

УДК 539.3

© 1995 г. В. Г. ПОПОВ, А. Э. УЛАНОВСКИЙ

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ДЕФЕКТЫ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Некоторые задачи о взаимодействии плоских упругих волн с дефектами типа трещин или тонких жестких включений рассматривались ранее в [1—8]. Но авторы этих работ, как правило ограничивались исследованием напряженного состояния вблизи этих дефектов, которое часто проводилось [1, 4, 8] для случая, когда длина падающей волны велика по сравнению с длиной дефекта. Не проводились асимптотические оценки дифракционного поля на больших расстояниях от дефектов. Отсутствует сравнительный анализ полей напряжений и перемещений в случае дефектов различных типов. Последнее является важным при применении методов неразрушающего контроля для обнаружения дефектов и идентификации их типов.

В публикуемой работе проведены анализ и сравнение напряженного состояния вблизи дефектов и дифракционного поля для прямолинейных дефектов типа трещин и тонких жестких включений. При этом для решения соответствующих задач дифракции упругих волн применен новый метод, основанный на использовании разрывных решений двумерных уравнений динамической теории упругости.

1. Пусть в безграничной упругой среде, находящейся в условиях плоской деформации, и совершающей гармонические колебания с частотой ω , на отрезке $-a \leq x \leq a$ перемещения и напряжения терпят разрывы со скачками:

$$\langle \sigma_y \rangle = \chi_1(x), \langle \tau_{yx} \rangle = \chi_2(x), \langle v \rangle = \chi_3(x), \langle u \rangle = \chi_4(x) \quad (1.1)$$

$$\langle f(x, y) \rangle = f(x, +0) - f(x, -0), \quad -a \leq x \leq a$$

Множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен.

Решение двумерных уравнений динамической теории упругости, описывающих колебания упругой среды в условиях плоской деформации, удовлетворяющие условиям излучения [9] и терпящие разрывы со скачками (1.1), будем называть разрывными решениями этих уравнений с разрывами сосредоточенными на отрезке. Такое разрывное решение построено в [10] и может быть представлено в виде

$$T(x, y) = \int_{-a}^a G(\eta - x, y) Z(\eta) d\eta \quad (1.2)$$

$$T(x, y) = [t_j(x, y)] = [\sigma_y, \tau_{yx}, v, u]', \quad Z(x) = [\chi_j(x)] \quad (j = \overline{1, 4})$$

$$G(\eta - x, y) = \{G_{ij}(\eta - x, y)\} \quad (i, j = \overline{1, 4})$$

$$G_{11} = G_{33} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - 2 \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right]$$

$$G_{12} = G_{43} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - 2 \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 G_{13} &= \frac{\mu}{\kappa_2^2} \left[- \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 r_1 + 4 \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right] \\
 G_{14} = G_{24} &= \frac{2\mu}{\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (r_1 - r_2) \\
 G_{21} = G_{34} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right] \\
 G_{22} = G_{44} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[- 2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right] \\
 G_{31} &= \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \left[\left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right] \\
 G_{42} &= \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \left[- \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right] \\
 G_{32} = G_{41} &= - \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (r_1 - r_2), \quad \kappa_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
 r_j(\eta - x, y) &= - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\gamma_j(\alpha) |y|]}{2\gamma_j(\alpha)} \exp[-i\alpha(x - \eta)] d\alpha \\
 \gamma_j(\alpha) &= (\alpha^2 - \kappa_j^2)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Так как, согласно условиям излучения [9] волны определяемые решением (1.2), (1.4) должны быть затухающими при удалении от линии разрыва или уходящими от нее, то выбор ветвей многозначных функций $\gamma_j(\alpha)$ осуществляется следующим образом:

$$\gamma_j(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2}, \quad |\alpha| \geq \kappa_j, \quad \gamma_j(\alpha) = -i\sqrt{\kappa_j^2 - \alpha^2}, \quad |\alpha| < \kappa_j \tag{1.5}$$

При таком выборе интеграл (1.4) может быть вычислен и равен

$$r_j(x, y) = - \frac{1}{4} i H_0^{(1)}[\kappa_j(x^2 + y^2)^{1/2}]$$

Для исследования волнового поля на больших расстояниях от линии разрыва найдем асимптотическое представление для перемещений $v = t_3(x, y)$, $u = t_4(x, y)$, определенных формулами (1.2), (1.4). С этой целью используя (1.3), (1.4) представим перемещения в виде

$$v = t_3(x, y) = t_{31}(x, y) + t_{32}(x, y), \quad u = t_4(x, y) = t_{41}(x, y) + t_{42}(x, y) \tag{1.6}$$

$$t_{lk} = \sum_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{lj}^{(k)}(\alpha) \bar{\gamma}_j(\alpha) \exp[i\alpha x - \gamma_k(\alpha) |y|] d\alpha \quad (l = 3, 4; k = 1, 2)$$

$$\bar{\gamma}_j(\alpha) = \int_{-a}^a \chi_j(\eta) e^{-i\alpha\eta} d\eta \quad (j = \overline{1, 4})$$

$$\Phi_{31}^{(1)}(\alpha) = \frac{\gamma_1(\alpha)}{4\mu\pi\kappa_2^2}, \quad \Phi_{31}^{(2)} = - \frac{\alpha^2}{4\mu\pi\kappa_2^2\gamma_2(\alpha)}$$

$$\Phi_{32}^{(1)}(\alpha) = - \Phi_{32}^{(2)}(\alpha) = - \frac{\text{sign}(y) \cdot \alpha}{4\pi\kappa_2^2}$$

$$\Phi_{33}^{(1)}(\alpha) = -\frac{\text{sign}(y)}{4\pi\kappa_2^2} (2\alpha^2 - \kappa_2^2) \quad (1.7)$$

$$\Phi_{33}^{(2)}(\alpha) = -\frac{i\alpha(2\alpha^2 - \kappa_2^2)}{4\pi\kappa_2^2\gamma_2(\alpha)}, \quad \Phi_{41}^{(1)}(\alpha) = \Phi_{32}^{(1)}(\alpha)$$

$$\Phi_{41}^{(2)}(\alpha) = \Phi_{32}^{(2)}(\alpha), \quad \Phi_{42}^{(1)}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{4\pi\mu\kappa_2^2\gamma_1(\alpha)}$$

$$\Phi_{42}^{(2)}(\alpha) = \frac{\gamma_2(\alpha)}{4\pi\mu\kappa_2^2}, \quad \Phi_{43}^{(1)}(\alpha) = \frac{i\alpha(2\alpha^2 - \kappa_2^2)}{4\pi\kappa_2^2\gamma_1(\alpha)}$$

$$\Phi_{43}^{(2)}(\alpha) = -\frac{i\alpha\gamma_2(\alpha)}{2\pi\kappa_2^2}, \quad \Phi_{44}^{(1)}(\alpha) = \frac{\text{sign}(y)}{2\pi\kappa_2^2} \alpha^2$$

$$\Phi_{44}^{(2)}(\alpha) = -\frac{\text{sign}(y)}{4\pi\kappa_2^2} (2\alpha^2 - \kappa_2^2)$$

При этом функции t_{ll} определяют перемещения, вызванные распространяющейся от линии разрыва продольной волной, а t_{l2} поперечной ($l = 3, 4$).

Перейдем в (1.6) к полярным координатам: $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и преобразуем интегралы, входящие в (1.6), к виду

$$I_{lj}^{(k)}(R, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{lj}^{(k)}(\alpha) \bar{\gamma}_j(\alpha) e^{Rq_k(\alpha)} d\alpha, \quad q_k(\alpha) = i\alpha \cos \eta - \gamma_k(\alpha) |\sin \theta| \quad (1.8)$$

Интегралы (1.8) могут быть представлены в виде контурных интегралов [9]:

$$I_{lj}^{(k)}(R, \theta) = - \int_{L_k} \Phi_{lj}^{(k)}(\alpha) \bar{\gamma}_j(\alpha) \exp[Rq_k(\alpha)] d\alpha \quad (1.9)$$

Контур L_k охватывает точку $\alpha = \kappa_k$, концами уходит в бесконечность и является разрезом в комплексной плоскости α , обеспечивающим выбор однозначной ветви функции $\gamma_k(\alpha)$, согласно (1.5).

Интеграл (1.9) может быть вычислен асимптотически [9, 11] по формуле

$$I_{lj}^{(k)}(R) = \left(\frac{2\pi}{R |q_k''(\alpha_{0k})|} \right)^{1/2} \Phi_{lj}^{(k)}(\alpha_{0k}) \bar{\gamma}_j(\alpha_{0k}) \exp[Rq_k(\alpha_{0k}) + i \frac{\pi}{4} \text{sign}\{\text{Im}(q_k''(\alpha_{0k}))\}] + O(R^{-3/2}) \quad (1.10)$$

Здесь α_{0k} — седловая точка функции $q_k(\alpha)$, т. е. корень уравнения $q_k'(\alpha) = 0$.

В результате находим $\alpha_{0k} = \kappa_k \cos \theta$, $q_k(\alpha_{0k}) = i\kappa_k$, $q_k''(\alpha_{0k}) = -i/(\kappa_k \sin^2 \theta)$.

Вычисляем интегралы (1.9) по формулам (1.10) и подставляем их значения в (1.6). Тогда получим

$$t_{lk}(R, \theta) = - \left(\frac{2}{\pi R \kappa_k} \right)^{1/2} E_k \sum_{j=1}^4 \Phi_{lj}^{(k)}(-\kappa_k \cos \theta) \bar{\gamma}_j(-\kappa_k \cos \theta) + O(R^{-3/2}) \quad (1.11)$$

$$E_k = \exp[i(R\kappa_k - \pi/4)] \quad (k = 1, 2; l = 3, 4)$$

Построенное разрывное решение (1.2)—(1.3) может быть эффективно применено к решению задач о дифракции упругих волн на прямолинейных дефектах.

2. Пусть упругая плоскость содержит трещину или тонкое жесткое включение, расположенное на отрезке $y=0$, $-a \leq x \leq a$. В среде распространяются плоские продольные или поперечные упругие волны, заданные соответственно потенциалами

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{A}{\kappa_1} e_1(x, y), \quad \psi_0(x) = \frac{B}{\kappa_2} e_2(x, y) \\ e_k(x, y) &= \exp [i\kappa_k (x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

где θ_0 — угол между направлением распространения волны и осью x .

Если дефектом является тонкое жесткое включение, то на отрезке $y=0$, $-a \leq x \leq a$ терпят разрывы только напряжения [12]:

$$\langle \sigma_y \rangle = \chi_1(x), \quad \langle \tau_{yx} \rangle = \chi_2(x), \quad \langle v \rangle = 0 \quad (2.2)$$

$$\langle u \rangle = 0, \quad x \in [-a, a]$$

Кроме того выполняются условия полного сцепления включения со средой

$$v(x, \pm 0) = \delta_1 + \gamma x, \quad u(x, \pm 0) = \delta_2, \quad x \in [-a, a] \quad (2.3)$$

где δ_1 , δ_2 — поступательные перемещения, γ — угол поворота включения.

Условия (2.3) эквивалентны следующим:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, \pm 0) = \gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, \pm 0) = 0, \quad x \in [-a, a]$$

$$v(-a, \pm 0) = \delta_1 - \gamma a, \quad u(-a, \pm 0) = \delta_2 \quad (2.4)$$

Движение включения в среде описывается уравнениями

$$-m\delta_j\omega^2 = \int_{-1}^1 \chi_j(\eta) d\eta, \quad -\frac{4}{3}ma^2\omega^2\gamma = \int_{-1}^1 \eta\chi_1(\eta) d\eta \quad (j = 1, 2) \quad (2.5)$$

где m — масса включения.

В случае же когда дефектом является трещина, то на отрезке $y=0$, $-a \leq x \leq a$, терпят разрывы перемещения

$$\langle \sigma_y \rangle = \langle \tau_{yx} \rangle = 0, \quad \langle v \rangle = \chi_3(x), \quad \langle u \rangle = \chi_4(x), \quad x \in [-a, a] \quad (2.6)$$

Берега трещины свободны от напряжений

$$\sigma_y(x, \pm 0) = 0, \quad \tau_{yx}(x, \pm 0) = 0 \quad (2.7)$$

и выполнены условия замкнутости [12]

$$\int_{-a}^a \chi_j'(x) dx = 0 \quad (j = 3, 4) \quad (2.8)$$

Представим поле перемещений и напряжений в упругой плоскости, содержащей включение в виде

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_0(x, y) \quad (2.9)$$

а в плоскости содержащей трещину аналогично

$$T(x, y) = T_2(x, y) + T_0(x, y) \quad (2.10)$$

В этих формулах

$$T_m(x, y) = [t_j^m(x, y)] = [\sigma_y^m, \tau_{yx}^m, v^m, u^m]' \quad (m = 0, 1, 2)$$

Вектор $T_1(x, y)$ — определяется разрывным решением (1.2) со скачками (2.2) и получается из формул (1.2), (1.3) при $\chi_3(x) = 0$, $\chi_4(x) = 0$. Вектор $T_2(x, y)$ определяется разрывным решением (1.2) со скачками (2.6) и получается из формул (1.2), (1.3) при $\chi_1(x) = 0$, $\chi_2(x) = 0$.

Компонентами вектора $T_0(x, y)$ являются напряжения и перемещения, вызванные распространяющейся в плоскости продольной или поперечной волной (2.1).

Если волна является продольной, то

$$\begin{aligned} \sigma_y^0 &= t_1^0 = \mu A \frac{1}{\xi} (2\xi^2 \cos^2 \theta_0 - 1) e^1(x, y) \\ \tau_{yx}^0 &= t_2^0 = -\xi A \mu \sin \theta_0 e_1(x, y), \quad \nu^0 = t_3^0 = iA \sin \theta_0 e_1(x, y) \\ u^0 &= t_4^0 = iA \cos \theta_0 e_1(x, y), \quad \xi = \kappa_1 / \kappa_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

В случае поперечной волны (2.1) имеют место формулы

$$\begin{aligned} \sigma_y^0 &= t_1^0 = \mu B \kappa_2 \sin \theta_0 e_2(x, y) \\ \tau_{yx}^0 &= t_2^0 = \mu B \kappa_2 (2 \cos^2 \theta_0 - 1) e_2(x, y) \\ \nu^0 &= t_3^0 = -iB \cos \theta_0 e_2(x, y), \quad u^0 = t_4^0 = iB \sin \theta_0 e_2(x, y) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Теперь условия (2.4) на включении примут следующий вид:

$$\begin{aligned} t_3^0(x, \pm 0) &= \gamma - t_1^0(x, \pm 0), \quad t_4^0(x, \pm 0) = -t_2^0(x, \pm 0) \\ t_3^0(-a, \pm 0) &= \delta_1 - \gamma a - t_3^0(-a, \pm 0) \\ t_4^0(-a, \pm 0) &= \delta_2 - t_4^0(-a, \pm 0) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналогично, в случае трещины из (2.7) получим

$$t_1^0(x, \pm 0) = -t_1^0(x, \pm 0), \quad t_2^0(x, \pm 0) = -t_2^0(x, \pm 0) \quad (2.14)$$

При этом из (1.2), (1.4) следуют формулы

$$t_j^0(x, \pm 0) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{-a}^a \chi_{j-2}(\eta) [a_{ij} \ln |\eta - x| + G_{ij}(\eta - x)] d\eta \quad (j = 3, 4) \quad (2.15)$$

$$t_j^0(x, \pm 0) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-a}^a \chi_{j+2}'(\eta) \left[\frac{a_{2j}}{\eta - x} + G_{2j}(\eta - x) \right] d\eta \quad (j = 1, 2) \quad (2.16)$$

$$a_{21} = a_{22} = 2(1 - \xi^2), \quad a_{13} = a_{14} = \frac{1 + \xi^2}{2}, \quad \xi^2 = \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} \quad (2.17)$$

$$G_{jk}(z) = g_{jk}^0(z) + g_{jk}^1(z) + ig_{jk}^2(z) \quad (j = 1, 2; k = \overline{1, 4})$$

$$g_{13}^0(z) = \frac{1}{\kappa_2^2} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \frac{\alpha^2 \cos \alpha z}{\gamma_1(\alpha)} d\alpha, \quad g_{14}^0(z) = -\frac{1}{\kappa_2^2} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \gamma_1(\alpha) \cos \alpha z d\alpha$$

$$g_{21}^0(z) = -\frac{1}{\kappa_2^2} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \frac{(2\alpha^2 - \kappa_2^2)^2}{2\gamma_1(\alpha)} \sin \alpha z d\alpha$$

$$g_{22}^0(z) = \frac{1}{\kappa_2^2} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} 4\alpha^2 \gamma_1(\alpha) \sin \alpha z d\alpha, \quad g_{13}^1(z) = p_1(z) + q_2(z)$$

$$g_{14}^1(z) = p_2(z) + q_1(z), \quad g_{21}^1(z) = s_1(z) + h_2(z)$$

$$g_{22}^1(z) = s_2(z) + h_1(z), p_k(z) = \frac{1}{\kappa_2^2} \int_0^{\kappa_2} \frac{\alpha^2 \cos \alpha z}{\sqrt{\kappa_k^2 - \alpha^2}} d\alpha$$

$$q_k(z) = \frac{1}{\kappa_2^2} \int_0^{\kappa_2} \sqrt{\kappa_k^2 - \alpha^2} \cos \alpha z d\alpha, \quad s_k(z) = -\frac{1}{\kappa_2^2} \int_0^{\kappa_2} \frac{(2\alpha^2 - \kappa_k^2)^2}{\alpha \sqrt{\kappa_k^2 - \alpha^2}} d\alpha$$

$$h_k(z) = -\frac{1}{\kappa_2^2} \int_0^{\kappa_2} 4\alpha \sqrt{\kappa_k^2 - \alpha^2} \sin \alpha z d\alpha \quad (k = 1, 2)$$

$$q_{1k}^\infty(z) = -a_{k1} [\text{ci}(Az) + \ln |z|] + \sum_{j=1}^3 \kappa_k^{2j-2} a_{kj} e_{j+1}(z) +$$

$$+ \frac{1}{\kappa_2^2} \int_{\kappa_2}^A \frac{S(\alpha)}{\gamma_{k-2}(\alpha)} \cos \alpha z d\alpha \quad (k = 3, 4)$$

$$g_{2k}^\infty(z) = -2a_{k2} \frac{\sin(1/2Az)}{z} - \sum_{j=1}^3 \kappa_k^{2j} a_{kj+1} i_j(z) -$$

$$- \frac{1}{\kappa_2^2} \int_{\kappa_2}^A \frac{R(\alpha)}{\alpha \gamma_k(\alpha)} \sin \alpha z d\alpha \quad (k = 1, 2)$$

$$S(\alpha) = \alpha^2 - \gamma_1 \gamma_2, \quad R(\alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_2^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2$$

При получении выражений для g_{1k}^∞ и g_{2k}^∞ , были использованы асимптотические разложения для функций

$$\frac{S(\alpha)}{\gamma_k(\alpha)} = \kappa_2^2 \sum_{j=1}^4 a_{k+2j} \kappa_2^{2j-2} \alpha^{1-2j} + O(\alpha^{-9})$$

$$\frac{R(\alpha)}{\alpha \gamma_k(\alpha)} = \kappa_2^2 \sum_{j=1}^4 a_{kj} \kappa_2^{2j-2} \alpha^{2-2j} + O(\alpha^{-7})$$

которыми они заменялись при $\alpha > A$, где A — достаточно большое положительное число.

Возникающие при этом интегралы

$$e_j(z) = \int_A^{+\infty} \alpha^{1-2j} \cos \alpha z d\alpha, \quad i_j(z) = \int_A^{+\infty} \alpha^{-2j} \sin \alpha z d\alpha$$

определены в таблицах [13].

Подставив (2.15) в (2.13) получим интегральные уравнения задачи дифракции упругих волн на включении

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_j(\tau) \left[\frac{a_{1j+2}}{\tau-1} + K_j(\tau-t) \right] d\tau = f_j(t) \quad (j = 1, 2) \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_j(\tau) [a_{1j} \ln |\tau+1| + K_{0j}(\tau+1)] d\tau = f_{0j}$$

$$\eta = a\tau, \quad x = at, \quad \varphi_j(\tau) = \frac{\chi_j(a\tau)}{\mu} \quad (j = 1, 2)$$

$$K_j(\tau-t) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} G_{1j}(a(\tau-t)), \quad K_{0j}(\tau+1) = G_{1j}(a(\tau+1))$$

$$f_j(t) = \gamma - t_1^0(at, \pm 0) \quad (j = 1, 2)$$

$$f_{01} = \varepsilon_1 - \gamma - \frac{1}{a} t_3^0 (-a, \pm 0), \quad \varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{a}$$

$$f_{02} = \varepsilon_2 - \frac{1}{a} t_4^0 (-a, \pm 0), \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{a}$$

К уравнениям (2.18) необходимо добавить равенства полученные из уравнений движения (2.5):

$$- \varepsilon_j m_0 \chi_0^2 = \int_{-1}^1 \varphi_j(\tau) d\tau, \quad - \frac{4}{3} \gamma m_0 \chi_0^2 = \int_{-1}^1 \tau \varphi_1(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

$$m_0 = m/(\rho a^2) \quad (j = 1, 2), \quad x_0 = ax_2$$

где ρ — плотность среды, m — масса включения.

При подстановке (2.16) в (2.14) получим интегральные уравнения задачи дифракции упругих волн на трещине

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_j(\tau) \left[\frac{a_{2j-2}}{\tau-t} + K_j(\tau-t) \right] d\tau = f_j(t) \quad (2.20)$$

$$K_j(\tau-t) = G_{2j-2}(a(\tau-t)), \quad \varphi_j(\tau) = \chi_j'(a\tau)$$

$$f_j(t) = -t_{j-2}^0(at, \pm 0) \quad (j = 3, 4).$$

Уравнение (2.20) необходимо рассматривать совместно с равенствами

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(\tau) d\tau = 0 \quad (j = 3, 4) \quad (2.21)$$

Функции в уравнениях (2.18) и (2.20) определяются формулами (2.11) в случае распространения продольной волны, и формулами (2.12) если волна является поперечной.

Решения уравнений (2.18), (2.20) представим в виде:

$$\varphi_j(\tau) = \psi_j(\tau) (1 - \tau^2)^{-1/2} \quad (j = 3, 4) \quad (2.22)$$

а функции $\psi_j(\tau)$ аппроксимируем интерполяционными многочленами

$$\psi_j(\tau) = L_{nj}(\tau) = \sum_{l=1}^n \psi_j(\tau_l) \frac{P_n(\tau)}{(\tau - \tau_l) P_n'(\tau_l)} \quad (j = \overline{1, 4}) \quad (2.23)$$

$$P_n(\tau) = P_n^{-1/2-1/2}(\tau), \quad \tau_l = \cos \frac{2l-1}{2n} \pi \quad (l = \overline{1, n})$$

где $P_n(\tau)$ — многочлен Якоби, а τ_l корни этого многочлена.

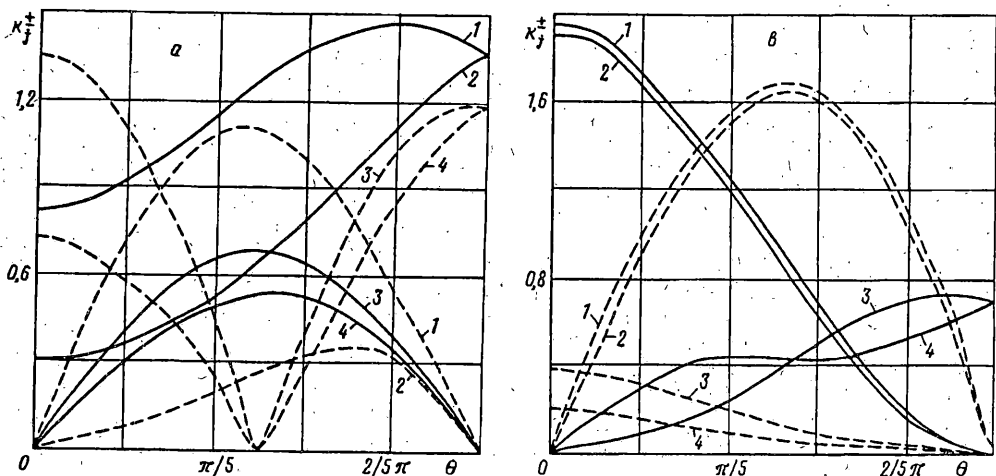
Тогда заменяя интегралы типа Коши квадратурными формулами из [14], а регулярные интегралы по формуле Гаусса [15], в случае включения, из (2.18), (2.19) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^n b_l \psi_j(\tau_l) \left[\frac{a_{l+j}}{\tau_l - t_m} + K_j(\tau_l - t_m) \right] = f_j(t_m) \quad (m = \overline{1, n-1}) \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^n b_l \psi_j(\tau_l) [a_{l+j} \ln(\tau_l + 1) + K_{0j}(\tau_l + 1)] = f_{0j}$$

$$- \varepsilon_j m_0 \chi_0^2 = \sum_{l=1}^n b_l \psi_j(\tau_l), \quad - \frac{4}{3} \gamma m_0 \chi_0^2 = \sum_{l=1}^n b_l \tau_l \psi_j(\tau_l)$$

$$t_m = \cos \frac{m\pi}{n}, \quad b_l = \frac{\pi}{n} \quad (l = \overline{1, n}; j = 1, 2)$$



Фиг. 1

В случае трещины из (2.20) аналогично находим

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n b_i \psi_j(\tau_i) \left[\frac{a_{2j}}{\tau_i - t_m} + K_j(\tau_i - t_m) \right] = f_j(t_m) \quad (2.25)$$

$$\sum_{i=1}^n b_i \psi_j(\tau_i) = 0. \quad (m = \overline{1, n-1}, j = 3, 4)$$

Системы уравнений (2.24), (2.25) позволяют определить параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$, описывающие движение включения в упругой среде, а также значения $\psi_j(\tau_i)$ ($l = \overline{1, n}; j = \overline{1, 4}$) неизвестных функций в узлах интерполяции. Сами эти функции, а значит и неизвестные скачки на дефекте могут быть приближенно найдены по формулам (2.22), (2.23). Зная скачки по формулам (2.9), (2.10) найдем перемещения и напряжения в среде с дефектом.

Величинами характеризующими напряженное состояние среды вблизи дефекта типа трещины или тонкого жесткого включения являются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) [16], [17]:

$$K_{1,2}^{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm a \pm 0} \sqrt{x \mp a} (\sigma_y(x, \pm 0), \tau_{yx}(x, \pm 0))$$

Для их вычисления получены формулы:

$$k_j^{\pm} = \frac{K_j^{\pm}}{\mu \sqrt{a}} = d_j L_{j-1}(\pm 1), \quad k_j^{\pm} = \frac{K_j^{\pm}}{\mu \sqrt{a}} = d_{j+2} L_{j+2n}(\pm 1)$$

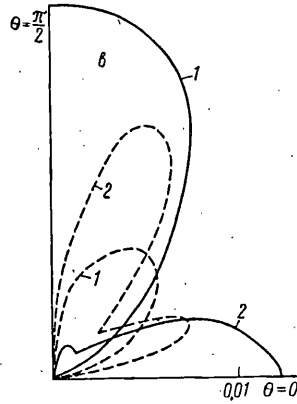
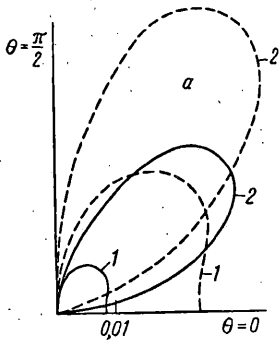
$$d_1 = d_2 = \xi^2, \quad d_3 = d_4 = 2(\xi^2 - 1) \quad (j = \overline{1, 2}) \quad (2.26)$$

По первой формуле (2.26) получаем значение КИН для жесткого включения, по второй для трещины, $L_{nj}(t)$ определены в (2.23).

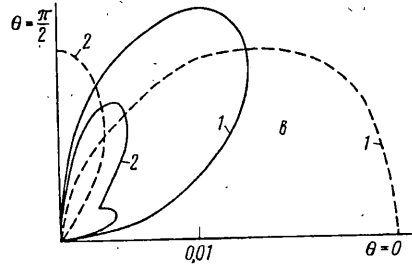
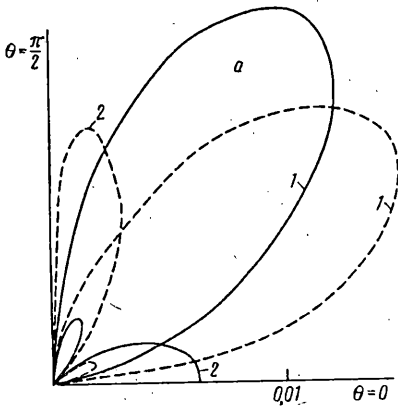
При помощи формул (2.23) исследована зависимость КИН от угла падения волны θ_0 при следующих данных: $\kappa_0 = 1, m_0 = 1, \nu = 0,25$.

Если рассматривается случай распространения волны расширения, то считаем: $\alpha = A/a = 1, \beta = B/a = 0$.

В случае распространения волны сдвига, наоборот $\alpha = 0, \beta = 1$. На фиг. 1, а, в приведены зависимости абсолютных значений КИН $|k_j^{\pm}|$ ($j = \overline{1, 2}$) для дефектов различных типов и различных волн. На фиг. 1, а — зависимости для случая трещины, на фиг. 1, в — зависимости для случая включения. Сплошные линии соответствуют распространению волны расширения, штриховые — распространению поперечных волн.



Фиг. 2



Фиг. 3

Кривые 1, 2 на фиг. 1, а, в показывают зависимость $|k_1^\pm|$. Кривые 3, 4 на фиг. 1, а соответствуют $|k_2^\pm|$, а на фиг. 1, в — $10|k_2^\pm|$.

Видно, что при изменении угла падения волны в указанном диапазоне для трещины $|k_1^-| \geq |k_1^+|$ и $|k_2^+| \geq |k_2^-|$, независимо от типа распространяющейся волны.

Для включения также $|k_1^-| \geq |k_1^+|$, но их значения отличаются друг от друга не так существенно, как в случае трещины.

При помощи формул (1.11) проведено исследование перемещений на больших расстояниях от дефектов. В случае включения получаем

$$\frac{t_{mk}^I(R, \theta)}{a} = - \left(\frac{2}{\pi R \chi_k} \right)^{1/2} E_k \sum_{j=1}^2 \Phi_{mj}^{(k)}(-\chi_k \cos \theta) \sigma_{jk}(\theta) + O(R^{-3/2})$$

в случае трещины

$$\frac{t_{mk}^2(R, \theta)}{a} = - \left(\frac{a}{\pi R \chi_k} \right)^{1/2} E_k \sum_{j=3}^4 \Phi_{mj}^{(k)}(-\chi_k \cos \theta) \sigma_{jk}(\theta) + O(R^{-3/2})$$

$$\sigma_{jk}(\theta) = \frac{\pi}{n} \sum_{l=1}^n \psi_l(\tau_l) \exp[-i\chi_k a \tau_l \cos \theta] \quad (j = 1, 2) \quad (2.27)$$

$$\sigma_{jk}(\theta) = \frac{-i}{\pi n \cos \theta} \sum_{l=1}^n \psi_l(\tau_l) \exp[-i\chi_k a \tau_l \cos \theta] \quad (j = 3, 4)$$

По формулам (2.26), (2.27) вычислялись абсолютные величины перемещений, вызванных отраженными от дефекта продольными волнами: $V_1 = |t_{31}^p|$, $U_1 = |t_{41}^p|$ ($p = 1, 2$), а также поперечными: $V_2 = |t_{32}^0|$, $U_2 = |t_{42}^p|$ ($p = 1, 2$).

При этом значение $p = 1$ соответствует включению, а $p = 2$ — трещине.

На фиг. 2, а, в, 3а, в показана зависимость этих величин от полярного угла θ при следующих данных: $\kappa_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/2$, $R_0 = \kappa_0 R = 1000$.

При этом фиг. 2 соответствует случаю падения на дефект продольной волны (2.1) ($\alpha = 1$, $\beta = 0$), а фиг. 3 — случаю поперечной волны (2.1) ($\alpha = 0$, $\beta = 1$).

Графики на фиг. 2, а, 3, а соответствуют случаю трещины, а графики на фиг. 2, в, 3, в случаю жесткого включения. Сплошной линией отмечены кривые для перемещений V_k , штриховой для перемещений U_k ($k = 1, 2$). Кривые с номером 1 соответствуют перемещениям вызванным отраженной продольной волной ($k = 1$), а кривые с номером 2 ($k = 2$) — перемещениям вызванным отраженной от дефекта поперечной волной. На фиг. 3, а сплошная линия 2 показывает изменение величины $10^{-1} \cdot V_2$, а штриховая соответствует величине $10^{-1} \cdot U_2$. На фиг. 3, в штриховая кривая 1 также показывает изменение величины $10^{-1} \cdot U_2$.

Приведенные результаты показывают, что поле перемещений отраженной волны существенно зависит от вида дефекта и типа падающей волны. Так при падении на дефект продольной волны фиг. 2, в, в случае включения наибольшие вертикальные перемещения, вызванные отраженной продольной волной, наблюдаются в направлении $\theta = \pi/2$, а в случае трещины фиг. 2, а, в направлении $\theta = \pi/4$.

Для перемещений V_2 , вызванных отраженной поперечной волной, максимум наблюдается в направлении $\theta = 0$ для включения и $\theta = \pi/4$ для трещины.

При дифракции на включении продольной волны для перемещений U_2 , отраженной поперечной волны характерно наличие двух максимумов (фиг. 2, в, штриховая кривая 2). При падении на дефект поперечной волны перемещения U_1 достигают максимального значения в направлении $\theta = \pi/4$ как в случае трещины так и включения (фиг. 3, а, в сплошные кривые 1). Что касается перемещений V_2 вызванных отраженной поперечной волной, то в случае трещины они достигают максимума в направлении $\theta = 0$, а в случае включения в направлении $\theta \simeq 65^\circ$.

Поведение перемещений U_1 и U_2 в зависимости от полярного угла θ также существенно отличается для дефектов различных типов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Великотный А. В., Сметанин Б. И. К задаче об установившихся колебаниях плоскости с разрезом. // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 189—192.
2. Глушко А. И. Дифракция продольной волны на жестком экране. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 88—95.
3. Зволинский Н. В., Шхинек К. Н., Чумиков Н. И. Взаимодействие плоской волны с разрезом в упругой среде. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1983. № 4. С. 36—46.
4. Thau S. A., Lu Tsing-Hwei. Transient stress intensitig factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave. // Int. ern. J. Solids and Struct. 1971. V. 7. P. 731—750.
5. Tan T. H. Scattering of plane, elastic waves by a plane crack of finit width. // Appl. Sci. Rez. 1977. V. 33. № 1. P. 75—88.
6. Tan T. H. Scattering of plane, elastic waves by a plane, rigid strip. // Appl. Sci. Rez. 1977. V. 33. № 1. P. 89—100.
7. Simons D. A. Scattering of elastic waves by thin inclusions. // J. Appl. Phys. 1980. V. 51. № 2. P. 934—940.

8. *Visscher William M.* Scattering of elastic waves from planar cracks in isotropic media.//J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 69. № 1. P. 50—53.
9. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
10. *Попов В. Г.* Применение разрывных решений в плоской динамической задаче теории упругости для слоисто-однородных тел.//Гидроаэромеханика и теория упругости. Нелинейные задачи механики идеальных, вязкоупругих и упругопластических сред. Днепропетровск: ДГУ, 1990. С. 93—97.
11. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 547 с.
12. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
13. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
14. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
15. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
16. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение, 1985. 263 с.
17. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких включений и трещин в деформируемом теле. Киев.: Наук. думка, 1983. 288 с.

Одесса

Поступила в редакцию
8. II. 1993