МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. С. В. КУЗНЕЦОВ

ПРОДОЛЬНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Исследуются плоские волны в анизотропных средах. Показано, что в гиперупругой среде, тензор упругости которой строго эллиптичен, волна с наибольшей скоростью распространения необходимо является продольной.

1. Введение. В линейной теории упругости изотропного тела скорости распространения плоских продольных (c_1) и поперечных (c_2) упругих волн даются формулами [1]:

$$(c_1)^2 = (2\mu + \lambda)/\rho, \quad (c_2)^2 = \mu/\rho \tag{1.1}$$

где λ и μ — константы Ламе, а ρ — плотность среды. Аналогичная формула, восходящая к Гюгонио, справедлива для скоростей распространения ударных и более общих волн n-порядка (ударные волны представляют собой волны 1-го порядка).

Из формулы (1.1) немедленно следует, что для изотропных материалов со строго положительным тензором упругости

$$\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{S} > 0 \tag{1.2}$$

скорости распространения продольных волн строго больше скоростей поперечных волн. В неравенстве (1.2) $\mathbf{C}$ — четырехвалентный тензор упругости, $\mathbf{S}$ — произвольный симметричный тензор второго ранга, $\mathbf{S} \neq 0$. Заметим, что для изотропных упругих материалов неравенство (1.2) эквивалентно $\mu > 0$, $3\lambda + \mu > 0$.

Для анизотропных упругих сред с симметричным и строго эллиптичным тензором упругости известно [2, 3], что существуют определенные направления, по которым происходит распространение продольных и поперечных волн. В [4] было показано, что имеется три различных направления, по которым распространяются продольные волны. В том случае, когда анизотропный материал обладает осью упругой симметрии в направлении, характеризуемом этой осью, происходит распространение продольных или же поперечных волн.

Ниже показано, что для любой анизотропной гиперупругой среды, тензор упругости которой эллиптичен, волна с наибольшей скоростью распространения необходимо является продольной.

2. Основные соотношения. Рассматривается однородная анизотропная среда в R^3, уравнения движения которой имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla \mathbf{u} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений в среде. Наряду с выполнением неравенства строгой эллиптичности предполагается, что среда является гиперупругой, что обеспечивает симметрию $\mathbf{C}$, рассматриваемого, как оператор, действующий в 6-ти мерном пространстве двухвалентных симметричных тензоров.

Определим плоскую прогрессирующую волну следующей формулой [5]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{x}\cdot\mathbf{m} - ct) \tag{2.2}$$

где $\varphi \in C^2(R)$, $\varphi'' \neq 0$. Вектор $\mathbf{a} \in R^3$ ($|\mathbf{a}| = 1$) называют направлением движения или амплитудой, а вектор $\mathbf{m} \in R^3$, ($|\mathbf{m}| = 1$) направлением распространения. Подстановка (2.2) уравнения движения приводит к известной формуле Френеля — Адамара:

$$\mathbf{A}(\mathbf{m})\cdot\mathbf{a} = c^2\mathbf{a}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{m}) = \rho^{-1}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{m}) \tag{2.3}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{m})$ — акустический тензор для направления $\mathbf{m}$.

Из (2.3) немедленно вытекает формула для скорости распространения волны с амплитудой $\mathbf{a}$:

$$c = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{m})\cdot\mathbf{a})^{1/2} = \rho^{-1/2}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{m}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}\otimes\mathbf{a})^{1/2} \tag{2.4}$$

Формулы, аналогичные (2.3), (2.4) справедливы также для направлений и скоростей распространения сингулярных поверхностей n-порядка ($n \geq 0$) в анизотропных гиперупругих средах [5].

3. Волны с наибольшими скоростями распространения. Разложим тензор $\mathbf{C}$ по ортогональному базису в пространстве sym ($R^3 \otimes R^3$):

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{6} \lambda_\alpha \mathbf{S}_\alpha \otimes \mathbf{S}_\alpha, \quad \mathbf{S}_\alpha\cdot\cdot\mathbf{S}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

где λ_α — собственные числа, а $\mathbf{S}_\alpha$ — собственные симметричные тензоры второго ранга, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Разложение (3.1) осуществляется таким образом, чтобы акустический тензор имел вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{m}) = \rho^{-1}\sum \lambda_\alpha (\mathbf{m}\cdot\mathbf{S}_\alpha\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{S}_\alpha \tag{3.2}$$

Видно, что предположение о гиперупругости среды, обеспечивающее симметрию $\mathbf{C}$: $C^{ijmn} = C^{mnij}$, позволяет осуществить разложение (3.1), (3.2).

С учетом (3.2) формула (2.4) для скорости приобретает вид

$$c(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = \left(\rho^{-1}\sum_\alpha \lambda_\alpha (\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}_\alpha\cdot\mathbf{a})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{S}_\alpha\cdot\mathbf{m})\right)^{1/2} \tag{3.3}$$

Рассматривая выражение для c, определенное формулой (3.3) как функцию двух векторных параметров $\mathbf{a}$, $\mathbf{m} \in S$, где S — сфера единичного радиуса в R^3, получим следующий результат.

Предложение 1. Экстремум

$$\sup_{\mathbf{a},\,\mathbf{m}\in S} c(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = c_0 \tag{3.4}$$

достигается при $\mathbf{a} = \mathbf{m} = \mathbf{m}_0$.

Доказательство. В силу неравенства Гельдера имеем

$$c^2(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \leq \left(\rho^{-1}\sum_\alpha \lambda_\alpha (\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}_\alpha\cdot\mathbf{a})^2\right)^{1/2}\left(\rho^{-1}\sum_\alpha \lambda_\alpha (\mathbf{m}\cdot\mathbf{S}_\alpha\cdot\mathbf{m})^2\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

Очевидно, что экстремум правой части (3.5) достигается при $\mathbf{a} = \mathbf{m}$, но при равных значениях $\mathbf{a}$ и $\mathbf{m}$ в (3.5) выполняется равенство.

Предложение 2. Вектор $\mathbf{m}_0$, где достигается (3.4), удовлетворяет условию Френеля — Адамара (2.3).

Доказательство. Выполняя дифференцирование в (3.3) и учитывая (3.2), получим

$$\xi'\cdot\mathbf{A}(\mathbf{m}_0)\cdot\mathbf{m}_0 = 0 \tag{3.6}$$

причем (3.6) должно выполняться для любого вектора ξ', принадлежащего слою $T^*_{m_0}(S)$, где $T^*(S)$ — соответствующее кокасательное расслоение. Но это означает, что вектор $\mathrm{A}(\mathrm{m}_0)\cdot\mathrm{m}_0$, будучи ортогонален к $T^*_{m_0}(S)$, ориентирован вдоль вектораа m_0. Таким образом, m_0 является собственным вектором акустического тензора $\mathrm{A}(\mathrm{m}_0)$, что обеспечивает выполнение условия (2.3).

Следствие. Для любого гиперупругого анизотропного материала, тензор упругости которого строго эллиптичен, волны с наибольшими скоростями распространения необходимо являются продольными.

Предложение 3. При любой анизотропии упругой среды напряжения на фронте продольной волны не содержат касательных составляющих.

Доказательство. Напряжения на фронте продольной волны определяются следующим выражением

$$\sigma_m = c\mathrm{m}\cdot\mathrm{C}\cdot\cdot\mathrm{m}\otimes\mathrm{a} = c\mathrm{m}\cdot\mathrm{C}\cdot\cdot\mathrm{m}\otimes\mathrm{m} \tag{3.7}$$

где скалярный множитель c появляется при дифференцировании (2.2). Из (3.7), (2.3) следует

$$\sigma_m = c'\mathrm{m} \tag{3.8}$$

с некоторой новой константой c'.

Из предыдущего предложения и следствия из предложения 2 вытекает

Следствие. На фронте волны с наибольшей скоростью распространения отсутствуют касательные напряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.
2. *Федоров Ф. И.* К теории упругих волн в кристаллах//Вестн. МГУ. Сер. физика, астрономия. 1964. № 6. С. 36—40.
3. *Truesdell C.* Existence of longitudinal waves//J. Acoust. Soc. Amer. 1966. V. 40. No. 3. P. 729—730.
4. *Kolodner I.* Existence of longitudinal waves in anisotropic media//J. Acoust. Soc. Amer. 1966. V. 40. No. 3. P. 730—731.
5. *Gurtin M. E.* The linear theory of elasticity//Handbuch der Physik. Bd. 6a/2. Berlin: Springer, 1972. P. 1—295.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1993