

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. К. С. СУЛТАНОВ, Б. Э. ХУСАНОВ

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН НА ЖЕСТКОМ КЛИНЕ

Нестационарные задачи дифракции упругих волн на клине исследованы в [1—7]. Получены точные аналитические решения задач со смешанными граничными условиями, т. е. когда на гранях клина отсутствуют касательное напряжение и нормальное перемещение [1, 3—7], или нормальное напряжение и касательное перемещение [2, 5, 6]. В [8] клин рассматривается в виде полубесконечного разреза. В случае задания на гранях клина несмешанных условий (например, граничные условия задаются только для вектора перемещений или только для вектора напряжений) не удастся разделить граничные условия для потенциалов, что существенно затрудняет получение аналитического решения задачи. В таких случаях приходится применять численные методы решения.

В настоящей работе рассматривается плоская нестационарная задача о падении продольной упругой волны на клин вдоль его биссектрисы. Клин считается абсолютно жестким и не вовлекается в движение, а среда не отрывается от клина. Задача решается численно, методом конечных разностей. Метод решения обосновывается сопоставлением с точным решением, полученным в [6]. При падении плоской продольной волны в виде прямоугольного импульса для второй и третьей краевой задачи получено численное решение рассматриваемой задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим неограниченную упругую среду с начальной плотностью  $\rho_0$  и со скоростями распространения продольных и поперечных волн  $c_1$  и  $c_2$ , заполняющую внешность жесткого бесконечного клина произвольного угла раствора. Граница клина в плоскости  $x, y$  в декартовой системе координат задается в виде

$$y = \mp k(x - x_0), \quad x \geq x_0 \quad (1.1)$$

где ось  $x$  совпадает с биссектрисой клина,  $x_0 > 0$  — расстояния от начала координат до острия клина,  $k = \operatorname{tg} \beta$ ,  $2\beta$  — угол раствора клина.

Плоская продольная волна создается в начальном сечении  $x = 0$  путем задания скорости частиц среды в направлении  $x$  и изменяющейся по закону

$$v_x = v_{\max} \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

$$v_x = 0 \quad \text{при} \quad t > T$$

где  $v_{\max} = \operatorname{const}$  — значение задаваемой скорости,  $T$  — время ее действия. Начальные условия предполагаются нулевыми.

На границе упругой среды с клином рассматриваются классические граничные условия [9] в виде полного прилипания (вторая краевая задача)

$$v = 0 \quad (1.3)$$

или условия скольжения без трения (третья краевая задача)

$$v_n = 0, \quad \tau = 0 \quad (1.4)$$

где  $v_n$  и  $\tau$  — нормальная составляющая скорости и касательное напряжение вдоль ребер клина. В случае падения волны сжатия в виде бесконечного импульса, т. е. в соотношении (1.2) при  $T \rightarrow +\infty$  третья краевая задача совпадает с поставкой задачи [6], для которой получено аналитическое решение.

Уравнения движения упругой среды имеют вид

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{xx} = S_{xx} - (P + q), \quad \sigma_{yy} = S_{yy} - (P + q), \quad \sigma_{zz} = S_{zz} - (P + q) \quad (1.6)$$

где  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений;  $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ,  $S_{zz}$  — компоненты дивергента напряжений;  $P$  — давление;  $v_x$ ,  $v_y$  — компоненты вектора скорости;  $\rho$  — плотность;  $q$  — искусственная вязкость.

Система уравнений (1.5), (1.6) замыкается уравнениями неразрывности и уравнениями состояния среды

$$\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = \dot{V} / V \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{xx} &= 2\mu (\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{V}/3V), \quad \dot{S}_{yy} = 2\mu (\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{V}/3V), \quad \dot{S}_{zz} = 2\mu (0 - \dot{V}/3V) \\ \dot{\tau}_{xy} &= \mu \dot{\epsilon}_{xy}, \quad P = -K\dot{V}/V \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \partial v_x / \partial x, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \partial v_y / \partial y, \quad \dot{\epsilon}_{xy} = (\partial v_y / \partial x + \partial v_x / \partial y)$$

где  $\dot{\epsilon}_{xx}$ ,  $\dot{\epsilon}_{yy}$ ,  $\dot{\epsilon}_{xy}$  — компоненты тензора скоростей деформации,  $V = \rho_0/\rho$  — относительный объем,  $K = \lambda + 2\mu/3$  — модуль объемного сжатия,  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе. Точка над параметрами означает производную по времени.

Кроме того при решении систем (1.5) следует учесть условие на ребре

$$v = 0 \text{ при } y \rightarrow \mp k(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 \quad (1.9)$$

которое обеспечит интегрируемость скорости и напряжений в окрестности ребра, а также единственность решения поставленной задачи [6].

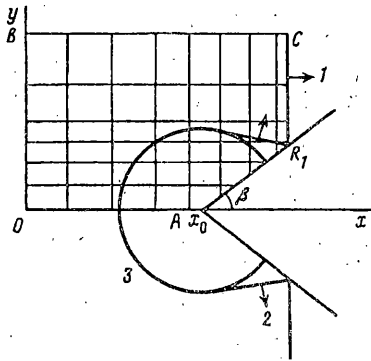
**2. Метод решения.** Рассматриваемая задача решается конечноразностным методом по схеме, предложенной Уилкинсом [10]. Плоская задача является симметричной относительно биссектрисы клина. Поэтому рассматривается только верхняя половина области решения задачи. Основные уравнения (1.5)–(1.8) аппроксимируются на лагранжевой сетке с четырехугольными ячейками, а на границе контакта среды с клином треугольными ячейками. Схематическое изображение разбиения расчетной области показано на фиг. 1 (кривые 1–3 соответствуют фронтам падающей, отраженной и дифрагированной волны).

При решении задач путем введения искусственной вязкости [11] в формуле (1.6) допускается «сквозной» счет параметров волн, имеющих слабые разрывы, по одному алгоритму. Этим и решается вопрос о гашении осцилляций возникающих за фронтами волн (кривые 1–3, фиг. 1). Как выяснилось при реализации метода на ЭВМ, искусственная вязкость относительно сдвига, имеющая квадратичный вид при малых сдвигах, влияет незначительно, а на тангенциальных разрывах она становилась определяющей.

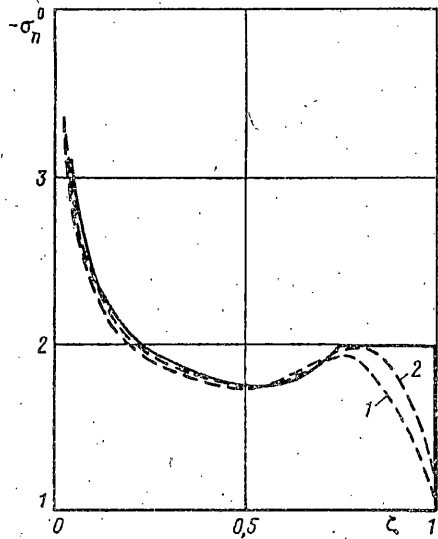
$$q = \begin{cases} c_0^2 \rho_0 A (\dot{V}/V)^2 / V & \text{при } \dot{V}/V < 0 \\ 0 & \text{при } \dot{V}/V \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $c_0$  — безразмерная постоянная,  $A$  — площадь ячейки. При надлежащем подборе безразмерного постоянного  $c_0$  вязкость (2.1) вполне исправно сглаживает решения [12].

Алгоритм решения составлен с учетом особенностей рассматриваемой задачи: областью искомых решений является  $OB\overline{C}R_1A$  (фиг. 1); при дискретизации шаги по  $x$  и  $y$  необязательно должны быть равномерными — близлежащая область к



Фиг. 1



Фиг. 2

клин дискретизируется более мелкими шагами, чем на отдаленных расстояниях от клина. На границе  $OB$  в узловых точках задается скорость частиц в виде соотношения (1.2). На контактных узловых точках и ячейках (1.1) выполняются граничные условия (1.3) или (1.4), а в точке  $A$  (на острие клина) — условия (1.9). В остальных границах введением фиктивных ячеек ставятся следующие условия: на границе  $OA$  должны выполняться условия симметрии задачи; на границах  $BC$  и  $CR_1$  задаются условия протекания, т. е. волна должна переходить через эти границы без отражения.

Для проверки алгоритма и программы решения в качестве тестовой рассмотрим задачу о дифракции плоской продольной волны сжатия, приведенной в [6]. Потенциал падающей продольной волны на гладкий твердый клин согласно [6] представляется в цилиндрической системе координат  $r, \theta$ :

$$\varphi_0 = - \frac{(c_1 t + r \cos(\theta - \theta_0))^2}{2} H(c_1 t + r \cos(\theta - \theta_0))$$

где начало отсчета  $\theta$  совпадает с ребром клина,  $\theta_0$  — угол падения волны. В [1, 6] получено точное решение этой задачи для произвольного угла раствора клина в виде суммы двух решений, первое из которых есть решение соответствующей акустической задачи, тогда как второе описывает влияние упругости.

В случае симметрии, когда волна падает на клин вдоль его биссектрисы пропадает упругое слагаемое и решение полностью совпадает с акустическим. Акустическое решение в [6] с использованием результатов [13] представляется в виде

$$\varphi_a = f(+0) U(c_1 t, r, \theta) - \int_{-r \cos(\theta - \theta_0)}^{c_1 t} \frac{d}{dx} [f(c_1 t - x)] U(x, r, \theta) dx$$

где  $f(x) = -x^2 H(x)/2$ ,  $U(c_1 t, r, \theta)$  — решение акустической задачи о дифракции плоской волны  $U_0 = H(c_1 t + r \cos(\theta - \theta_0))$  на рассматриваемом клине, согласно результатам [14] имеет вид

$$U(c_1 t, r, \theta) = H(r - c_1 t) \{ \Sigma(\theta - \theta_0) H[c_1 t + r \cos(\theta - \theta_0)] + \\ + \Sigma(\theta + \theta_0) H[c_1 t + r \cos(\theta - \theta_0)^*] \} +$$

$$+ \frac{H(c_1 t - r)}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{(1 - \xi^{2l}) \sin l t}{(1 + \xi^{2l}) \cos l \pi - 2 \xi^l \cos l (\theta - \theta_0)} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{(1 - \xi^{2l}) \sin l t}{(1 + \xi^{2l}) \cos l \pi - 2 \xi^l \cos l (\theta + \theta_0)} \right]$$

Здесь  $\xi = c_1 t / r + \sqrt{(c_1 t / r)^2 - 1}$  значения арктангенсов берутся в интервале  $(0, \pi)$  и введены обозначения  $(\theta + \theta_0)^* = \theta + \theta_0 + 2\pi m / l$ , где целое число  $m$  ( $m = 0, -1$ ) выбирается так, чтобы в рассматриваемой точке всегда выполнялось неравенство  $-\pi / l < (\theta + \theta_0)^* < \pi / l$ :

$$\Sigma(\theta + 2\pi / l) = \Sigma(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\theta| < \pi \\ 0 & \text{при } \pi < |\theta| < \pi / l, \end{cases} \quad l = \frac{\pi}{2(\pi - \beta)}$$

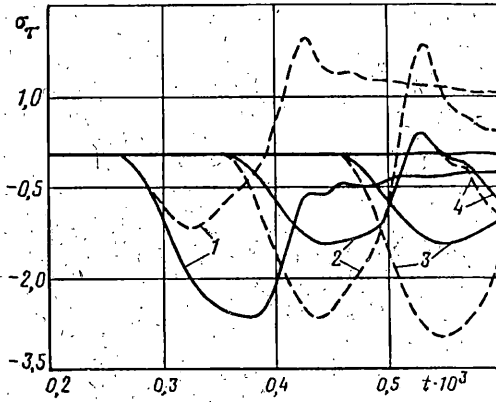
Рассмотрим результаты численных расчетов тестовой задачи и их сопоставление с точным решением. На фиг. 2 приведены кривые распределения нормального напряжения  $\sigma_n^* = \sigma_n / (\lambda + \mu)$  вдоль щеки клина при  $2\beta = 90^\circ$ ,  $\lambda = 2\mu$  как функция от  $\xi$  ( $\xi$  — отношение расстояния от рассматриваемой точки до острия клина, к длине  $AR_1$ ) в момент времени, когда падающая волна достигает границу  $CR_1$ . Физико-механические и геометрические характеристики сред принимались следующими:  $c_1 = 5000$  м/с,  $c_2 = 2500$  м/с,  $\rho_0 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $OB = 0,45$  м,  $x_0 = OA = 0,3$  м,  $BC = 0,6$  м,  $c_0 = 80$ , размеры ячеек в процессе счета варьировались. Штриховые линии относятся к результатам численного решения. Кривая 1 соответствует результатам расчетов при шагах разбиения по координате  $x$ : длина  $BC$  разбита на 60 отрезков, по  $y = OB$  на 45, а кривая 2 соответственно 90 и 60. Как видно из фиг. 2 решение с последними шагами по координатам дает хорошее совпадение за фронтом волны с точным решением. Отличие по максимуму составляет 3—3,5%. В окрестности фронта падающей волны при  $\xi \rightarrow 1$  (близлежащих точках  $R_1$ ) это отличие увеличивается до двух раз. С уменьшением размеров ячеек можно достичь получение решения с нужной точностью, но это требует большого объема памяти ЭВМ и расхода машинного времени.

Результаты расчетов тестовой задачи показывают, что метод конечных разностей дает «размывание» ударных фронтов (сильных разрывов). Это является недостатком данного метода. Размывание сильных разрывов при решении волновых задач методом конечных разностей также наблюдалось в исследованиях [15—16].

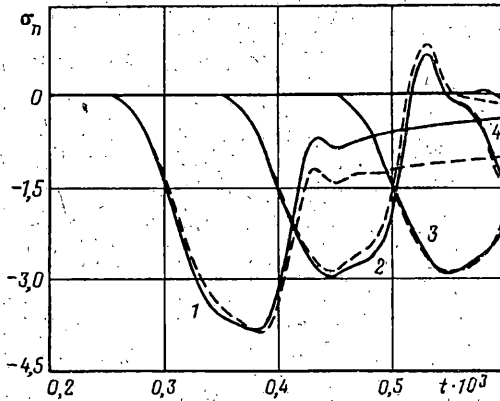
Сопоставление результатов численных и аналитических решений тестовой задачи (фиг. 2) показывает удовлетворительную пригодность применяемого метода решения для рассматриваемой задачи.

3. Результаты численных решений и их анализ. Изменение параметров волны  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  по времени  $t$  получены в виде графиков для фиксированных точек области решения (фиг. 1) вдоль линии симметрии  $OA$  ( $y = 0$ ), вдоль сечений  $y = 0,1$  м;  $x = 0,3$  м, а также вдоль грани клина. Во всех вариантах расчетов на ЭВМ острие клина находилось в точке с координатами  $x = 0,3$  м и  $y = 0$ . Расчеты проводились при разных длинах импульса по времени  $T$  и амплитуды  $v_{\max}$  согласно (1.2). Также варьировались физико-механические характеристики среды и угол раствора клина  $2\beta$ .

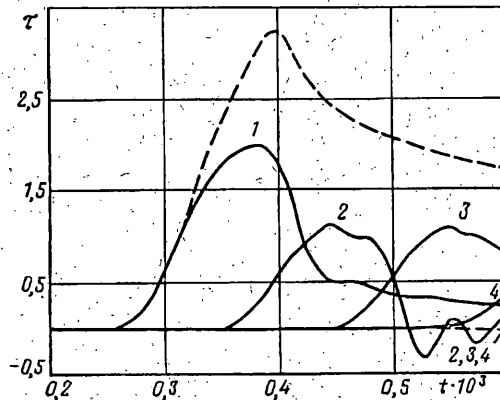
Однако, наиболее характерными являются изменение параметров волны по времени и координате вдоль щеки клина (линия  $AR_1$ , фиг. 1). При этом рассматривается изменение напряжений и скорости частиц среды в новой системе координат  $r_t, r_n$ , где  $r_t$  — ось, направленная вдоль грани клина, а  $r_n$  — перпендикулярно к грани клина. Используя значения напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  и  $\tau_{xy}$  вычислялись значения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_n$  и  $\tau$  в системе координат  $r_t, r_n$  по формулам



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\sigma_{\tau} = \sigma_{xx} \cos^2 \beta + \sigma_{yy} \sin^2 \beta + 2\tau_{xy} \sin \beta \cos \beta$$

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \sin^2 \beta + \sigma_{yy} \cos^2 \beta - 2\tau_{xy} \sin \beta \cos \beta$$

$$\tau = \tau_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos \beta \sin \beta$$

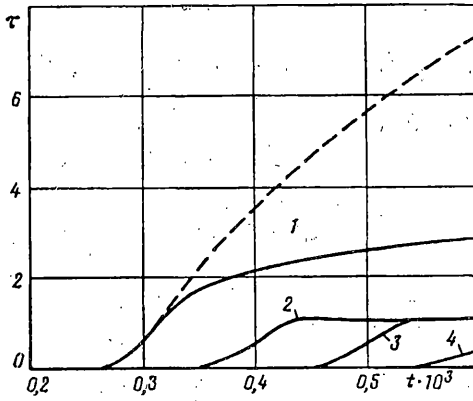
где  $\sigma_{\tau}$  — напряжение в среде действующее вдоль грани клина,  $\sigma_n$  — нормальное напряжение к грани клина,  $\tau$  — касательное напряжение вдоль грани клина.

На фиг. 3—6 приведены изменение напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_n$  и  $\tau$  по времени  $t$  [с] для фиксированных ячеек вдоль щеки клина. В качестве исходных использованы следующие физико-механические характеристики среды:  $\rho_0 = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_1 = 1000$  м/с,  $c_2 = 500$  м/с. Угол раствора принят равным  $2\beta = 90^\circ$ . Параметры нагрузки создающей волну  $v_{\max} = 1$  м/с,  $T = 0,0001$  с. Область решения ограничивалась следующими размерами:  $0 \leq x \leq 0,6$  м,  $0 \leq y \leq 0,45$  м. Кривые 1—4 на фиг. 3—6 относятся соответственно к фиксированным точкам вдоль грани клина:  $x = 0,297$  м,  $y = 0,003$  м;  $x = 0,398$  м,  $y = 0,098$  м;  $x = 0,498$  м,  $y = 0,198$  м;  $x = 0,598$  м,  $y = 0,298$  м. Сплошные кривые относятся к результатам расчетов с условиями на границе контакта клина со средой (1.3) (жесткий контакт), а штриховые кривые — с условиями (1.4) (скользящий контакт).

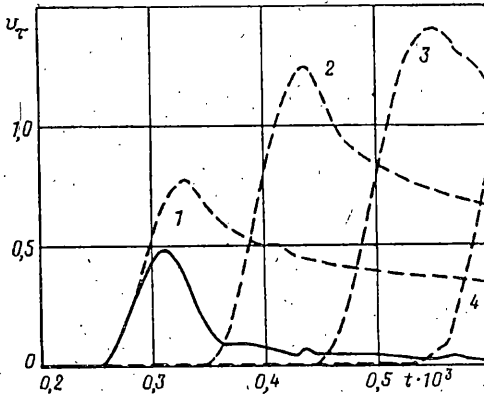
В случае жесткого контакта между клином и средой напряжение  $\sigma_x$  [МПа] достигает своего максимального значения перед острием клина (кривая 1). Далее по мере удаления от острия клина вдоль грани, максимальное напряжение  $\sigma_x$  убывает. В этом случае растягивающие напряжения вдоль грани клина в среде практически не возникают (сплошные кривые 1—4).

При отсутствии силы трения между клином и средой (скользящий контакт) изменение  $\sigma_x$  вдоль грани клина качественно и количественно совсем иное. В этом случае максимум сжимающих напряжений вдоль грани клина по мере удаления от острия клина увеличивается. Далее напряжение сжатия с ростом времени убывает и появляются растягивающие напряжения (штриховые кривые 1—4, фиг. 3). В рассматриваемых фиксированных точках среды вдоль грани клина, максимальные значения растягивающих напряжений в  $\sim 1,5$  раза меньше, чем сжимающие напряжения. Амплитуда сжимающих напряжений при скользящем контакте всегда больше чем при жестком контакте. Это объясняется тем, что при отсутствии силы трения, клин не сопротивляется к движению и деформации частиц среды вдоль него. Значение нормальных напряжений  $\sigma_n$  к грани клина существенно не зависит от условия контакта клина со средой (фиг. 4). При жестком контакте клина со средой, а также при скользящем контакте изменение  $\sigma_n$  по времени вдоль грани клина практически совпадают (кривые 1—4). Однако, с удалением от острия клина в среде появляются растягивающие нормальные напряжения (кривые 2). Значение растягивающих нормальных напряжений здесь достигает до 1 МПа, что может превосходить предел прочности грунта на растяжение. В результате может происходить отрыв среды (грунта) от грани клина. Это указывает на то, что при решении задачи необходимо учесть возможность отрыва среды от грани клина.

На фиг. 5 приведены изменение касательных напряжений  $\tau$  вдоль грани клина в приконтактном слое среды. При жестком контакте клина со средой максимальные значения касательных напряжений вдоль грани клина, после удаления от острия на незначительное расстояние, практически остаются без изменения (кривые 2, 3). Наибольшее значение касательных напряжений достигает в среде у острия клина (кривая 1). Значение максимума  $\tau$  у острия клина в 1,2—1,5 раза больше, чем на гранях клина (кривые 1—4). При скользящем контакте на гранях клина касательное напряжение отсутствует (согласно условию (1.4)). Однако, у острия клина в среде максимальное значение касательного напряжения  $\sim$  в 1,5 раза превышает то же значение  $\tau$  при жестком контакте (кривые 1, фиг. 5). Значение максимального касательного напряжения согласно результатам расчетов (фиг. 5) достигает 1—3 МПа. С увеличением времени действия нагрузки (1.2) —  $T$ , максимальное значение касательного напряжения на грани клина увеличивается. При  $T \rightarrow \infty$   $\tau_{\max}$  достигает от 1 до 7,5 МПа (фиг. 6). Здесь также касательное напряжение своего наибольшего значения достигает у острия клина (кривые 1), причем при скользящем контакте намного  $\sim$  в 2 раза больше, чем при жестком контакте. Далее вдоль грани клина при скользящем контакте клина со средой значение касательного напряжения равно нулю. При



Фиг. 6



Фиг. 7

жестком контакте значение  $\tau$  с ростом времени растет, достигает максимума и далее остается постоянным, а максимальные значения  $\tau$  с удалением от острия клина убывают (сплошные кривые 1—4, фиг. 6).

Изменение касательного напряжения по времени, в случае  $T \rightarrow \infty$ , качественно аналогично изменениям  $\tau(t)$ , полученным в экспериментальных исследованиях по взаимодействию твердых тел с грунтами [17, 18]. Количественно они расходятся. Естественно предположить, что достигаемые в расчетах значения касательных напряжений намного превосходят предел прочности грунтов на сдвиг. В результате происходит разрушение приконтактного слоя грунта вдоль границы контакта конструкции с грунтом, что наблюдается в экспериментах [17—18].

Качественное совпадение изменения касательного напряжения по времени при жестком контакте клина с грунтом с результатами опытов [17—18] показывает, что при расчетах волновых процессов в неводонасыщенных грунтах, включающих различные конструкции, целесообразно использовать условие (1.3) на поверхностях контакта грунт — конструкция или альтернативные граничные условия (законы сдвигового взаимодействия), предложенные в [17—18].

При использовании условия (1.3) на поверхности контакта клина со средой, скорости частиц среды вдоль грани клина равняются нулю (фиг. 7). В случае скользящего контакта (1.4), максимум скорости частиц среды вдоль грани клина растет (штриховые кривые 1—4, фиг. 7). Увеличение скорости, соответственно приводит к падению значений сжимающих напряжений и образованию значительных растягивающих напряжений вдоль грани клина (штриховые кривые

1—4, фиг. 3). Однако, при  $T \rightarrow \infty$  растягивающие напряжения возникают только лишь у острия клина. Поэтому появление растягивающих напряжений в среде вдоль грани клина при коротких нагрузках (прямоугольных импульсах) объясняется также образованием волн разряжения в среде, после мгновенного падения нагрузки до нуля в сечении  $x = 0$ .

Варьирование физико-механических характеристик среды (дюралюминий, гранит, сталь) качественно не меняет изменение параметров волны, рассмотренных на фиг. 3—7. Как уже отмечалось выше на качественную картину влияют в основном параметры нагрузки (1.2) и граничные условия на поверхности контакта клина с упругой средой. Изменение физико-механических свойств среды влияет на параметры волны, количественно. Увеличение прочностных характеристик среды ( $\rho_0 = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 5000 \text{ м/с}$ ,  $c_2 = 2500 \text{ м/с}$ ) приводит к увеличению значений  $\sigma_v$ ,  $\sigma_n$  и  $\tau$  (примерно в 20 раз) при значении  $v_{\max} = 1 \text{ м/с}$  и  $T = 0,0001 \text{ с}$ . Увеличение амплитуд  $v_{\max}$  в пять раз ( $v_{\max} = 5 \text{ м/с}$ ) при постоянстве значений остальных исходных данных, т. е. при  $\rho_0 = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 5000 \text{ м/с}$ ,  $c_2 = 2500 \text{ м/с}$  приводит к увеличению максимальных значений  $\sigma_v$ ,  $\sigma_n$  и  $\tau$  примерно в 5 раз в рассматриваемых точках среды.

Уменьшение значения угла раствора клина ( $2\beta = 60^\circ$ ) приводит к увеличению максимального значения  $\sigma_t$  и  $\tau$  и уменьшению  $\sigma_n^{\max}$  на 10—15%. Увеличение же угла раствора клина ( $2\beta = 150^\circ$ ) приводит к увеличению  $\sigma_n^{\max}$  и к уменьшению  $\tau^{\max}$  на 20—30% вдоль щеки клина.

Отметим, что значения напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\tau_{xy}$  вдоль грани клина несколько отличаются от  $\sigma_v$ ,  $\sigma_n$  и  $\tau$  соответственно. При этом это отличие составляет от 2 до 3 раз, для  $\sigma_t$  — в сторону уменьшения, для  $\sigma_n$  и  $\tau$  — в сторону увеличения по максимальным значениям. В точках среды расположенных по близости к граням клина максимальные значения параметров волны в зависимости от вида граничного условия на границе клина со средой отличаются на 20—30%. С удалением от клина, это отличие уменьшается и для точек отдаленных от клина на расстояние  $0,5 \text{ OA}$  (фиг. 1), изменения параметров волны по времени в обоих видах граничных условий (1.3), (1.4) практически совпадают.

В зависимостях  $\sigma_{xx}(t)$ ,  $\sigma_{yy}(t)$ ,  $\sigma_{zz}(t)$  и  $\tau_{xy}(t)$ , относящихся к точкам среды отдаленным на определенное расстояние от грани клина, наблюдается влияние падающей, отраженной и дифрагированной волн. Влияние дифрагированной волны, согласно результатам расчетов зависит от параметров нагрузки создающей волны  $v_{\max}$  и  $T$ , от угла раствора клина  $2\beta$  и от упругих свойств среды.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костров Б. В. Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду//ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 198—203.
2. Капустянский С. М. Об одном точном решении задачи дифракции упругих волн на клине//ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 190—196.
3. Поручиков В. Б. Дифракция цилиндрической упругой волны на клине//Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 136—144.
4. Поручиков В. Б. Дифракция упругой цилиндрической волны на клине//Распространение упругих и упругопластических волн. Фрунзе: Изд-е Фрунз. политехн. ин-та, 1978. С. 155—156.
5. Исраилов М. Ш. Дифракция произвольной упругой волны на клине//ДАН СССР. 1980. Т. 253. № 1. С. 57—61.
6. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
7. Мардонов Б. Дифракция волн на жестком и непроницаемом клине, вставленном без трения в безграничную двухкомпонентную пористую среду//Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1973. № 1. С. 60—68.



8. Филиппов А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн//ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 688—703.
9. Петрашень Г. И. Основы математической теории распространения упругих волн//Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: 1978. Вып. 18. С. 5—248.
10. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений//Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212—263.
11. Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks// J. Appl. Phys. 1950. V. 21. № 3. P. 232—237.
12. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики// Под ред. К. И. Бабенко. М.: Наука. 1979. 296 с.
13. Филиппов А. Ф. Дифракция произвольной акустической волны на клине//ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 306—318.
14. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 232 с.
15. Евтерев Л. С. Начальная стадия сильного взрыва на поверхности твердой скальной породы// Научные работы аспирантов Ин-та механики МГУ. М.: Изд-во МГУ. 1973. Вып. 1. С. 67—80.
16. Григорян С. С., Евтерев Л. С. Расчет двумерной осесимметричной задачи о сильном контактном взрыве//Отчет Института механики МГУ. 1974. № 1565. 40 с.
17. Султанов К. С. Математическая модель взаимодействия твердых тел с грунтом при их относительном сдвиге//ПМТФ. 1993. № 1. С. 40—48.
18. Султанов К. С. Закономерности взаимодействия подземных сооружений с грунтом при их относительном сдвиге//Прикл. механика. 1993. Т. 29. № 3. С. 60—67.

Ташкент

Поступила в редакцию  
7.IX.1993