МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. В. Л. МОНДРУС

К ВОПРОСУ ОБ ОТРАЖЕНИИ И ПРОХОЖДЕНИИ ВЕРТИКАЛЬНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Вопрос поведения волнового фронта сейсмической волны на границе упругих сред неоднократно рассматривался в детерминированной постановке [1—3]. Реально же среда распространения волнового фронта наиболее адекватно описывается случайно-неоднородной моделью [4, 5].

Для потенциалов падающей, отраженной и прошедшей волн на линии раздела, например, между грунтовым массивом в районе застройки (основанием сооружения) и фундаментом следует записать стохастические дифференциальные уравнения.

Следует отметить, что размеры в плане зданий и сооружений обычной протяженности не соизмеримы с радиусом кривизны фронта сейсмической волны. Кроме того, малы размеры в плане основания прибора, регистрирующего колебания почвы, по сравнению с радиусом кривизны фронта падающей волны. Следовательно, падающую волну можно полагать плоской при всех дальнейших прикладных исследованиях [1, 6].

1. Рассмотрим предварительно задачу решения стохастического волнового уравнения в одномерной постановке.

Переходя от стандартного вида волнового уравнения

$$\Delta\psi(\mathrm{x}, t) - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi(\mathrm{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1)$$

где ($\psi(\mathrm{x}, t)$ — потенциал, x — вектор координат, b — скорость распространения волнового фронта, Δ — оператор Лапласа, t — параметр времени) к одномерной задаче

$$\frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.2)$$

представим решение в виде

$$\psi(x, t) = \psi_0^{\vee}(x)\exp(-i\omega t) \qquad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.2), приходим к уравнению Гельмгольца [7, 8]:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_0^{\vee}(x) + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2\psi_0^{\vee}(x) = 0 \qquad (1.4)$$

Величину $(\omega/b)^2$, входящую в (1.4), представим в виде суммы математического ожидания k_0^2 и флуктуационной составляющей $\xi(x)$, зависящей от координат [7, 9]:

$$k^2 = (\omega/b)^2 = k_0^2 + \xi(x) \qquad (1.5)$$

Для анализа (1.4) с учетом (1.5) используется метод моментных функций в корреляционном приближении. Рассматривается усеченная система моментных уравнений, которая соответствует гипотезе квазигауссовости [4, 7, 10].

Разрешающая система имеет вид

$$d^2\psi_0(x)/dx^2 + k_0^2\psi_0(x) + K_{\psi\xi}(x, x) = 0 \tag{1.6}$$

$$\partial^2 K_{\psi\xi}(x, x')/\partial x^2 + k_0^2 K_{\psi\xi}(x, x') = -\psi_0(x)K_\xi(x, x')$$

где $\psi_0(x)$ — математическое ожидание потенциала волны $\psi_0^v(x)$, $K_{\psi\xi}(x, x') = \langle\overline{\psi}_0(x)\xi(x')\rangle$ — взаимная корреляционная функция флуктуаций амплитуды волны $\overline{\psi}_0(x)$ и коэффициента неоднородностей $\xi(x')$. $K_\xi(x, x')$ — корреляционная функция неоднородностей.

Решение системы уравнений (1.6) строится по методу разделения переменных при заданной корреляционной функции неоднородностей среды распространения волнового фронта $K_\xi(x, x')$.

Если полагать неоднородности среды распространения экспоненциально-коррелированными, что вполне адекватно описывает неоднородности целого ряда грунтовых массивов, то $K_\xi(x, x')$ при $x' - x \geq 0$ будет выглядеть следующим образом

$$K_\xi(x, x') = \sigma_\xi^2 \exp\left[-\alpha(x' - x)\right] \tag{1.7}$$

где σ_ξ^2 — дисперсия неоднородностей, α — коэффициент широкополосности, характеризующий меру корреляционной связи между ординатами процесса.

Решение (1.6) можно представить в виде

$$\psi_0(x) = \sum_j C_j \exp(\lambda_j x) \tag{1.8}$$

где λ_j — корни характеристического уравнения

$$(\lambda^2 + k_0^2)\left[(\lambda + \alpha)^2 + k_0^2\right] - \sigma_\xi^2 = 0 \tag{1.9}$$

Исследование процесса отражения и прохождения волнового фронта падающей поперечной сейсмической волны на значительном расстоянии от эпицентральной зоны [11] позволяет оставить при решении характеристического уравнения (1.9) только два корня, соответствующих принципу излучения. Их можно определить аналитически по формулам [7]:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha/2 \pm \gamma + i\delta \tag{1.10}$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{(k_0^2 + \alpha^2/4)^2 - \sigma_\xi^2} - (k_0^2 - \alpha^2/4)\right]\right)^{1/2} \tag{1.11}$$

$$\delta = \left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{(k_0^2 + \alpha^2/4)^2 - \sigma_\xi^2} + (k_0^2 - \alpha^2/4)\right]\right)^{1/2}$$

Константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Для падающего волнового фронта в случае детерминированных граничных условий при $x = x' = 0$ будем иметь

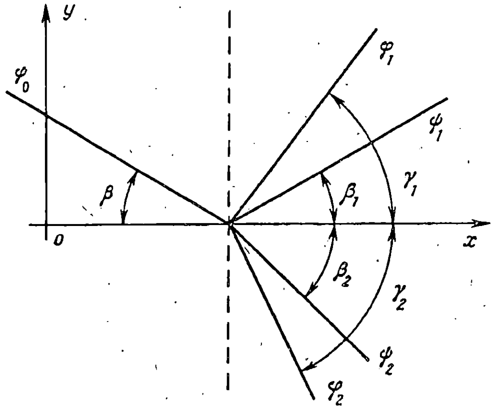
$$\psi_0(x) = \Big|_{x=0} = U, \qquad K_{\psi\xi}(x, x')\Big|_{x=x'} = 0 \tag{1.12}$$

После ряда несложных математических преобразований получим

$$C_1 = -\frac{(\lambda_1 + \alpha)^2 + k_0^2}{(\lambda_2 + \alpha)^2 - (\lambda_1 + \alpha)^2}U$$

$$C_2 = \frac{(\lambda_2 + \alpha)^2 + k_0^2}{(\lambda_2 + \alpha)^2 - (\lambda_1 + \alpha)^2}U \tag{1.13}$$

где U определяется при аппроксимации колебаний грунта в районе застройки [12].



2. Переходя от одномерной задачи к плоской, с учетом полученных результатов и допущений, запишем выражение для падающего потенциала вертикально-поляризованной поперечной сейсмической волны (волны SV-типа) — одной из наиболее опасных для зданий и сооружений [11, 13].

Без экспоненциального временного сомножителя (1.3) на основании (1.8) будем иметь

$$\psi_0 = C_1 \exp [\lambda_1(m_x x + m_y y)] + C_2 \exp[\lambda_2(m_x x + m_y y)] \tag{2.1}$$

где m_x, m_y — направляющие косинусы; $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения типа (1.9); C_j — константы, определяемые из соответствующих граничных условий.

Так как падающая под углом к линии раздела сейсмическая волна претерпевает трансформацию на границе сред [1—3], запишем выражения для потенциалов поперечных и продольных волн прошедших и отраженных на границе.

Потенциалы отраженных поперечной и продольной сейсмических волн представляются следующим образом:

$$\psi_1 = V_{tt}C_1 \exp [\lambda_1(m_{1x}x + m_{1y}y)] + V_{tt}C_2 \exp [\lambda_2(m_{1x}x + m_{1y}y)] \tag{2.2}$$

$$\varphi_1 = V_{lt}C_1 \exp [\lambda_1(n_{1x}x + n_{1y}y)] + V_{lt}C_2 \exp [\lambda_2(n_{1x}x + n_{1y}y)] \tag{2.3}$$

Выражения для потенциалов прошедших поперечной и продольной сейсмических волн записываются в виде:

$$\psi_2 = W_{tt}B_1 \exp [r_1(m_{2x}x + m_{2y}y)] + W_{tt}B_2 \exp [r_2(m_{2x}x + m_{2y}y)] \tag{2.4}$$

$$\varphi_2 = W_{lt}B_1 \exp [r_1(n_{2x}x + n_{2y}y)] + W_{lt}B_2 \exp [r_2(n_{2x}x + n_{2y}y)] \tag{2.5}$$

где r_i — корни характеристического уравнения, составленного по аналогии с (1.9) для среды прохождения, B_i — константы, определяемые из граничных условий для прошедшего волнового фронта на линии раздела, V_{tt} — коэффициент отражения для волны ψ_1 (отраженная поперечная), V_{lt} — коэффициент отражения для волны φ_1 (отраженная продольная) или коэффициент трансформации при отражении, W_{tt} — коэффициент прохождения для волны ψ_2 (прошедшая поперечная), W_{lt} — коэффициент прохождения для волны φ_2 (прошедшая продольная) или коэффициент трансформации при прохождении.

Представим условно в виде лучей падающий, отраженный и прошедший волновые фронты в плоскости xoy (фигура). На фигуре β — угол падения волны

ψ_0, β_1 — угол отражения волны ψ_1, β_2 — угол прохождения волны ψ_2, γ_1 — угол отражения волны φ_1, γ_2 — угол прохождения волны φ_2.

Выражая смещения через потенциалы для плоской волны будем иметь в системе координат xoy

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.6}$$

где ψ и φ представляют собой решения соответствующих стохастических дифференциальных уравнений.

3. В задачах сейсмостойкого строительства особое внимание следует обратить на постановку граничных условий при отражении и прохождении волновых фронтов на линии раздела между фундаментом сооружения и грунтовым массивом в районе застройки (основанием сооружения).

Рассмотрим граничные условия для жесткой связи на линии раздела. В этом случае должно выполняться [1, 3]: равенство суммы проекций смещений в падающих, отраженных и прошедших волнах на осях x и z (перпендикулярна плоскости чертежа) при $y = 0$ по обе стороны границы сред I и II:

$$\Sigma u^{\mathrm{I}} = \Sigma u^{\mathrm{II}}, \qquad \Sigma v^{\mathrm{I}} = \Sigma v^{\mathrm{II}} \tag{3.1}$$

равенство суммы проекций напряжений на нормаль и касательную к граничной поверхности с обеих сторон для всех видов волн на указанной границе

$$\sigma^{\mathrm{I}}_{yy} = \sigma^{\mathrm{II}}_{yy}, \qquad \tau^{\mathrm{I}}_{yx} = \tau^{\mathrm{II}}_{yx} \tag{3.2}$$

$$\sigma_{yy} = \rho\left[a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (a^2 - 2b^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right] \tag{3.3}$$

$$\tau_{yx} = \rho b^2\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]$$

$$a = \langle a\rangle = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2}, \qquad b = \langle b\rangle = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$$

где a, b — математические ожидания скоростей соответственно продольной и поперечной волн; λ, μ — математические ожидания параметров Ламе; ρ_i — математическое ожидание плотности среды распространения волнового фронта.

С учетом (2.6) условия (3.1) примут следующий вид (см. фиг.):

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\psi_0 + \psi_1) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 + \psi_1) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\ {}_{(y=0)} \tag{3.4}$$

Условия (3.2) с учетом (3.3) будут выглядеть следующим образом

$$\rho_1\left[a_1^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} + (a_1^2 - 2b_1^2)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - 2b_1^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\psi_0 + \psi_1)\right]_{y=0} =$$

$$= \rho_2\left[a_2^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} + (a_2^2 - 2b_2^2)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} - 2b_2^2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial y}\right]_{y=0} \tag{3.5}$$

$$\rho_1 b_1^2\left[2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\psi_0 + \psi_1) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi_0 + \psi_1)\right]_{y=0} =$$

$$= \rho_2 b_2^2\left[2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}\right]_{y=0}$$

Выражения для потенциалов (2.1)—(2.5) можно переписать с учетом введенных углов падения, отражения и прохождения в виде

$$\psi_0 = C_1\exp\left[\lambda_1(x\cos\beta - y\sin\beta)\right] + C_2\exp\left[\lambda_2(x\cos\beta - y\sin\beta)\right]$$

$$\psi_1 = V_{tt}C_1 \exp[\lambda_1(x\cos\beta_1 + y\sin\beta_1)] + V_{tt}C_2\exp[\lambda_2(x\cos\beta_1 + y\sin\beta_1)]$$

$$\varphi_1 = V_{lt}C_1 \exp[\lambda_1(x\cos\gamma_1 + y\sin\gamma_1)] + V_{lt}C_2\exp[\lambda_2(x\cos\gamma_1 + y\sin\gamma_1)] \tag{3.6}$$

$$\psi_2 = W_{tt}B_1 \exp[r_1(x\cos\beta_2 - y\sin\beta_2)] + W_{tt}B_2\exp[r_2(x\cos\beta_2 - y\sin\beta_2)]$$

$$\varphi_2 = W_{lt}B_1 \exp[r_1(x\cos\gamma_2 - y\sin\gamma_2)] + W_{lt}B_2\exp[r_2(x\cos\gamma_2 - y\sin\gamma_2)]$$

Подставляя (3.6) в (3.4) и (3.5) получим систему четырех линейных уравнений относительно коэффициентов V_{tt}, V_{lt}, W_{tt} и W_{lt}:

$$V_{tt}S_1\sin\beta_1 + V_{lt}S_2\cos\gamma_1 + W_{tt}S_3\sin\beta_2 - W_{lt}S_4\cos\gamma_2 = S\sin\beta$$

$$-V_{tt}S_1\cos\beta_1 + V_{lt}S_2\sin\gamma_1 + W_{tt}S_3\cos\beta_2 + W_{lt}S_4\sin\gamma_2 = S\cos\beta$$

$$V_{tt}T_1\rho_1 b_1^2\sin 2\beta_1 - V_{lt}T_2\rho_1 a_1^2\left(1 - 2\frac{b_1^2}{a_1^2}\cos^2\gamma_1\right) + W_{tt}T_3\rho_2 b_2^2\sin 2\beta_2 +$$

$$+ W_{lt}T_4\rho_2 a_2^2\left(1 - 2\frac{b_2^2}{a_2^2}\cos^2\gamma_2\right) = \rho_1 b_1^2 T\sin 2\beta$$

$$-V_{tt}T_1\rho_1 b_1^2\cos 2\beta_1 + V_{lt}T_2\rho_1 b_1^2\sin 2\gamma_1 + W_{tt}T_3\rho_2 b_2^2\cos 2\beta_2 +$$

$$+ W_{lt}T_4\rho_2 b_2^2\sin 2\gamma_2 = \rho_1 b_1^2 T\cos 2\beta \tag{3.7}$$

$$S_1 = \lambda_1 C_1\exp(\lambda_1 x\cos\beta_1) + \lambda_2 C_2\exp(\lambda_2 x\cos\beta_1)$$

$$S_2 = \lambda_1 C_1\exp(\lambda_1 x\cos\gamma_1) + \lambda_2 C_2\exp(\lambda_2 x\cos\gamma_1)$$

$$S_3 = r_1 B_1\exp(r_1 x\cos\beta_2) + r_2 B_2\exp(r_2 x\cos\beta_2)$$

$$S_4 = r_1 B_1\exp(r_1 x\cos\gamma_2) + r_2 B_2\exp(r_2 x\cos\gamma_2)$$

$$S = \lambda_1 C_1\exp(\lambda_1 x\cos\beta) + \lambda_2 C_2\exp(\lambda_2 x\cos\beta) \tag{3.8}$$

$$T_1 = \lambda_1^2 C_1\exp(\lambda_1 x\cos\beta_1) + \lambda_2^2 C_2\exp(\lambda_2 x\cos\beta_1)$$

$$T_2 = \lambda_1^2 C_1\exp(\lambda_1 x\cos\gamma_1) + \lambda_2^2 C_2\exp(\lambda_2 x\cos\gamma_1)$$

$$T_3 = r_1^2 B_1\exp(r_1 x\cos\beta_2) + r_2^2 B_2\exp(r_2 x\cos\beta_2)$$

$$T_4 = r_1^2 B_1\exp(r_1 x\cos\gamma_2) + r_2^2 B_2\exp(r_2 x\cos\gamma_2)$$

$$T = \lambda_1^2 C_1\exp(\lambda_1 x\cos\beta) + \lambda_2^2 C_2\exp(\lambda_2 x\cos\beta)$$

Решение системы (3.7) относительно коэффициентов V_{tt}, V_{lt}, W_{tt} и W_{lt} можно записать по правилу Крамера

$$V_{tt} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad V_{lt} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad W_{tt} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad W_{lt} = \frac{\Delta_4}{\Delta} \tag{3.9}$$

где Δ — главный, Δ_i — побочные определители системы (3.7). Условие $\Delta \neq 0$ заведомо выполняется исходя из структуры уравнений системы.

Коэффициенты отражения и прохождения для смещений определяются, в случае необходимости, по аналогии с помощью формул (2.6).

Если в выражениях для коэффициентов отражения и прохождения, определяемых по (3.9), положить равными нулю величины флуктуаций параметров неоднородностей, то получим классические значения для коэффициентов отражения и прохождения потенциалов волновых фронтов при падающей вертикально-поляризованной поперечной сейсмической волне (волне SV-типа) [1, 3].

Таким образом, полученное решение позволяет с учетом вероятностного представления распространяющегося волнового фронта получить необходимые для исследования по волновой методике [13] сооружений на сейсмостойкость параметры на границе двух случайно-неоднородных упругих сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саваренский Е. Ф.* Сейсмические волны. М.: Недра, 1972. 293 с.
2. *Сагомонян А. Я.* Волны напряжения в сплошных средах. М.: Изд-во МГУ, 1985. 416 с.
3. *Рябинкин Л. А.* Теория упругих волн. М.: Недра, 1987. 182 с.
4. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
5. *Болотин В. В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1982. 351 с.
6. *Напетваридзе Ш. Г.* Некоторые задачи инженерной сейсмологии. Тбилиси: Мецниереба, 1973. 162 с.
7. *Макаров Б. П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. М.: Машиностроение, 1983. 262 с.
8. *Макаров Б. П., Кочетков Б. Е.* Расчет фундаментов сооружений на случайно-неоднородном основании при ползучести. М.: Стройиздат, 1987. 256 с.
9. *Мондрус В. Л.* К вопросу об определении автокорреляционной функции в случайном процессе// Изв. РАН. МТТ. 1993. № 5. С. 185—190.
10. *Соболев Д. Н.* К расчету конструкций, лежащих на статистически неоднородном основании// Строительная механика и расчет сооружений. 1965. № 1. С. 1—4.
11. *Корчинский И. Л., Жунусов Т. Ж., Малевская О. Я.* Количественная оценка параметров ожидаемых землетрясений. Алма-Ата: Казахстан, 1985. 79 с.
12. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. Справочник проектировщика/ Под ред. Коренева Б. Г., Рабиновича И. М. М.: Стройиздат, 1981. 215 с.
13. Волновые процессы в конструкциях зданий при сейсмических воздействиях/Под ред. Кривелева В. А. М.: Наука, 1987. 160 с.

Красногорск

Поступила в редакцию
30.VI.1994