МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1995

УДК 539.374

© 1995 г. Л. Х. БЕЛЕНЬКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ С НАСЛЕДСТВЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИИ

В работе рассматривается возникновение P ($2P$)-периодических колебаний в результате потери устойчивости прямолинейной формы вязкоупругого стержня, наследственные свойства которого описываются интегральным соотношением. Стержень находится в вязкой внешней среде. Концы стержня шарнирно закреплены. К одному из концов стержня приложена продольная периодически изменяющаяся во времени нагрузка. Для расчета вторичных режимов, ответвляющихся от прямолинейной формы, применяется метод Ляпунова — Шмидта. Решение соответствующей нелинейной системы интегродифференциальных уравнений в частных производных разыскивается в виде рядов по степеням малого параметра. Получены выражения для амплитуды и декремента затухания вторичных режимов для произвольного ядра релаксации. Расчеты проведены в случае дробно-экспоненциального ядра. Для отыскания нейтральных режимов соответствующей системы линейных интегродифференциальных уравнений применяется метод цепных дробей. Аналогичная задача для материала Фойхта рассмотрена в [1]. Для конкретных значений параметров выявлен характер потери устойчивости (мягкий, жесткий).

1. Постановка задачи. Рассмотрим вязкоупругий стержень, находящийся в вязкой внешней среде. Считаем, что сила внешнего трения пропорциональна нормальной компоненте скорости движения элемента стержня. Связь напряжения σ и деформации ε задается определяющим соотношением наследственности типа:

$$\sigma = E(\varepsilon - (G\varepsilon)(t)) \tag{1.1}$$

$$(Gu)(t) = \int_{t_0}^{t} B(t-\theta)\, u(\theta)\, d\theta \tag{1.2}$$

где E — модуль упругости, $B(t)$ — ядро релаксации. Коэффициент внешнего трения обозначим через $\nu_2 \geq 0$.

К одному из концов стержня приложена продольная нагрузка, периодически изменяющаяся во времени $P(\omega t) = P_0(1 + h\sin\omega t)$, где P_0 — среднее осевое давление, h, ω — соответственно, амплитуда и частота модуляции.

Предполагая, что движение происходит в одной из главных плоскостей инерции, пренебрегая инерцией поворота поперечного сечения, применим к системе, рассмотренной в [2], принцип Вольтерра. Для этого в уравнениях заменим модуль упругости E на интегральный оператор (1.1). Тогда для определения декартовых координат элемента стержня $V'(s,t)$, $W'(s,t)$ растягивающей силы $T'(s,t)$ и кривизны $K'(s,t)$, получим нелинейную систему интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}(1-G)\,\partial^2K/\partial^2z - KT - \partial W/\partial z\,(\partial^2V/\partial t^2 + \mu\partial V/\partial t) + \\ + \partial V/\partial z\,(\partial^2W/\partial t^2 + \mu\partial W/\partial t) = 0 \\ \partial T/\partial z + K(1-G)\,\partial K/\partial z - \partial V/\partial z\partial^2V/\partial t^2 - \partial W/\partial z\partial^2W/\partial t^2 = 0 \\ (\partial V/\partial z)^2 + (\partial W/\partial z)^2 = 1,\;\; K = \partial^2W/\partial z^2\partial V/\partial z - \partial^2V/\partial z^2\partial W/\partial z\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$z = sl^{-1},\ V' = Vl^{-1},\ W' = Wl^{-1},\ K = K'l,\ T = l^2T'\,(EJ)^{-1},\ \nu = \nu_1 l^{-2}\,(EJ)^{1/2} m^{-1/2}$$

$$\mu = \nu_2 l^2\,(mEJ)^{-1/2},\ \ t = l^{-2}\,(EJ)^{1/2}\, m^{-1/2}\tau,\ \ b = P_0 l^2.(EJ)^{-1}$$

$$B\,(t) = l^2\,(EJ)^{-1/2}\, m^{1/2} B\,((EJ)^{-1/2}\, m^{1/2}\tau)$$

где s — длина дуги стержня, l — длина стержня, m — погонная масса, EJ — изгибная жесткость поперечного сечения, t — время.

Пусть концы стержня шарнирно закреплены. При изучении устойчивости можно ограничиться решениями, удовлетворяющими краевым условиям

$$V\,(0,\,t) = W\,(0,\,t) = \partial^2 V\,(0,\,t)/\partial z^2 = 0 \qquad (1.4)$$

$$V\,(1,\,t) = \partial^2 V\,(1,\,t)/\partial z^2 = T\,(1,\,t) + (1 - (V\,(1,\,t)/\partial z)^2)^{1/2}\,\beta P\,(\omega t) = 0 \qquad (1.5)$$

Система (1.3) — (1.5) при любых значениях параметров допускает решение

$$V = 0,\quad W = z,\quad T = -\beta P\,(\omega t) \qquad (1.6)$$

соответствующее прямолинейному равновесию стержня.

Линеаризация в системе (1.3) — (1.5) около решения (1.6) приводит к линейной спектральной задаче [1].

2. Применение метода Ляпунова — Шмидта к расчету колебаний, ответвляющихся от прямолинейной формы стержня. Для исследования $P - (2P)$-периодических колебаний, ответвляющихся от прямолинейной формы стержня, воспользуемся методом Ляпунова — Шмидта ($P = 2\pi/\omega$).

В системе (1.3) — (1.5) положим

$$V = v\,(z,\,t),\ \ W = z - H\,(z,\,t),\ \ K = -\partial^2 v/\partial z^2 + R\,(z,\,t),$$

$$T = -\beta P\,(\omega t) + \theta\,(z,\,t) \qquad (2.1)$$

Тогда задача сводится к отысканию $P - (2P)$-периодических по времени решений системы ($t_0 = -\infty$):

$$Lv = f \qquad (2.2)$$

$$Lv \equiv (1 - G)\,\partial^4 v/\partial z^4 + \beta P\,(\omega t)\,\partial^2 v/\partial z^2 + \mu\partial v/\partial t + \partial^2 v/\partial t^2$$

с граничными условиями

$$v\,(0,\,t) = \partial^2 v\,(0,\,t)/\partial z^2 = H\,(0,\,t) = 0 \qquad (2.3)$$

$$v\,(1,\,t) = \partial^2 v\,(1,\,t)/\partial z^2 = (1/2\,(\partial v/\partial z)^2 + \ldots)_{z=1}\,\beta P\,(\omega t) + \theta\,(1,\,t) = 0 \qquad (2.4)$$

где f нелинейно зависит от функций v, H, θ, R и их производных.

Будем рассматривать $P - (2P)$-периодические режимы, возникающие при сверхкритических значениях нагрузки β. Для этого положим

$$\beta = \beta_* + \varepsilon^2 \qquad (2.5)$$

β_* — критическое значение нагрузки, определяемое линейной задачей.

Решение системы (2.2) — (2.4) с учетом (2.5) розыскиваем в виде рядов по степеням ε:

$$(v,\,H,\,\theta,\,R) = \sum_{1}^{\infty} (v_k,\,H_k,\,\theta_k,\,R_k)\,\varepsilon^k. \qquad (2.6)$$

Подставляя (2.5) — (2.6) в систему (2.2) — (2.4) и приравнивая члены при

---

[1] *Беленькая Л. Х., Сухова Н. В.* Параметрический резонанс в задаче устойчивости вязкоупругого стержня. Ростов-на-Дону, 1986. 83 с.— Деп. в ВИНИТИ. № 4609-В86.

одинаковых степенях ε, получим систему уравнений для определения функций v_k, θ_k, H_k, R_k:

$$(1 - G)\,\partial^4 v_k/\partial z^4 + \beta_* P(\omega t)\,\partial^2 v_k/\partial z^2 + \partial^2 v_k/\partial t^2 + \mu\partial v_k/\partial t =$$
$$= P(\omega t)\,\partial^2 v_{k-2}/\partial z^2 + f_k \equiv \varphi_k \tag{2.7}$$

Для φ_k имеем

$$\varphi_k = -P(\omega t)\,\partial^2 v_{k-2}/\partial z^2 + P(\omega t)\,R_{k-2} + (1 - G)\,\partial^2 R_k/\partial z^2 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} (\theta_{k-j}(\partial^2 v_j/\partial z^2 - R_j) + \partial^2 H_{k-j}/\partial z^2\,(\partial^2 v_j/\partial t^2 + \mu\partial v_j/\partial t) -$$
$$- \partial v_{k-j}/\partial z\,(\partial^2 H_j/\partial t + \mu\partial H_j/\partial t)) \tag{2.8}$$

Краевые условия принимают вид

$$v_k(0, t) = \partial^2 v_k(0, t)/\partial z^2 = H_k(0, t) = 0 \tag{2.9}$$

$$\partial^2 v_k(1, t)/\partial z^2 = v_k(1, t) = \theta_k(1, t) + \sum_{j=1}^{k-1} (1/2\partial v_{k-j}/\partial z\partial v_j/\partial z + \ldots)\,\beta_* P(\omega t) +$$
$$+ P(\omega t) \sum_{j=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}\,\partial v_{k-j-2}/\partial z\partial v_j/\partial z + \ldots) = 0 \tag{2.10}$$

Для существования P-($2P$) периодического решения системы (2.7)—(2.10) необходимо и достаточно выполнения условия ортогональности:

$$\langle \varphi_k v_* \rangle = (1/P) \int_0^P \int_0^1 \varphi_k(z, t)\, v_*(z, t)\, dz dt = 0 \tag{2.11}$$

где v_* — решение сопряженного однородного уравнения

$$(1 - G_*)\,\partial^4 v/\partial z^4 + \beta_* P(\omega t)\,\partial^2 v/\partial z^2 - \mu\partial v/\partial t + \partial^2 v/\partial t^2 = 0 \tag{2.12}$$

которое имеет вид $v_*(z, t) = y_*(t) \sin \pi n z$, при этом $y_*(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{y} - \mu\dot{y} + (\pi^4 n^4 - \beta_* \pi^2 n^2 (1 + h \sin \omega t))\,y - \pi^4 n^4 (G_* y)(t) = 0 \tag{2.13}$$

$$(G_* y)(t) = \int_t^{\infty} B(\theta - t)\, y(\theta)\, d\theta \tag{2.14}$$

Будем рассматривать решения системы (2.7) — (2.10) последовательно для $k = 1, 2, 3, \ldots$

При $k = 1$ уравнение (2.7) однородно и служит для определения критических нагрузок β_*.

При $k = 2$ уравнение (2.7) также однородно. Таким образом, для v_1, v_2 имеем $v_1 = \alpha_1 y(t) \sin \pi n z$, $v_2 = \alpha_2 y(t) \sin \pi n z$, где α_1, α_2 — неизвестные постоянные, $y(t)$ — решение уравнения

$$\ddot{y} + \mu\dot{y} + (\pi^4 n^4 - \beta_* \pi^2 n^2 (1 + h \sin \omega t))\,y - \pi^4 n^4 (G_* y)(t) = 0 \tag{2.15}$$

Из условия разрешимости уравнения (2.7) при $k = 3$ получаем соотношение из которого определяем

$$\alpha_1^2 = -\tfrac{1}{2}\pi^2 n^2 \langle y(t)\, P(\omega t)\, y_*(t) \rangle S^{-1}, \quad S = \sum_{i=1}^{6} I_i \tag{2.16}$$

$$I_1 = (\tfrac{5}{32}\pi^6 n^6 + \tfrac{1}{12}\pi^8 n^8) \langle y(t)^3\, y_*(t) \rangle$$

$$I_2 = (3/32\pi^2 n^2 - 1/12\pi^4 n^4) \langle y(t)\, \dot y(t)^2\, y_*(t)\rangle$$

$$I_3 = (-1/12\pi^6 n^6 - 7/32\pi^4 n^4)\, \beta_* \langle y(t)^3\, P(\omega t)\, y_*(t)\rangle$$

$$I_4 = \mu\, (1/12\pi^4 n^4 + 5/32\pi^2 n^2) \langle \dot y(t)\, y(t)^2\, y_*(t)\rangle$$

$$I_5 = 1/16\pi^6 n^6 \langle (Gy^3)\, y_*(t)\rangle$$

$$I_6 = -\pi^6 n^6 (1/12\pi^2 n^2 + 7/32) \langle (Gy)\, y(t)^2\, y_*(t)\rangle$$

Таким образом, условием существования $P - (2P)$-периодических колебаний при малых сверхкритических нагрузках является положительность величины α_1^2. Если же эта величина отрицательна, то $P - (2P)$-периодические колебания существуют только при докритических нагрузках. Для их вычисления соотношение (2.5) следует заменить соотношением $\beta = \beta_* - \varepsilon^2$. Тогда, повторяя предыдущий вывод, приходим к формуле (2.16) с заменой α_1^2 на $-\alpha_1^2$.

3. Исследование устойчивости вторичных $P - (2P)$-периодических режимов. Для исследования устойчивости сверхкритических и докритических $P - (2P)$-периодических колебаний, линеаризуем систему (2.2) — (2.4) около рассмотренного решения (2.6). Для этого положим в системе (2.2) — (2.4):

$$v = v_0 + v'',\ \theta = \theta_0 + \theta'',\ H = H_0 + H'',\ R = R_0 + R''$$

$$v_0 = v_1 + O(\varepsilon^2),\ \theta_0 = \theta_2 + o(\varepsilon^2),\ H_0 = H_2 + o(\varepsilon^2),\ R_0 = R_3 + o(\varepsilon^3)$$

Возмущения ищем в виде

$$(v'', \theta'', H'', R'') = (v, \theta, H, R) \exp(\sigma t) \tag{3.1}$$

где $v, \theta, H, R - P - (2P)$-периодические по t функции. Подставляя (3.1) в линеаризованные уравнения (2.2) — (2.4) и полагая $\beta = \beta_* + \varepsilon^2$, придем к системе

$$Lv = \varepsilon^2 P(\omega t)\, \partial^2 v/\partial z^2 - \mu\sigma v - \sigma^2 v - 2\sigma \partial v/\partial t +$$

$$+ \sum_1^\infty (-1)^n (n!)^{-1} \sigma^n (G(\partial^4 v/\partial z^4 \tau^n))(t) + f \tag{3.2}$$

Решение системы (3.2) разыскиваем в виде

$$(v, \theta, H, R) = \sum_1^\infty (v_i', \theta_i', H_i', R_i')\, \varepsilon^i,\quad \sigma = \sum_1^\infty \sigma_k \varepsilon^k,\quad \sigma_0 = 0 \tag{3.3}$$

Из условия разрешимости уравнения (3.2) при $k = 1$ имеем $\sigma_1 = 0$, при этом предполагаем, что величина $\mu\langle yy_*\rangle + 2\langle \dot y y_*\rangle + \pi^4 n^4 \langle (Gy\tau)\, y_*\rangle \neq 0$. Это предположение подтверждается численными результатами.

Используя условие разрешимости при $k = 3$, для декремента затухания получаем формулу:

$$\sigma_2 = -\pi^2 n^2 \langle y(t)\, P(\omega t)\, y_*(t)\rangle (1/2\mu \langle yy_*\rangle + \langle \dot y y_*\rangle + 1/2\pi^4 n^4 \langle (Gy\tau)\, y_*\rangle)^{-1} \tag{3.4}$$

В случае докритического ветвления, в правой части (3.4) знак меняется на противоположный. В обеих случаях для собственного числа σ имеем

$$\sigma = \sigma_2 (\beta - \beta_*) + O(|\beta - \beta_*|^{3/2})$$

Решение (2.6) будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от того в левой или в правой полуплоскости окажется собственное число σ.

Для исследования устойчивости прямолинейной формы стержня линеаризуем систему (1.3) — (1.5) около решения (1.6). Аналогично предыдущему определяем собственное число

$$\sigma_2' = 1/2\pi^2 n^2 \langle y(t)\, P(\omega t)\, y_*(t)\rangle (1/2\mu \langle yy_*\rangle + \langle \dot y y_*\rangle + 1/2\pi^4 n^4 \langle (Gy\tau)\, y_*\rangle)^{-1} \tag{3.5}$$

Таким образом, имеем $\sigma_2 = -2\sigma_2'$, т. е. происходит обмен устойчивостью между прямолинейной формой стержня и возникающими вторичными периодическими режимами.

В простейшем стационарном случае ($h = 0$), как видно из выражений (2.16), (3.4), (3.5) при переходе нагрузки β через критическое значение β_*^0:

$$\beta_*^0 = \pi^2 (1 - G_0), \; G_0 = \int_0^\infty B(\tau)\, d\tau$$

прямолинейная форма стержня теряет устойчивость и мягко возникает пара устойчивых равновесий:

$$v = \mp \varepsilon \alpha_1 \sin \pi z + O(\varepsilon^2), \;\; \varepsilon = (\beta - \beta_*)^{1/2}, \;\; \sigma = -2\pi^2 (\mu + \pi^4 G_1)^{-1}$$

$$G_1 = \int_0^\infty B(\tau)\, \tau d\tau, \qquad G_1 > 0$$

При ограничениях на оператор релаксации вытекающих из принципа устойчивости материала [3], следует, что $G_0 < 1$, $\alpha_1^2 > 0$.

4. Уравнения для периодических колебаний. Для отыскания P-периодического решения уравнения (2.15) воспользуемся методом цепных дробей [4].

Решение $y(t)$ разыскиваем в виде ряда Фурье

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega n t), \;\; c_{-n} = c_n^* \tag{4.1}$$

Коэффициенты c_n удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_k c_k + c_{k-1} - c_{k+1} = 0, \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.2}$$

$$a_k = 2(\beta\pi^2 n^2 h)^{-1} (\mu\omega k + \pi^4 n^4 K_s - i(\pi^4 n^4 - \beta\pi^2 n^2 - \omega^2 k^2 - \pi^4 n^4 K_c))$$

$$K_s = \int_0^\infty B(\tau) \sin \omega k \tau d\tau, \;\; K_c = \int_0^\infty B(\tau) \cos \omega k \tau d\tau$$

Разыскиваем нетривиальные решения системы (4.2) такие, что $|c_n| \to 0$ при $|n| \to \infty$. Из (4.2) видно, что в этом случае $|c_n|\, |n|^m \to 0$ при $|n| \to \infty$ для любого целого m, отсюда следует сходимость ряда (4.1) и возможность почленного дифференцирования.

Обозначим через $g_n = c_n / c_{n-1}$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$. Тогда система (4.2) примет вид

$$a_n + g_n^{-1} = g_{n+1} \tag{4.3}$$

Из системы (4.3) выводим представление для g_n:

$$g_n = -\cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \ldots}}} \tag{4.4}$$

Решение системы (4.2) с $|c_n| \to 0$ при $n \to \infty$ единственно с точностью до постоянного множителя и дается формулами

$$c_0 = 1, \;\; c_1 = g_1, \;\; c_2 = g_1 g_2, \;\; c_n = g_1 g_2, \ldots, g_n \tag{4.5}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, для решения сопряженного уравнения (2.13) получаем представление

$$y_*(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n c_n^* \exp(i\omega nt) \tag{4.6}$$

Нетрудно видеть, что $y(t) = y(\pi/\omega - t)$.

Для отыскания $2P$-периодических режимов уравнения (2.15), решение $y(t)$ ищем в виде

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{2n+1} \exp(\tfrac{1}{2} i\omega (2n+1) t) \tag{4.7}$$

Аналогично предыдущему получаем представление для g_{2n+1}:

$$g_{2n+1} = -\cfrac{1}{a_{2n+1} + \cfrac{1}{a_{2n+3} + \cfrac{1}{a_{2n+5} + \ldots}}} \tag{4.8}$$

$$g_{2n+1} = c_{2n+1}/c_{2n-1}.$$

Вычислив c_1, найдем $c_3, c_5, \ldots$ по формуле $c_{2n+1} = c_1 g_3 g_5 \ldots g_{2n+1}$.

Нетрудно показать, что $2P$-периодическое решение сопряженного уравнения (2.13) имеет вид:

$$y_*(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{n_1} c_{2n+1}^* \exp(\tfrac{1}{2} i\omega (2n+1) t) \tag{4.9}$$

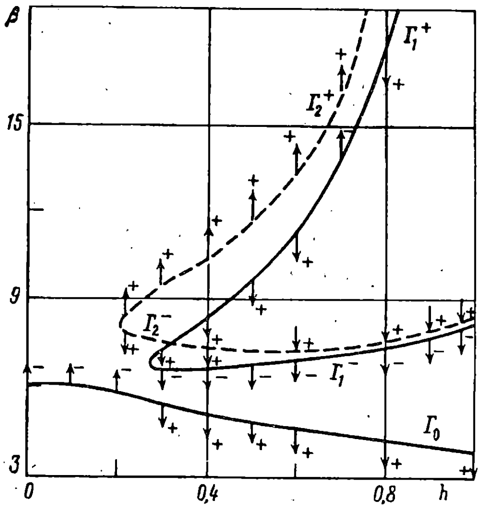
Используя (4.1), (4.6), (4.7), (4.9) определяем интегралы, входящие в выражениях для α_1^2 и σ_2.

5. Результаты расчетов. Вычисления проведены для дробноэкспоненциального ядра релаксации $B(t) = Ae^{-\gamma t}t^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, $A, \gamma > 0$, в вычислениях полагали $\gamma = 0{,}005$; $\alpha = 0{,}025$. Величины α_1, σ_2 рассчитаны по формулам (2.17), (3.4).

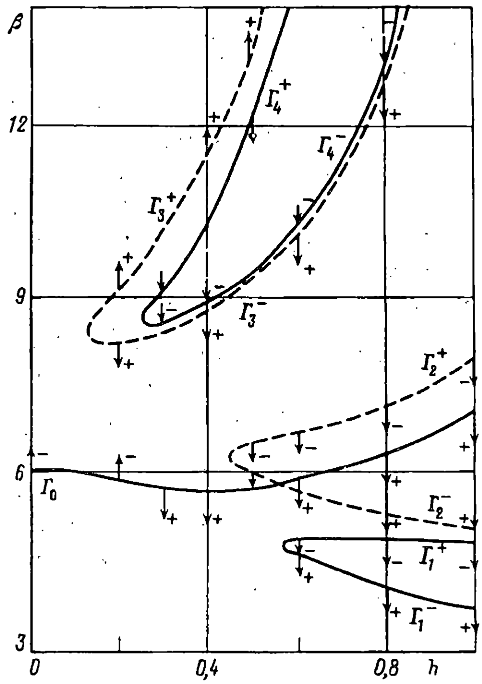
На фиг. 1 представлена нейтральная кривая на плоскости (h, β) при $\omega = 5$, $A = 0{,}005$, $\mu = 0{,}974$, волновое число $n = 1$. Нейтральные кривые соответствующие P-периодическим режимам изображены сплошной линией, $2P$-периодическим — штриховой. «Языки», соответствующие P- и $2P$-периодическим колебаниям пересекаются и расположены выше кривой Γ_0. В аналогичной задаче для материала Фойхта, происходит строгое чередование языков, соответствующих P- и $2P$-периодическим режимам и находятся они ниже кривой Γ_0. Точка плоскости (h, β) принадлежит области устойчивости, если ее можно соединить с началом координат, не пересекая нейтральную кривую.

Обозначим через Γ_1^-; Γ_1^+ — соответственно, нижнюю и верхнюю границы языка, соответстующего P-периодическому режиму; Γ_2^-, Γ_2^+ — нижняя и верхняя границы, соответствующие $2P$-периодическому режиму. Точки плоскости (h, β), находящиеся выше нейтральной кривой Γ_0, принадлежат области неустойчивости. Здесь $\uparrow$ ($\downarrow$) означают, соответственно, сверх- и докритическое ветвление; $+$ ($-$) — соответственно, σ_2 — положительно (отрицательно).

Рассмотрим ветвление при переходе нагрузки β через кривые Γ_0, Γ_1^-, Γ_1^+, Γ_2^-, Γ_2^+ при фиксированном h. На Γ_0 возможны следующие ситуации: 1) мягкая потеря устойчивости ($\alpha_1^2 > 0$, $\sigma_2 < 0$) прямолинейной формы стержня и



Фиг. 1



Фиг. 2

возникновение пары устойчивых P-периодических режимов при $h \in (0; 0{,}22)$; 2) жесткая неустойчивость ($\alpha_1^2 < 0$, $\sigma_2 > 0$) в интервале $h \in (0{,}23; 1)$. При этом смена типа потери устойчивости происходит через бесконечность, т. е. $\alpha_1^2(h_*) = \infty$.

На кривой Γ_1^- ветвление докритическое, при этом $\alpha_1^2 < 0$, $\sigma_2 < 0$; на Γ_1^+ ветвление также докритическое и $\alpha_1^2 < 0$, $\sigma_2 > 0$. Это говорит о том, что в данной ситуации рассматриваемое значение σ_2 не является наименьшим, так как первая потеря устойчивости прямолинейной формы произошла на кривой Γ_0. Аналогичная ситуация имеет место на кривой Γ_2^-. На Γ_2^+ реализуются сверхкритические ($\alpha_1^2 > 0$) режимы, при этом $\sigma_2 > 0$. На «носике языка» Γ_2 смена типа потери устойчивости происходит также через бесконечность. В аналогичной задаче для материала Фойхта [2] смена типа потери устойчивости происходит на носиках языков через 0, т. е. $\alpha_1^2(h_*) = 0$. Таким образом, для рассматриваемой в работе модели смена типа потери устойчивости происходит через бесконечность.

На фиг. 2 представлена картина ветвления P- и $2P$-периодических режимов для параметров $\omega = 3$; $A = 0{,}05$; $\mu = 0$; $n = 1$. Здесь через Γ_0, Γ_1, Γ_4 обозначены языки, соответствующие P-периодическим режимам; Γ_2, Γ_3 — соответствуют $2P$-периодическим. Ветвление на кривых $\Gamma_3^-, \Gamma_3^+, \Gamma_4^-, \Gamma_4^+, \Gamma_0$ аналогично выше рассмотренному случаю; на кривых Γ_1^-, Γ_3^- $(0{,}57 \le h \le 1)$ имеет место жесткая потеря устойчивости: при достижении нагрузкой β ее критических значений гибнет пара неустойчивых периодических режимов ($\alpha_1^2 < 0$, $\sigma_2 > 0$). На Γ_1^+, при уменьшении нагрузки β, рождается пара устойчивых P-периодических режимов (мягкая потеря устойчивости). На кривой Γ_2^+ картина аналогичная.

Таким образом, имеем следующие результаты: когда нагрузка β, возрастая, проходит через критические значения, прямолинейная форма стержня может терять и приобретать устойчивость. При этом либо рождается, либо гибнет пара P – ($2P$)-периодических режимов. При достижении амплитудой модуляции не-которого значения h_*, тип потери устойчивости меняется. При этом амплитуда вторичных режимов в окрестности h_* меняет знак, обращаясь при $h = h_*$ в бесконечность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об автоколебаниях вязкоупругих стержней//Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 6. С. 126—134.

2. *Беленькая Л. X., Юдович В. И.* О возникновении колебаний вязкоупругого стержня, нагруженного периодической силой//Изв. Северо-Кавказ. науч. центра. Сер. естеств. наук. 1979. № 1. С. 11—15.

3. *Ворович И. И.* О некоторых свойствах операторов вязкоупругости//Избранные проблемы прикладной механики. М.: 1974. С. 225—244.

4. *Беленькая Л. X., Юдович В. И.* Устойчивость вязкоупругого стержня под действием периодической нагрузки//Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 146—152.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
19.VIII.1993