

УДК 539.3

© 1995 г. Ш. М. ТАХИРОВ

ДВУХКРАТНАЯ ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ НА МАССИВНОЙ ПОЛОСЕ,
РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается плоская задача дифракции нестационарной волны на массивной жесткой полосе, лежащей на трансверсально-изотропном полупространстве. Считается, что ось трансверсальной изотропии перпендикулярна поверхности полупространства и волна падает на полосу нормально к ее щеле.

Задача решается в безразмерных переменных, в которых половина ширины полосы, плотность среды, скорость квазипродольной волны в направлении оси трансверсальной изотропии есть единица, а скорость распространения квазиперечной волны в том же направлении равна \sqrt{d} . Свойства среды также характеризуются безразмерным параметром c , который в изотропном случае выражается через d : $c = 1 - d$.

Система координат выбрана следующим образом. Начало координат совпадает с точкой на левом ребре полосы, ось абсцисс лежит на поверхности полупространства и ортогональна ребрам полосы, ось ординат перпендикулярна поверхности среды и направлена в ее глубину.

Движение среды описывается уравнениями [1] (u, v — компоненты вектора перемещения среды, $w = w(u, v, 0)$):

$$u_{,xx} + du_{,yy} + cv_{,xy} = u_{,tt}, \quad cu_{,xy} + dv_{,xx} + v_{,yy} = v_{,tt} \quad (1)$$

Граничные условия при $y = 0$ заданы в виде (полоса считается гладкой):

$$\sigma_{xy} = 0, \quad v = V(t) \quad (0 < x < 2) \quad (2)$$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0 \quad (x < 0, x > 2)$$

где $V(t)$ — неизвестное перемещение в вертикальном направлении, являющееся решением уравнения

$$m\ddot{V}(t) = R(t) \quad (3)$$

Здесь m — безразмерная погонная масса полосы, $R(t)$ — безразмерная погонная сила (определяемая из решения дифракционной задачи), действующая на полосу в том же вертикальном направлении.

В окрестности ребер полосы требуется выполнение условия на ребре

$$w = \text{const} + O(r^\varepsilon), \quad r \rightarrow 0 \quad (\varepsilon > 0) \quad (4)$$

постановка задачи замыкается заданием соотношений между напряжениями и перемещениями

$$\sigma_{yy} = (c - d)u_{,x} + v_{,y}, \quad \sigma_{xy} = d(u_{,y} + v_{,x}) \quad (5)$$

Падающая волна для выбранного направления распространения является чисто продольной ($v_0(\xi)$) — произвольная заданная функция):

$$u_0 = 0, \quad v_0 = v_0(t + y)$$

$$(v_0(\xi) = 0, \quad \xi < 0; \quad v_0(\xi) \neq 0, \quad \xi \geq 0)$$

Решение задачи ищется в виде суммы падающей, отраженной и дифрагированных волн, поэтому граничные условия для функций, характеризующих состояние среды внутри дифракционных областей (эти функции помечены индексом p), имеют вид

$$\sigma_{xy}^p = 0, \quad v^p = f(t) \quad (0 < x < 2)$$

$$\sigma_{xy}^p = 0, \quad \sigma_{yy}^p = 0 \quad (x < 0, x > 2) \quad (6)$$

$$f(t) = V(t) - 2v_0(t)$$

Ограничимся временем возникновения вторично дифрагированных волн, тогда можно решать задачу о дифракции плоской волны на полуплоскости $x > 0$, расположенной на поверхности анизотропного полупространства. В качестве модельной решается вспомогательная задача для $f(t) = H(t)$. Эта задача решается методом, аналогичным методу Винера — Хопфа для изотропных сред, с применением интегральных преобразований Лапласа по времени t (одностороннее преобразование с параметром s) и по координате x (двустороннее преобразование с параметром α):

$$\bar{g}(x, y; s) = \int_0^{\infty} g(x, y, t) \exp(-st) dt, \quad \text{Re } s > 0$$

$$\bar{g}^*(y; s, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x, y; s) \exp(-\alpha x) dx, \quad |\text{Re } \alpha| > \text{Re } s$$

$$(g = u, v, \sigma_{xy}, \sigma_{xx}, \sigma_{yy})$$

Применение этих преобразований к уравнениям движения сводит их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для изображений перемещений, соответствующих дифракционным волнам. Ограниченное на бесконечности решение этой системы имеет вид

$$\bar{u}^* = - \sum_{i=1}^2 c \alpha \mu_i C_i \exp(-\mu_i y) \quad (7)$$

$$\bar{v}^* = \sum_{i=1}^2 (d \mu_i^2 + \alpha^2 - s^2) C_i \exp(-\mu_i y)$$

$$\mu_i = s \lambda_i \quad (i = 1, 2), \quad \lambda_{1,2} = [B \mp \sqrt{B^2 - (1 - q^2)(1/d - q^2)}]^{1/2}$$

$$q = \alpha/s, \quad B = (1 + d - q^2 L)/(2d), \quad L = 1 + d^2 - c^2$$

где C_1, C_2 — функции параметров преобразований Лапласа α и s , подлежащие определению. Выбор ветвей последнего радикала описан в [2].

Подстановка (7) в граничные условия и исключение из них функций C_1, C_2 дает функциональное уравнение Винера — Хопфа ($y = 0$):

$$\bar{v}_-^* + \bar{v}_+^{*0} = \sqrt{1 - q^2} (\bar{\sigma}_{yy+}^* + \bar{\sigma}_{yy-}^{*0}) / (sG(q)) \quad (8)$$

$$G(q) = \{\sqrt{1/d - q^2} [q^2(1 - (d - c)^2) - 1] - \sqrt{1 - q^2}\} / (\lambda_1 + \lambda_2)$$

Индекс (+) поставлен у функций, аналитичных в правой полуплоскости $\text{Re } \alpha > \text{Re } s$, индекс (-) у функций, аналитичных в левой полуплоскости $\text{Re } \alpha < -\text{Re } s$, индекс (0) у функций означает то, что она известна из граничных условий.

Путем традиционных для метода Винера — Хопфа процедур удается факторизовать функциональное уравнение (8). Процедура факторизации производится дважды; окончательно с учетом поведения функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и теоремы Лиувилля выражение изображения нормального напряжения под полосой имеет вид

$$\bar{\sigma}_{yy+}^* = A/(\alpha K_-(0) K_+(q)) \quad (9)$$

$$A = d [1 - (c - d)^2]/L, \quad K_{\pm}(q) = \sqrt{1 \pm q} \exp(-I_{\pm})/(q \pm q_R)$$

где $1/q_R$ — скорость распространения волны Рэлея [1], т. е. эта величина есть решение уравнения Рэлея для трансверсально-изотропного полупространства, а выражение I_{\pm} определяется через интеграл, понимаемый в смысле главного значения:

$$J_+(q) = -\int_{1/\sqrt{d}}^1 \left[\arctg \frac{|\lambda_1(p)|}{\lambda_2(p)} + \arctg \frac{\sqrt{p^2 - 1}}{N \sqrt{1/d - p^2}} \right] \frac{dp}{\pi(p + q)}$$

$$J_-(q) = -J_+(-q), \quad N = p^2 [1 - (c - d)^2] - 1$$

Из последнего выражения, применяя обратные преобразования, находится искомая результирующая сила, которая имеет следующий вид:

$$R^h(t) = -2\delta(t) - DH(t), \quad D = -1 + 2/q_R + 2J_+'(0) \quad (10)$$

где D — константа, сложным образом зависящая от свойств среды.

Выражение (10) есть результирующая сила в модельной задаче, поэтому искомая сила должна определяться из полученной с помощью интеграла Дюамеля

$$R(t) = \int_0^t R^h(t - \tau) f'(\tau) d\tau$$

Следовательно, $R(t) = -2\dot{V} - DV + 4\dot{v}_0 + 2Dv_0$. Подставляя полученную силу в уравнение движения полосы, получим

$$m\ddot{V} + 2\dot{V} + DV = 4\dot{v}_0(t) + 2Dv_0(t).$$

Последнее уравнение по форме полностью совпадает с аналогичным, выписанным для изотропного полупространства в [3]. А при $c = 1 - d$ (т. е. для изотропной среды) константа совпадает с аналогичной константой в [3].

Для учета вторично дифрагированных волн достаточно рассмотреть дифракцию первично дифрагированных волн на одном из ребер полосы и определить результирующую силу. Окончательный результат получается простым удвоением последнего выражения.

Рассмотрим дифракцию первично дифрагированных волн, являющихся решением предыдущей задачи, на левом ребре полосы $x = 2$. Следовательно, можно рассматривать задачу дифракции на жесткой полубесконечной прямой, расположенной на полуоси $x < 2$. Переходя к новым координатам, в которых вершина полупрямой совпадает с началом координат: $x' = x - 2$, $y' = y$, $t' = t - 2$, получим, что перемещения среды следует искать в следующем виде:

$$u = u^s(t', x', y') + u^p(t, x, y)$$

$$v = v^s(t', x', y') + v_0(t - y) + v_0(t + y) + v^p(t, x, y)$$

где функция v_0 описывает профиль падающей чисто продольной волны, функция с индексом p — известные решения предыдущей задачи, а функция с индексом s — неизвестные функции, удовлетворяющие граничным условиям ($y = 0$):

$$\sigma_{xy}^s(t', x', 0) = 0, \quad u^s(t', x', 0) = 0 \quad (x' < 0)$$

$$\sigma_{xy}^s(t', x', 0) = 0, \quad \sigma_{yy}^s = -\sigma_{yy}^p(t, x, 0) \quad (x' > 0)$$

К приведенным граничным условиям следует добавить уравнения движения среды, условие на ребре и зависимость напряжений от перемещений среды.

Поставленная задача также решена при помощи метода Винера — Хопфа для анизотропной среды. При этом применено одностороннее преобразование Лапласа по t' и двустороннее преобразование Лапласа по координате x' . В качестве основного результата получена добавочная сила, действующая на полосу, начиная с момента времени $t = 2$ (естественно, до момента времени $t = 4$). Она имеет вид

$$R^s(t') = -D^s(V(t') - 2v_0(t'))$$

$$D^s = \frac{1}{F\pi} \left\{ \int_0^{\sqrt{d}} P \left(Q \frac{r_2}{r_1} - t^2 \right) \frac{dt}{g_1 + g_2} + \int_{\sqrt{d}}^1 P \left(Q r_2 \frac{g_1}{r_1} + g_2 t^2 \right) \frac{dt}{g_1^2 + g_2^2} \right\}$$

$$F = -t_R \exp \left\{ \int_{\sqrt{d}}^1 \left[\arctg \frac{g_1}{g_2} + \arctg \frac{t^2 r_1}{r_2 Q} \right] \frac{dt}{t} \right\}$$

$$P = t_R^2(t+1)/(t+t_R)^2, \quad r_1 = \sqrt{|t^2 - 1|}, \quad r_2 = \sqrt{|t^2/d - 1|}$$

$$Q = 1 - (c-d)^2 - t^2, \quad t_R = 1/q_R$$

$$g_{1,2} = [B_1 \mp \sqrt{B_1^2 - (t^2 - 1)(t^2/d - 1)}]^{1/2}, \quad B_1 = [(1+d)t^2 - L]/(2d)$$

Следовательно, уравнение движения полосы для момента времени t ($0 \leq t < 4$) имеет вид

$$m\ddot{V} + 2\dot{V} + D^*V = 4\dot{v}_0 + 2D^*v_0, \quad D^* = DH(t) + D^sH(t-2)$$

Значения константы D^* вычисляются при помощи метода Симпсона для различных значений \sqrt{c} при фиксированном \sqrt{d} . Доказано, что константы D и D^s могут различаться на порядок при больших значениях \sqrt{c} . На фигуре приведено сравнение двух констант: константы D и константы $D^* = D + D^s$. Сплошной линией показана константа D , что соответствует случаю, когда учитываются только первично дифрагированные волны; штриховой — константа D^* , которая получена с учетом вторично дифрагированных волн.

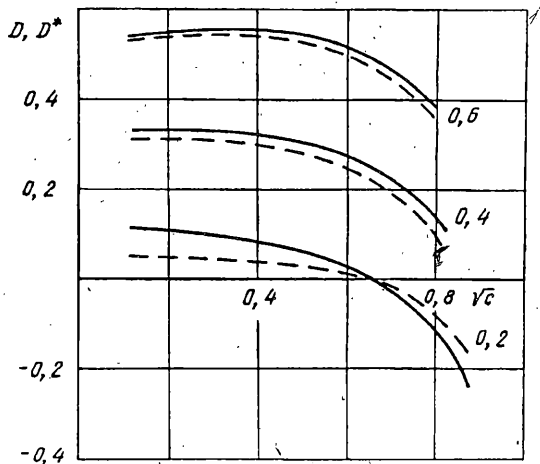
Уравнение движения полосы является обыкновенным дифференциальным уравнением с заданной правой частью. Решение таких уравнений находится и выписывается в явном аналитическом виде для произвольной правой части. Это решение для падающей волны ступеньки напряжения имеет вид ($v_0(t) = \sigma_0 t$):

$$V(t) = -2\sigma_0 [t - \exp(-\varepsilon t) \operatorname{sh}(\varepsilon b t) / (\varepsilon b)] \quad (0 \leq t < 2)$$

$$V(t) = -2\sigma_0 [t - \exp(-\varepsilon t) \{b^* \operatorname{sh}(2b\varepsilon) \operatorname{ch}(\varepsilon b^* t - 2)\} / b +$$

$$+ \operatorname{ch}(2b\varepsilon) \operatorname{sh}[\varepsilon b^* (t - 2)] / (b^* \varepsilon)] \quad (2 \leq t < 4)$$

$$b = \sqrt{1 - mD}, \quad b^* = \sqrt{1 - mD^*}, \quad \varepsilon = 1/m$$



Целью работы является определение влияния учета вторично дифрагированных волн на движение полосы. Численными исследованиями показано, что учет вторично дифрагированных волн незначительно влияет на кинематические и динамические характеристики движения полосы. Так, при $\sqrt{d} = 0,2$, $\sqrt{c} = 0,2$, $m = 0,5$ перемещение полосы изменяется на 0,3%, тогда как значения сил, действующих на полосу, практически не различаются. Результат работы хорошо согласуется с известными результатами для изотропной среды [3—5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела//Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. № 114. Вып. 17. С. 28—71.
2. Свекло В. А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела//ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 885—896.
3. Флитман Л. М. О движении под действием сейсмической волны жесткой массивной полосы, лежащей на упругом полупространстве//ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 1043—1058.
4. Dravinski M., Thau S. A. Multiple diffractions of elastic shear waves by a rigid rectangular foundation embeded in an elastic half-space//J. Appl. Mech. 1976. Trans. ASME. P. 295—299.
5. Dravinski M., Thau S. A. Multiple diffractions of elastic waves by a rigid rectangular foundation: plane-strain model//J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1976. P. 291—294.

Ташкент

Поступила в редакцию
3.IX.1993