контуре трещины критического значения КИН  $K_c$ . Т. о., согласно (1.4), (1.5)  $t_i$  для трещины размера  $r_0$  будет определяться соотношением

$$f(t_i) = B_\alpha K_c^2 r_0^\alpha \quad (1.6)$$

Будем далее везде считать для определенности, что  $df(t)/dt > 0$ , т. е. происходит постоянный приток газа, нет оттока (учет возможности  $f'(t) < 0$  не представляет принципиальных трудностей, но делает расчеты более громоздкими).

2. Стадия распространения. Квазистатический режим. Квазистатический режим распространения трещины реализуется в материалах, для которых характеристика трещиностойкости суть константа  $K_c$ . В стадии распространения  $K = K_c$ , (1.6) принимает вид

$$f(t) = B_\alpha K_c^2 r^\alpha \quad (2.1)$$

и зависимость размера трещины  $r$  от времени будет даваться выражением

$$r = \left[ \frac{f(t)}{B_\alpha K_c^2} \right]^{1/\alpha} \sim f^{1/\alpha}(t) \quad (2.2)$$

Таким образом, в режиме квазистатического роста характерный размер трещины в плоском случае ( $\alpha = 1$ ) оказывается пропорциональным массе накопившегося газа, в осесимметричном случае ( $\alpha = 2$ ) — корню квадратному из этой массы. Если масса газа в трещине растет как  $t^\alpha$ , то  $r(t) \sim t$  и трещина растет с постоянной скоростью  $\dot{r} = \text{const}$ , если  $f(t) = o(t^\alpha)$ , рост трещины замедляется, если  $f(t)$  растет быстрее  $t^\alpha$ , трещина ускоряется.

В [2] при изучении квазистатического роста дискообразной трещины в безграничной среде в результате диффузии в нее водорода (концентрация газа

на бесконечности  $C_0$ ) оказалось, что трещина растет с постоянной скоростью. Попробуем взглянуть на этот факт с точки зрения сформулированных выше выводов.

Поток водорода в трещину  $Q \sim qS$ , где  $q$  — плотность потока,  $S$  — площадь трещины. Из [2] имеем

$$q \sim \partial c / \partial r \sim C_0 / r, \quad S \sim r^2, \quad Q \sim C_0 r$$

Затем

$$f \sim Qt \sim Q \frac{r}{V} \sim C_0 r^2 / V \quad (2.3)$$

Подставляя  $f \sim C_0 r^2 / V$  в (2.2) с  $\alpha = 2$ , имеем

$$r \sim \sqrt{f} \sim \sqrt{C_0 r^2 / V} \sim \sqrt{C_0 r / V}$$

и после сокращения  $r$  скорость роста трещины  $V$  оказывается не зависящей от  $r$ , т. е. постоянной.

3. Стадия роста. Кинетический режим. О кинетике трещин говорят в том случае, когда характеристикой трещиностойкости является не константа  $K_c$ , а функция  $\Phi$  зависимости скорости прорастания трещины  $V$  от величины КИН на ее контуре  $V = \Phi(K)$  (кинетическая диаграмма) [10]. В данном случае  $V = \dot{r}$  и можно записать

$$\dot{r} = dr/dt = \Phi(K) \quad (3.1)$$

Переписывая (1.4) в виде  $K = \sqrt{f(t)/B_\alpha r^\alpha}$  и подставляя в (3.1), получим

$$\dot{r} = \Phi[\sqrt{f(t)/(B_\alpha r^\alpha)}] \quad (3.2)$$

При заданном законе накопления газа  $f(t)$  это кинетическое уравнение определяет закон роста трещины  $r(t)$ . Отметим, что из (3.2) следует, в частности, что при закатке в «одномерную» трещину ограниченного объема газа, обозначим его  $f_0$ , размер трещины после остановки будет одним и тем же вне зависимости от темпа закачки (или от времени закачки). Действительно, условие остановки трещины  $\dot{r} = 0$  дает

$$\Phi[\sqrt{f_0/(B_\alpha r^\alpha)}] = 0$$

или

$$\sqrt{f_0/(B_\alpha r^\alpha)} = K_0,$$

где  $K_0$  — некоторая постоянная, откуда

$$r = (B_\alpha K_0^2 / f_0)^{1/2}$$

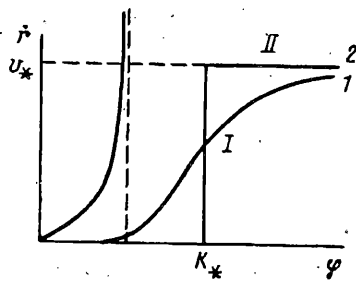
Ранее подобный результат был получен при численном счете в [5].

Посмотрим и здесь, при каких законах накопления происходит асимптотическое замедление, ускорение или равномерный рост трещины при  $t \rightarrow \infty$ . Для этого перепишем (3.2) по аналогии с (2.1) в виде

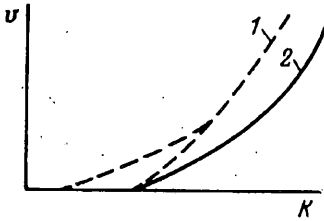
$$f(t) = B_\alpha \varphi^2(\dot{r}) r^\alpha \quad (3.3)$$

где по сравнению с (2.1) вместо  $K_c$  стоит  $\varphi(\dot{r})$ ,  $\varphi = \Phi^{-1}$  — функция, обратная к  $\Phi$ , а следовательно и  $\varphi$ , суть монотонно возрастающие (или, быть может, неубывающие) функции (фиг. 1). Пусть скорость роста трещины асимптотически стремится к const, обозначим ее  $c$  (все асимптотические соотношения ниже записываются для  $t \rightarrow \infty$ ):

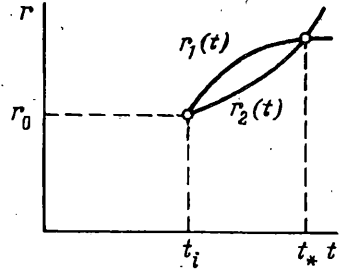
$$\dot{r} \rightarrow c > 0 \text{ или } \varphi(\dot{r}) \rightarrow \varphi(c), \quad r \sim ct$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

и по (3.3) этому соответствует следующий закон накопления газа:

$$f(t) \sim B_\alpha \varphi^2(c) (ct)^\alpha \sim Ct^\alpha$$

Если трещина замедляется при  $t \rightarrow \infty$ , или  $\dot{r} \rightarrow 0$  (точнее  $d(r)/dt = o(1)$ ), то  $r = o(t)$ ,  $\varphi(\dot{r}) \rightarrow \varphi(0) \geq 0$  и закон накопления  $f(t)$  должен в этом случае удовлетворять условию

$$f(t) \sim B_\alpha^2 \varphi^2(0) o(t^\alpha) = o(t^\alpha)$$

При ускорении трещины имеем<sup>1</sup>

$$\dot{r} \rightarrow \infty \text{ или } r = \underline{O}(t), \quad \varphi(\dot{r}) = O(1)$$

и для закона накопления

$$f(t) = B_\alpha O(1) \underline{O}(t^\alpha) = \underline{O}(t^\alpha)$$

Итак, можно регулировать рост трещины, ускоряя его, замедляя или устанавливая стационарный режим, соответственно закачивая газ в зависимости от времени  $t$  по следующему закону:

$$f(t) \begin{cases} = \underline{O}(t^\alpha), & \dot{r} \rightarrow \infty \\ = o(t^\alpha), & \dot{r} \rightarrow 0 \\ \sim Ct^\alpha, & \dot{r} \rightarrow V_\infty = \text{const} > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

В случае асимптотически стационарного режима (при  $f(t)_{t \rightarrow \infty} \sim Ct^\alpha$ ) величина предельной скорости  $V_\infty$  определяется из (3.2) соотношением

$$V_\infty = \Phi(\sqrt{Ct^\alpha / (B_\alpha V_\infty^\alpha t^\alpha)}) = \Phi(\sqrt{C / (B_\alpha V_\infty^\alpha)}) \quad (3.5)$$

Если  $\Phi'(\infty) = 0$ , т. е. функция  $\Phi$  имеет на бесконечности горизонтальную асимптоту  $V^\infty$  («полку»: кривая 1 на фиг. 1), то в первом из случаев (3.4) при  $f(t) = \underline{O}(t^\alpha)$  вместо  $\dot{r} \rightarrow \infty$  будем иметь  $\dot{r} \rightarrow V^\infty$ .

В [4, 5] по развитию водородной трещины в кинетическом режиме был

<sup>1</sup>  $f = O(g)$  обозначает, что  $f$  растет не медленнее, чем  $g$ ;  $f = \underline{O}(g)$  —  $f$  растет быстрее  $g$ .

получен обобщающий квазистатистический важный результат об асимптотическом выходе скорости роста дискообразной трещины на константу. На основе сформулированных выше выводов этот результат также может быть аналогично предыдущему параграфу пояснен на языке оценок. Для этого остающуюся и здесь справедливой оценки (2.3) надо подставить теперь уже в (3.3) с  $\alpha = 2$ , что дает  $C_0 r^2 / V \sim B_\alpha \phi^2(\dot{r}) r^2$ . Сокращая  $r^2$ , имеем  $V_\infty \phi^2(V_\infty) \sim \text{const}$ , что с точностью до констант соответствует полученным в [5] соотношениям (4.1), (4.5), (4.6) для предельной скорости. Однако в отличие от приведенных оценок точный подход [4.] позволяет проследить всю историю роста трещины и весь процесс выхода на стационарный режим.

4. Леммы сравнения. Кинетическое уравнение (3.2) допускает удобные аналитические решения лишь для некоторых специальных видов кинетической диаграммы  $\Phi$  и закона накопления  $f$  (см. следующий параграф). Для получения простых оценок в других случаях полезным может оказаться следующее простое

*Утверждение:* вышележащей кинетической диаграмме и/или кривой накопления отвечает более быстрый рост трещины, т. е. из

$$\Phi_1(t) > \Phi_2(t) \text{ следует } r_1(t) > r_2(t) \forall t \quad (4.1)$$

$$f_1(t) > f_2(t) \text{ следует } r_1(t) > r_2(t) \forall t \quad (4.2)$$

Для доказательства (4.1) рассмотрим два материала, отличающиеся кинетическими диаграммами  $\Phi_1, \Phi_2$  (см. фиг. 2) и содержащие одинаковые трещины. Запишем формулу (3.2) для каждой трещины в виде

$$\dot{r}_1 = \Phi_1[f(t)/r_1^\alpha], \quad \dot{r}_2 = \Phi_2[f(t)/r_2^\alpha] \quad (4.3)$$

1. В момент страгивания одной или обеих трещин  $f(t)/r_1^\alpha = f(t)/r_2^\alpha = K_1$  (т. к. трещины до страгивания ничем не отличаются, а находятся просто в материалах с разными кинетическими свойствами, то период инкубации у них одинаковый). Считая функции  $\Phi_1, \Phi_2$  достаточно «хорошими», разложим правые части (4.3) в ряд Тейлора вблизи  $K_1$ . В силу  $\Phi_1 > \Phi_2$  первое отличное от нуля слагаемое в разложении для  $\Phi_1$  больше соответствующего слагаемого в разложении для  $\Phi_2$ . Поэтому на начальном этапе роста  $\dot{r}_1 > \dot{r}_2, r_1(t) > r_2(t)$ .

2. Предположим теперь, что существует некоторая точка  $t = t_*$ , в которой вторая трещина догонит первую, так что  $r_2(t_*) = r_1(t_*) = r_*$ . Тогда согласно фиг. 3 в этой точке должно быть  $\dot{r}_2(t_*) \geq \dot{r}_1(t_*)$ . Но из (4.3):

$$\dot{r}_2(t_*) - \dot{r}_1(t_*) = \Phi_2\left[\frac{f(t_*)}{r_2^\alpha(t_*)}\right] - \Phi_1\left[\frac{f(t_*)}{r_1^\alpha(t_*)}\right] = \Phi_2\left[\frac{f(t_*)}{r_*^\alpha}\right] - \Phi_1\left[\frac{f(t_*)}{r_*^\alpha}\right] < 0$$

Полученное противоречие доказывает (4.1). Неравенство (4.2) для монотонно растущей  $\Phi$  доказывается аналогично. При наличии на кинетической диаграмме плато в точках плато надо проводить аналогичные рассуждения не для первой, а для второй производной по времени от  $r_1 - r_2$ .

## 5. Некоторые случаи интегрируемости кинетического уравнения.

### 5.1. Кинетическая диаграмма степенного вида

$$\Phi(x) = Ax^\beta \quad (5.1)$$

Такая диаграмма  $V = AK^\beta$  характерна для полимеров, поликристаллов, сверхпроводников [11]. Подставляя (5.1) в (3.2), имеем

$$\dot{r} = A \left[ \frac{f(t)}{B_\alpha r^\alpha} \right]^{\beta/2} = A' \frac{f^{\beta/2}(t)}{r^{\alpha\beta/2}}, \quad A' = \frac{A}{B_\alpha^{\beta/2}}$$

$$r^{\alpha\beta/2} dr = A' f^{\beta/2}(t) dt, \quad \frac{r^{\alpha\beta/2+1}}{\alpha\beta/2+1} \Big|_{r_0}^r = A' \int_{t_1}^t f^{\beta/2}(t) dt$$

$$r^{\alpha\beta/2+1} = r_0^{\alpha\beta/2+1} + (\alpha\beta/2+1) A' \int_{t_1}^t f^{\beta/2}(t) dt$$

$$r(t) = \left[ r_0^{\alpha\beta/2+1} + (\alpha\beta/2+1) \frac{A'}{B_\alpha^{\beta/2}} \int_{t_1}^t f^{\beta/2}(t) dt \right]^{2/(\alpha\beta+2)}$$

$r_0$  — начальный радиус трещины,  $t_1$  — период инкубации.

5.2. Кинетическая диаграмма ступенчатого вида. Для металлов и горных пород, находящихся под воздействием агрессивных сред, характерна кинетическая диаграмма, состоящая из участков быстрого роста и горизонтальных плато (кривая 1 на фиг. 1) [12, 13], часто близкая просто к ступенчатой (кривая 2 на фиг. 1). Т. о. приближая реальную кинетическую кривую ступенчатой, можно получить качественные оценки роста трещин в аналитическом виде. Кривую 2 можно разбить на два участка: I — вертикальный, соответствует квазистационарному случаю распространения (см. пункт 2), II — горизонтальный, где наблюдается рост трещины с постоянной скоростью. На участке II для радиуса трещины от времени можно записать

$$\dot{r} = V_*, \quad r = r_* + V_* t$$

где  $r_*$  — радиус трещины в конце участка I. В случае роста трещины, соответствующему отрезку I кинетической кривой, имеем

$$f(t)/(B_\alpha r^\alpha) = K_*, \quad r(t) = [f(t)/(B_\alpha K_*)]^{1/\alpha}$$

до момента времени  $t = t_*$ , который определяется из выражения:

$$\dot{r} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{f(t)}{B_\alpha K_*} \right]^{1/\alpha-1} f'(t) \leq V_*$$

Итак, для зависимости радиуса трещины от времени получаем

$$r(t) = \begin{cases} r_0 + \left[ \frac{f(t)}{B_\alpha K_*} \right]^{1/\alpha}, & t_1 < t \leq t_*, t_* : f^{(1-\alpha)/\alpha} f' \Big|_{t=t_*} = V_* \alpha K_*^{(1-\alpha)/\alpha} \\ r_0 + r_* + V_* t, & t_* < t < \infty, r_* = r_0 + \left[ \frac{f(t_*)}{B_\alpha K_*} \right]^{1/\alpha} \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16481).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко Ю. Ф. Элементарный акт явления внезапного выброса. Выброс в скважину: Препринт № 145. М.: ИПМ РАН, 1980. 36 с.
2. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М., Павловский Б. Р. Модель развития водородных трещин в металле // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 828—831.
3. Гольдштейн Р. В., Зазовский А. Ф., Павловский Б. Р. Развитие дискообразного расслоения в стальном листе под действием растяжения и наводороживания // Физ.-хим. механика материалов. 1985. № 5. С. 100—105.
4. Балуева А. В., Гольдштейн Р. В., Федоренко Р. П. Кинетика газонаполненных трещин: постановка задачи, численный метод и основные результаты расчетов: Препринт № 39. М.: ИПМ РАН, 1989. 27 с.

5. *Балуева А. В.* Кинетика газонаполненных трещин: качественные оценки и приложения: Препринт № 380. М.: ИПМ РАН, 1980. 34 с.

6. *Зазовский А. Ф.* Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 103—109.

7. *Зазовский А. Ф.* Развитие дискообразной трещины гидроразрыва в мощном насыщенном жидкостью пласте//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 169—178.

8. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Изопериметрические неравенства и оценки некоторых интегральных характеристик решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоскими трещинами нормального разрыва//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 68—70.

9. Разрушение. Т. II. М. Мир, 1975. 764 с.

10. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Салганик Р. Л.* О кинетике распространения трещин. Условие разрушения и длительная прочность//Инж. ж. МТТ. 1966. № 6. С. 76—80.

11. *Karunaratne B. S. B., Lewis M. H.* Moisture-enhanced strength degradation of a superconducting ceramic//J. Mater. Sci. Lett. 1988. V. 7. № 9. P. 906—908.

12. *Tardy H., Hyspecka L., Barta I., Mazanec K.* Hodno ceni vodikove krehkosti oceli ponzivanych v jaderne energetics//Kavove materialy. 1979. V. 17. № 3. P. 310—319.

13. *Волков Г. С., Науменко В. П.* Определение характеристик трещиностойкости песчанника на стадии докритического роста трещины//Пробл. прочности. 1986. № 6. С. 24—28.

Москва

Поступила в редакцию  
12.XII.1993