МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1995

УДК 539.214;539.374

© 1995 г. М. А. АРТЁМОВ, Д. Д. ИВЛЕВ

О ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЯХ КИНЕМАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ

В [1] показано, что условия полной пластичности $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = \sigma_1 + k$, где σ_i — главные напряжения, k — предел текучести, приводят к статически определимым уравнениям теории идеальной пластичности.

Аналогично условия $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_1)$ приводят к кинематически определимым уравнениям. Ниже рассматриваются линеаризованные уравнения при кинематически определимых состояниях теории идеальной пластичности.

1. Рассмотрим условие пластичности

$$|\sigma_i + \sigma_j| = 3a\sigma + k \ (a, k - \text{const})$$

$$\sigma = 1/3\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{1.1}$$

где σ — среднее давление.

В дальнейшем, избавляясь от обозначения модуля, будем предполагать, что постоянные a, k могут иметь одновременно либо положительные, либо отрицательные значения.

Из (1.1) получим

$$\sigma_i' = (2 - 3a)\,\sigma + k, \quad \sigma_i' = \sigma_i - \sigma \tag{1.2}$$

где σ_i' — компонента девиатора.

При $a \neq 2/3$ условие текучести (1.2) переходит в условие текучести максимального предельного напряжения [2] фиг. 1. При $a = 2/3$ условие (1.2) определяет пирамиду, в сечении которой любой плоскостью, параллельной девиаторной плоскости, лежит шестиугольник, подобный шестиугольнику, изображенному на фиг. 1.

Рассмотрим грань ab (фиг. 1), условия предельного состояния (1.1) будут

$$\sigma_1 + \sigma_2 = a\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + k \tag{1.3}$$

Из ассоциированного закона пластического течения, согласно (1.3), найдем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \lambda\,(1 - a), \quad \varepsilon_3 = -\lambda a \tag{1.4}$$

Соотношения связи между компонентами скорости деформации в декартовой системе координат xyz и главными скоростями деформации имеют вид

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2 \quad (xyz)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2 \qquad (123)$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \ (lmn) \tag{1.5}$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы, обозначения в круглых скобках определяют круговую перестановку индексов.

Согласно (1.5), (1.4), получим

$$\varepsilon_x = \lambda(1 - a - n_1^2), \quad \varepsilon_{xy} = -\lambda n_1 n_2 \quad (xyz, 123) \tag{1.6}$$

Из (1.6) найдем

$$\lambda = \varepsilon/(2/3 - a), \quad \varepsilon = 1/3\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \tag{1.7}$$

Исключая направляющие косинусы n_i из (1.6), получим

$$[\varepsilon_x - \lambda(1 - a)]\,[\varepsilon_y - \lambda(1 - a)] = \varepsilon_{xy}^2 \quad (xyz) \tag{1.8}$$

$$[\varepsilon_x - \lambda(1 - a)]\,\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz} \quad (xyz) \tag{1.9}$$

где λ определяется согласно (1.7).

Три соотношения (1.8) или (1.9) определяют кинематически замкнутые системы соотношений, относительно компонент перемещений u, v, w.

2. Предположим, что исходное кинематическое состояние материала является однородным и бессдвиговым

$$\varepsilon_x^\circ, \varepsilon_y^\circ, \varepsilon_z^\circ - \text{const}, \quad \varepsilon_{xy}^\circ = \varepsilon_{yz}^\circ = \varepsilon_{xz}^\circ = 0 \tag{2.1}$$

Согласно (2.1), соотношение (1.9) будут удовлетворены, соотношения (1.8) согласно (2.1) могут быть удовлетворены при условиях

$$\varepsilon_x^\circ - \lambda^\circ(1 - a) = 0, \quad \varepsilon_y^\circ - \lambda^\circ(1 - a) = 0 \tag{2.2}$$

причем

$$\varepsilon_z^\circ - \lambda^\circ(1 - a) \neq 0 \tag{2.3}$$

Компонентам возмущенного состояния припишем штрих наверху

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\circ + \varepsilon_{ij}', \quad \lambda = \lambda^\circ + \lambda', \quad \lambda' = \varepsilon'/(2/3 - a) \tag{2.4}$$

Согласно (2.4), (1.8), (1.9), (1.7), найдем

$$\varepsilon_x' - \lambda'(1 - a) = 0, \quad \varepsilon_y' - \lambda'(1 - a) = 0, \quad \varepsilon_{xy}' = 0 \tag{2.5}$$

Из (2.5), (2.4) следует

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_y', \quad \varepsilon_{xy}' = 0, \quad \varepsilon_z' = -2\,(\varepsilon_x' + \varepsilon_y')/(1 - a) \tag{2.6}$$

Переходя к компонентам скорости перемещений u, v, w, полагая $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$, $\varepsilon_{xy} = 1/2\,(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$ и опуская штрих наверху у компонент скорости перемещений, согласно (2.6) найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = b\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad b = -\frac{2}{1 - a} \tag{2.7}$$

Предположим, что

$$u = u(xy), \quad v = v(xy) \tag{2.8}$$

При предположениях (2.8) два первых уравнения представляют условия Коши—Римана и определяют бессдвиговое деформирование среды в плоскости xy.

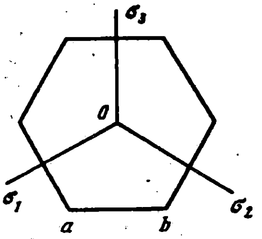
Из (2.7) найдем

$$w = b\omega z + f(xy), \quad \omega = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y \tag{2.9}$$

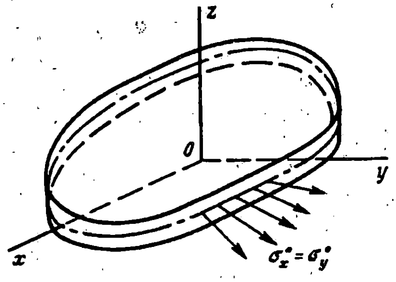
Предполагая деформирование симметричным относительно оси z, положим $f = 0$.

Итак, в рассматриваемом случае уравнения (2.7) являются кинематически определимыми и принадлежат к эллиптическому типу.

3. Перейдем к определению напряженного состояния. При линеаризации для



Фиг. 1



Фиг. 2

изотропного материала при условиях $\varepsilon_{xy}^\circ = \varepsilon_{yz}^\circ = \varepsilon_{xz}^\circ = 0$, $\tau_{xy}^\circ = \tau_{yz}^\circ = \tau_{xz}^\circ = 0$ имеет место [4]:

$$\tau'_{xz} = \frac{\sigma_x^\circ - \sigma_z^\circ}{\varepsilon_x^\circ - \varepsilon_z^\circ}\,\varepsilon'_{xz}, \quad \tau'_{yz} = \frac{\sigma_y^\circ - \sigma_z^\circ}{\varepsilon_y^\circ - \varepsilon_z^\circ}\,\varepsilon'_{yz} \tag{3.1}$$

Предположим, что в исходном состоянии в плоскости xy имеет место равномерное деформирование плиты: $\sigma_x^\circ = \sigma_y^\circ$, $\tau_{xy}^\circ = 0$, причем боковые стороны плиты свободны от напряжений $\sigma_z^\circ = \sigma_3^\circ = 0$ (фиг. 2). Отметим, что при $\tau'_{xz} = \tau'_{yz} = 0$ уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} = 0 \tag{3.2}$$

Линеаризируя условие предельного состояния (1.3), найдем

$$\sigma_x' + \sigma_y' = a(\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z') \tag{3.3}$$

Пусть далее $\sigma_z' = 0$, тогда из (3.3) получим

$$\sigma_x' + \sigma_y' = 0 \tag{3.4}$$

Согласно (3.2), (3.4) будем иметь

$$\partial \sigma_x'/\partial x + \partial \tau'_{xy}/\partial y = 0, \quad \partial \tau'_{xy}/\partial x - \partial \sigma_x'/\partial y = 0 \tag{3.5}$$

Уравнения (3.5) являются статически определимыми и принадлежат к эллиптическому типу.

Из (2.8), (2.9), при $f = 0$ найдем

$$\varepsilon'_{xz} = \tfrac{1}{2} bz\,\partial\omega/\partial x, \quad \varepsilon'_{yz} = \tfrac{1}{2} bz\,\partial\omega/\partial y \tag{3.6}$$

Из (3.6), (3.1) при $\sigma_z^\circ = 0$ получим

$$\tau'_{xz} = \varphi_{xz}(xy)\,z, \quad \tau'_{yz} = \varphi_{yz}(xy)\,z \tag{3.7}$$

$$\varphi_{xz} = \frac{\sigma_x^\circ b}{2(\varepsilon_x^\circ - \varepsilon_z^\circ)}\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad \varphi_{yz} = \frac{\sigma_x^\circ b}{2(\varepsilon_y^\circ - \varepsilon_z^\circ)}\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

Согласно (3.4), (3.7), уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \varphi_{xz} = 0, \quad \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x'}{\partial y} + \varphi_{yz} = 0 \tag{3.8}$$

$$\partial \varphi_{xz}/\partial x + \partial \varphi_{yz}/\partial y = 0$$

Полагая $\varepsilon_x^\circ = \varepsilon_y^\circ$, третье уравнение (3.8) перепишем, согласно (3.7), (2.9), в виде

$$\partial^2\omega/\partial x^2 + \partial^2\omega/\partial y^2 = 0 \tag{3.9}$$

Функции u, v гармонические, следовательно, функция ω (2.9) также гармоническая и уравнение (3.9) тождественно удовлетворяется. Для определения напряженного состояния имеют место два первых уравнения (3.8), функции ω, φ_{xz}, φ_{yz} (2.9), (3.7) определяются из кинематических соотношений.

В качестве возмущенного состояния могут быть рассмотрены аналитические функции $Z(z) = u + iv$, не имеющие особенностей внутри контура пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 013-16520).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д. Д.* Об уравнениях линеаризованных пространственных задач теории идеальной пластичности//Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 6. С. 1232—1235.

2. *Ишлинский А. Ю.* Гипотеза прочности формоизменения//Учен. зап. МГУ. 1940. Вып. 46. С. 117—124.

3. *Ивлев Д. Д.* К теории предельного состояния пластических пористых тел//Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 163—166.

4. *Артемьев И. Т., Ивлев Д. Д.* Линеаризованные уравнения теории идеальной пластичности//Изв. РАН. МТТ. 1993. № 5. С. 107—113.

Воронеж, Чебоксары

Поступила в редакцию
5.IX.1994