МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. А. Г. ГОРШКОВ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, А. М. ШУКУРОВ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается осесимметричная задача о распространении в упругом полупространстве нестационарных волн от сферической полости, подкрепленной тонкой упругой оболочкой. Подобные вопросы для акустической среды исследованы в [1], где разрешающая система интегральных уравнений Вольтерра решалась численно. В данной работе применяется методика, изложенная в [2] и позволяющая избежать редукции бесконечных систем уравнений.

1. Постановка задачи. Пусть в однородном изотропном линейно упругом полупространстве $z \geq 0$ (O_2xyz — прямоугольная декартова система координат) на расстоянии h от плоскости $z = 0$ на оси O_2z расположен центр O сферической полости радиуса $r = 1$ $(h > 1)$. Поверхность полости подкреплена тонкой упругой сферической оболочкой того же радиуса. В начальный момент времени $\tau = 0$ к внутренней поверхности оболочки приложена симметричная относительно оси O_2z поверхностная нагрузка. Здесь и далее используются безразмерные величины, аналогичные примененным в [2], со следующими единицами измерения: длина — радиус полости R, время — $R/c_1^{(0)}$, масса — $\rho_0 R^3$, где ρ_0, $c_1^{(0)}$ и $c_2^{(0)}$ — плотность и скорости распространения волн расширения-сжатия и формоизменения в среде, занимающей полупространство. Исключение составляют координаты векторов контактного напряжения $\mathbf{p}_0$ и нагрузки на оболочку $\mathbf{p}_s$, отнесенные к модулю упругости материала оболочки E_1.

Возмущенные движения среды и оболочки рассматриваются в сферической системе координат (r, θ, ϑ) с центром в точке O (угол θ отсчитывается от положительного направления оси Oz, $0 \leq \theta \leq \pi$). Начально-краевая задача для среды относительно потенциалов смещений φ_0 и ψ_0 с учетом осевой симметрии имеет следующий вид (точками обозначено дифференцирование по времени τ):

$$\ddot{\varphi}_0 = \Delta\varphi_0, \quad \eta^2\ddot{\psi}_0 = \Delta\psi_0 - \psi_0/(r^2 \sin^2 \theta) \tag{1.1}$$

$$\sigma_{zz}^{(0)}\big|_{z=0} = \sigma_{xz}^{(0)}\big|_{z=0} = \sigma_{yz}^{(0)}\big|_{z=0} = 0 \quad (u_{x0}\big|_{z=0} = u_{y0}\big|_{z=0} = u_{z0}\big|_{z=0} = 0) \tag{1.2}$$

$$\sigma_{rr}^{(0)}\big|_{r=1} = \beta_1 p_0, \quad u_0\big|_{r=1} = w_1$$

$$\sigma_{r\theta}^{(0)}\big|_{r=1} = \beta_1 q_0 = k_{10}(v_0\big|_{r=1} - u_1 + \delta_1\Phi_1/2) \tag{1.3}$$

$$\varphi_0 = O(1), \quad \psi_0 = O(1), \quad r \to \infty \tag{1.4}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа в сферической системе координат; $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$ — компоненты тензора напряжений среды в соответствующей системе координат; u_{x0}, u_{y0}, u_{z0} — координаты вектора перемещений среды в декартовой системе координат; u_0 и v_0, w_1 и u_1, p_0 и q_0 — соответственно нормальные и тангенциальные составляющие векторов перемещений среды и оболочки, а также вектора контактного напряжения $\mathbf{p}_0$; Φ_1 — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки;

δ_1 — ее толщина. В соотношениях (1.2) вариант граничных условий без скобок соответствует свободной поверхности полупространства, а условия в скобках отвечают наличию жесткой стенки на плоскости $z = 0$. Коэффициент k_{10} в (1.3) позволяет рассматривать два случая контакта окружающей среды и оболочки (при $k_{10} = 0$ имеем свободное проскальзывание, а при $k_{10} = \infty$ — жесткое сцепление). Напряжения $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$ и перемещения среды связаны с потенциалами φ_0 и ψ_0 известными дифференциальными операторами линейной теории упругости.

Уравнения осесимметричного движения сферической оболочки запишем в матричном виде:

$$\gamma_1^2 \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \alpha_0 (\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_s) \tag{1.5}$$

$$\mathbf{u} = \| u_1, w_1, \Phi_1 \|^T, \quad \mathbf{L} = \| L_{ij} \|_{3\times 3}$$

$$\mathbf{p}_0 = \| q_0, p_0, 0 \|^T, \quad \mathbf{p}_s = \| q_s, p_s, 0 \|^T$$

где $\mathbf{L}$ — матрица с элементами в виде дифференциальных операторов, вид которых приведен в [3]; p_s и q_s — нормальная и тангенциальная составляющие вектора $\mathbf{p}_s$ нагрузки на оболочку; индекс (T) обозначает операцию транспонирования.

Использованные в соотношениях (1.1)—(1.5) коэффициенты определяются так:

$$\eta = \frac{c_1^{(0)}}{c_2^{(0)}}, \quad {c_1^{(0)}}^2 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}, \quad {c_2^{(0)}}^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0}$$

$$\beta_1 = \frac{E_1}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad \alpha_0 = \frac{1 - \nu_1^2}{\delta_1}, \quad \gamma_1 = \frac{c_1^{(0)}}{c_{01}} \quad c_{01}^2 = \frac{E_1}{\rho_1 (1 - \nu_1^2)}$$

где λ_0 и μ_0 — упругие постоянные Ламе окружающей среды, ρ_1 и ν_1 — плотность и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Постановку задачи замыкают начальные условия, соответствующие состоянию покоя системы в начальный момент времени $\tau = 0$:

$$\varphi_0 |_{\tau=0} = \dot{\varphi}_0 |_{\tau=0} = \psi_0 |_{\tau=0} = \dot{\psi}_0 |_{\tau=0} = u_1 |_{\tau=0} = \dot{u}_1 |_{r=0} = w_1 |_{\tau=0} = \dot{w}_1 |_{\tau=0} =$$

$$= \Phi_1 |_{\tau=0} = \dot{\Phi}_1 |_{\tau=0} = 0 \tag{1.6}$$

2. Метод решения. К начально-краевой задаче (1.1)—(1.6) применим преобразование Лапласа по времени τ (значок L — обозначает изображение, s — параметр преобразования).

Изображения потенциала φ_0^L, радиальных напряжений σ_{rr}^L, перемещений u_0^L, w_1^L и нормальной нагрузки p_s^L представим в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$, а изображения потенциала ψ_0^L, тангенциальных напряжений $\sigma_{r\theta}^L$, перемещений v_0^L, u_1^L, угла поворота нормали Φ_1^L и касательной нагрузки q_s^L — в виде рядов по полиномам Гегенбауэра — $\sin\theta C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)$.

Тогда уравнения колебания оболочки (1.4) запишутся так:

$$\gamma_1^2 s^2 \mathbf{u}_n^L(s) = \mathbf{l}_n \mathbf{u}_n^L(s) + \alpha_0 (\mathbf{p}_{0n}^L(s) + \mathbf{p}_{sn}^L(s)) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{u}_n^L(s) = \| u_{1n}^L(s), w_{1n}^L(s), \Phi_{1n}^L(s) \|^T,$$

$$\mathbf{p}_{0n}^L(s) = \| q_{0n}^L(s), p_{0n}^L(s), 0 \|^T, \quad \mathbf{p}_{sn}^L(s) = \| q_{sn}^L(s), p_{sn}^L(s), 0 \|^T$$

а уравнения движения среды (1.1) и условия контакта (1.3) примут следующий вид:

$$s^2\varphi_{0n}^L = \Delta_n\varphi_{0n}^L, \quad \eta^2 s^2\psi_{0n}^L = \Delta_n\psi_{0n}^L \tag{2.2}$$

$$\Delta_n = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\right] - \frac{n(n+1)}{r^2}$$

$$\sigma_{rrn}^{(0)L}\,|_{r=1} = \beta_1 p_{0n}^L(s), \quad u_{0n}^L\,|_{r=1} = w_{1n}^L(s)$$

$$\sigma_{r\theta n}^{(0)L}\,|_{r=1} = \beta_1 q_{0n}^L(s) = k_{10}\left(v_{0n}^L\,|_{r=1} - u_{1n}^L + \frac{\delta_1}{2}\Phi_{1n}^L\right) \tag{2.3}$$

Здесь индексом n отмечены коэффициенты соответствующих рядов; $\mathrm{l}_n = \|l_{ijn}\|_{3\times3}$ — матрица со следующими элементами [3]:

$$l_{11n} = 1 - n(n+1) - \alpha_1, \quad l_{12n} = \alpha_2, \quad l_{13n} = -\alpha_7$$

$$l_{21n} = \alpha_2 n(n+1), \quad l_{22n} = -\alpha_3 - \alpha_7 n(n+1), \quad l_{23n} = \alpha_7 n(n+1)$$

$$l_{31n} = -\alpha_4, \quad l_{32n} = \alpha_4, \quad l_{33n} = 1 - n(n+1) - \alpha_5$$

$$\alpha_1 = \nu_1 + \alpha_7, \quad \alpha_2 = 1 + \alpha_1, \quad \alpha_3 = 2(1+\nu_1), \quad \alpha_4 = 12\alpha_6/\delta_1$$

$$\alpha_5 = \nu_1 + \alpha_4, \quad \alpha_6 = (1-\nu_1)k^2/(2\delta_1), \quad \alpha_7 = \delta_1\alpha_6, \quad k^2 = 0{,}86$$

В соотношениях (2.1)—(2.3) не отражены условия (1.2)—(1.4). Учитывая свойства модифицированных функций Бесселя $I_{n+1/2}(x)$ и $K_{n+1/2}(x)$, образующих фундаментальную систему решений уравнений (2.2), условия (1.2) и (1.4) будут удовлетворены, если изображения потенциалов φ_0^L и ψ_0^L представить так:

$$\varphi_0^L = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{r}}A_n^L(s)K_{n+1/2}(rs)P_n(\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{r_1}}C_n^L(s)K_{n+1/2}(r_1 s)P_n(\cos\theta_1)\right] \tag{2.4}$$

$$\psi_0^L = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{r}}B_n^L(s)K_{n+1/2}(r\eta s)\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{r}}D_n^L(s)K_{n+1/2}(r_1\eta s)\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta_1)\right], \quad P_n'(x) = C_{n-1}^{3/2}(x) \tag{2.5}$$

где $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$, $C_n^L(s)$ и $D_n^L(s)$ — неизвестные функции, которые определяются из граничных условий; r_1 и θ_1 — координаты сферической системы с началом в точке O_1, симметричной точке O относительно плоской границы полупространства $z = 0$.

Учитывая связь между переменными r, θ и r_1, θ_1 на плоскости $z = 0$ и удовлетворяя граничным условиям (1.2), получим зависимости между функциями $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$, $C_n^L(s)$ и $D_n^L(s)$:

$$C_n^L(s) = \mp(-1)^n A_n^L(s), \quad D_n^L(s) = \mp(-1)^n B_n^L(s) \tag{2.6}$$

где верхний знак соответствует свободной поверхности, а нижний — жесткой стенке.

Используя теорему сложения для функций $K_{n+1/2}(x)$ [4], представим коэффициенты φ_{0n}^L и ψ_{0n}^L следующим образом:

$$\varphi_{0n}^L = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[A_n^L(s)K_{n+1/2}(rs) \mp (-1)^n(2n+1)I_{n+1/2}(rs)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p A_p^L(s)\sum_{\sigma=|p-n|}^{n+p} b_\sigma^{(n0p0)}\sqrt{\frac{\pi}{4hs}}K_{\sigma+1/2}(2hs)\right] \tag{2.7}$$

$$\psi_{0n}^L = -\frac{1}{\sqrt{r}}\,[B_n^L(s)\,K_{n+1/2}(r\eta s) \mp (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} I_{n+1/2}(r\eta s) \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_p^L(s) \sum_{\sigma=|p-n|}^{n+p} b_\sigma^{(n1p1)} \sqrt{\frac{\pi}{4h\eta s}}\, K_{\sigma+1/2}(2h\eta s)\,] \qquad (2.8)$$

где $b_\sigma^{(n0p0)}$, $b_\sigma^{(n1p1)}$ — коэффициенты Клебша—Гордона [4].

Соотношения (2.1), (2.3), (2.7) и (2.8) совместно с формулами связи коэффициентов разложений в ряды изображений напряжений, перемещений и потенциалов [3] могут быть сведены к совокупности четырех бесконечных алгебраических систем уравнений относительно $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$, $u_{1n}^L(s)$ и $\Phi_{1n}^L(s)$, которые запишем в матричной форме ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$(\mathrm{F}_i^{(1)}XY - \mathrm{F}_i^{(2)}XZ^2V + \mathrm{M}_i Z^2V)\,\mathrm{A} + (\mathrm{T}_i^{(1)}YZ - \mathrm{T}_i^{(2)}YZV^2 +$$

$$+ \mathrm{N}_i ZV^2)\,\mathrm{B} + \mathrm{L}_i \mathrm{U}ZV + \mathrm{K}_i \Phi ZV = \mathrm{P}_i ZV \qquad (2.9)$$

$$\mathrm{A} = \|A_0^L, A_1^L, \ldots\|^T,\ \mathrm{B} = \|B_1^L, B_2^L, \ldots\|^T,\ \mathrm{U} = \|u_{11}^L, u_{12}^L, \ldots\|^T$$

$$\Phi = \|\Phi_{11}^L, \Phi_{12}^L, \ldots\|^T,\ \mathrm{P}_1 = \|q_{s1}^L, q_{s2}^L, \ldots\|^T,\ \mathrm{P}_2 = \|p_{s1}^L, p_{s2}^L, \ldots\|^T$$

$$\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_4 = 0,\ \mathrm{F}_i^{(k)} = \|F_{inp}^{(k)}\|,\ \mathrm{M}_i = \|M_{inp}\delta_{np}\| \quad (n, p \geq 0)$$

$$\mathrm{T}_i^{(k)} = \|T_{inp}^{(k)}\|,\ \mathrm{N}_i = \|N_{inp}\delta_{np}\|,\ \mathrm{L}_i = \|L_{inp}\delta_{np}\|$$

$$\mathrm{K}_i = \|K_{inp}\delta_{np}\| \quad (n, p \geq 1) \quad (k = 1, 2)$$

$$X = e^{-2hs},\ Y = e^{-2h\eta s},\ Z = e^{-s},\ V = e^{-\eta s}$$

Здесь δ_{np} — символ Кронекера; A, B, U, Φ и P_i — бесконечные столбцы; $\mathrm{F}_i^{(k)}$, $\mathrm{T}_i^{(k)}$, M_i, N_i, L_i и K_i — бесконечные матрицы (последние четыре — диагональные). Элементы этих матриц, полученные с учетом связи функций $I_{n+1/2}(x)$ и $K_{n+1/2}(x)$ с элементарными, являются рациональными функциями параметра s и имеют следующий вид ($i = 1, 3, 2, 4$; $k = 1, 2$):

$$F_{inp}^{(k)}(s) = f_{in}^{(k)}(s)\,C_{np}(s), \qquad T_{inp}^{(k)}(s) = t_{in}^{(k)}(s)\,S_{np}(s)$$

$$f_{1n}^{(2)}(s) = f_{1n}^{(1)}(-s) = M_{1nn}(s) = l_{12n}R_{n1}(s) - k_0Q_{n2}(s), \quad k_0 = \alpha_0\beta_0/\beta_1$$

$$f_{2n}^{(2)}(s) = f_{2n}^{(1)}(-s) = M_{2nn}(s) = (l_{22n} - \gamma_1^2 s^2)\,R_{n1}(s) - k_0Q_{n1}(s)$$

$$f_{3n}^{(2)}(s) = f_{3n}^{(1)}(-s) = M_{3nn}(s) = l_{32n}R_{n1}(s)$$

$$f_{4n}^{(2)}(s) = f_{4n}^{(1)}(-s) = M_{4nn}(s) = Q_{n2}(s) - k_{10}R_{n0}(s)$$

$$t_{1n}^{(2)}(s) = t_{1n}^{(1)}(-s) = [l_{12n}R_{n0}(\eta s) - k_0Q_{n3}(\eta s)\,n^{-1}(n+1)^{-1}]/\eta^n$$

$$t_{2n}^{(2)}(s) = t_{2n}^{(1)}(-s) = [(l_{22n} - \gamma_1^2 s^2)\,R_{n0}(\eta s) - k_0Q_{n2}(\eta s)]/\eta^n$$

$$t_{3n}^{(2)}(s) = t_{3n}^{(1)}(-s) = l_{32n}R_{n0}(\eta s)/\eta^n$$

$$t_{4n}^{(2)}(s) = t_{4n}^{(1)}(-s) = \eta^{-n}\,[Q_{n3}(\eta s) - k_{10}R_{n3}(\eta s)]/[n(n+1)]$$

$$N_{1nn}(s) = n(n+1)\,t_{1n}^{(2)}(s),\ N_{3nn}(s) = n(n+1)\,t_{3n}^{(2)}(s)$$

$$N_{2nn}(s) = n(n+1)\,[(l_{22n} - \gamma_1^2 s^2)\,R_{n1}(\eta s) - k_0Q_{n1}(\eta s)]/\eta^n$$

$$N_{4nn}(s) = [Q_{n2}(\eta s) - k_{10}R_{n0}(\eta s)]/\eta^n$$

$$L_{1nn}(s) = (\gamma_1^2 s^2 - l_{11n})\,s^n,\ L_{2nn}(s) = -l_{21n}s^n,\ L_{3nn}(s) = -l_{31n}s^n$$

$$L_{4nn}(s) = k_{10}s^n,\ K_{1nn}(s) = -l_{13n}s^n,\ K_{2nn}(s) = -l_{23n}s^n$$

$$K_{3nn}(s) = (\gamma_1^2 s^2 - l_{33n})\, s^n,\ K_{4nn}(s) = \delta_1 k_{10}s^n/2$$

$$C_{np}(s) = \sum_{\sigma=|p-n|}^{n+p} b_\sigma^{(n0p0)} r_{\sigma np}(2hs),\ S_{np}(s) = \sum_{\sigma=|n-p|}^{n+p} b_\sigma^{(n1p1)} r_{\sigma np}(2h\eta s)$$

$$r_{\sigma np}(s) = \mp(-1)^p(2n+1)\, s^{-\sigma-1}R_{\sigma 0}(s)/2 \tag{2.10}$$

Многочлены $R_{n0}(s)$, $R_{nk}(s)$ и $Q_{nk}(s)$ $(k = 1, 2, 3)$, входящие в формулы (2.10), приведены в [3].

Решение системы (2.9) представим в виде рядов по экспонентам, что позволяет отказаться от использования редукции

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \mathbf{a}_{ijkl}(s)\, X^iY^jZ^{-k+1}V^{-l},\ \mathbf{B} = \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \mathbf{b}_{ijkl}(s)\, X^iY^jZ^{-k+2}V^{-l-1}$$

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \mathbf{u}_{ijkl}(s)\, X^iY^jZ^{-k+2}V^{-l},\ \mathbf{\Phi} = \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}_{ijkl}(s)\, X^iY^jZ^{-k+2}V^{-l} \tag{2.11}$$

Здесь $\mathbf{a}_{ijkl}(s)$, $\mathbf{b}_{ijkl}(s)$, $\mathbf{u}_{ijkl}(s)$ и $\mathbf{\Phi}_{ijkl}(s)$ — бесконечные векторы соответственно с элементами $a_{ijkl}^{(n)}(s)$ $(n \geq 0)$, $b_{ijkl}^{(n)}(s)$, $u_{ijkl}^{(n)}(s)$, $\Phi_{ijkl}^{(n)}(s)$ $(n \geq 1)$.

Подставляя (2.11) в систему (2.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях X, Y, Z и V, получим рекуррентные соотношения для $\mathbf{a}_{ijkl}(s)$, $\mathbf{b}_{ijkl}(s)$, $\mathbf{u}_{ijkl}(s)$ и $\mathbf{\Phi}_{ijkl}(s)$ (в силу громоздкости они не приводятся) и следующие начальные условия к ним:

$$a_{0000}^{(n)} = \Delta_1/\Delta_0,\ b_{0000}^{(n)} = \Delta_2/\Delta_0,\ u_{0000}^{(n)} = \Delta_3/\Delta_0,\ \Phi_{0000}^{(n)} = \Delta_4/\Delta_0$$

$$\mathbf{a}_{0jkl} = 0 \quad (j, k, l \geq 1),\quad \mathbf{a}_{ijk1} = 0 \quad (i, j, k \geq 1) \tag{2.12}$$

$$\mathbf{a}_{ij1l} = 0 \quad (i, j \geq 1, l \geq 0),\quad \mathbf{a}_{i0kl} = 0 \quad (i \geq 0;\ k, l \geq 2)$$

$$\mathbf{a}_{i00l} = 0 \ (i \geq 0, l \geq 1),\ \mathbf{a}_{i0k1} = 0 \ (i \geq 0, k \geq 1)$$

$$\mathbf{a}_{i01l} = 0 \ (i, l \geq 0),\quad \mathbf{a}_{00k0} = 0 \ (k \geq 1)$$

$$\mathbf{a}_{0j10} = \mathbf{a}_{0j01} = 0 \quad (j \geq 1)$$

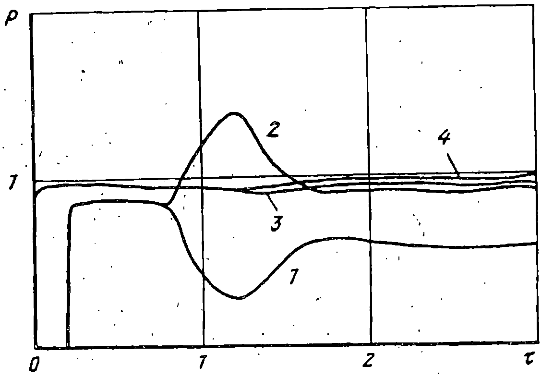
$$\Delta_0 = \det \mathbf{M},\ \mathbf{M} = \|\mathbf{M}_{nn}, \mathbf{N}_{nn}, \mathbf{L}_{nn}, \mathbf{K}_{nn}\|$$

$$\mathbf{M}_{nn} = \|M_{1nn}, M_{2nn}, M_{3nn}, M_{4nn}\|^T,\ \mathbf{N}_{nn} = \|N_{1nn}, N_{2nn}, N_{3nn}, N_{4nn}\|^T$$

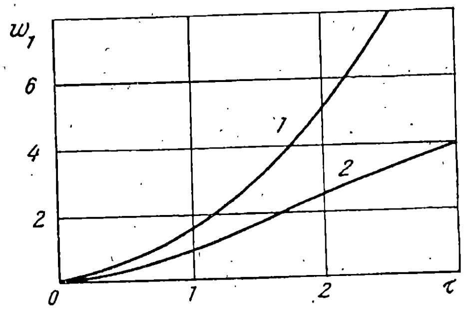
$$\mathbf{L}_{nn} = \|L_{1nn}, L_{2nn}, L_{3nn}, L_{4nn}\|^T,\ \mathbf{K}_{nn} = \|K_{1nn}, K_{2nn}, K_{3nn}, K_{4nn}\|^T$$

Здесь Δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — определители, полученные из Δ_0 заменой i-го столбца на столбец $\|q_{sn}, p_{sn}, 0, 0\|^T$. Однородные условия в (2.12) записаны только для столбцов $\mathbf{a}_{ijkl}$. Для остальных коэффициентов рядов (2.11) они имеют аналогичный вид.

Упомянутые рекуррентные соотношения позволяют определить все элементы столбцов $\mathbf{a}_{ijkl}(s)$, $\mathbf{b}_{ijkl}(s)$, $\mathbf{u}_{ijkl}(s)$, $\mathbf{\Phi}_{ijkl}(s)$ в виде рациональных функций, что дает возможность просто вычислить их оригиналы с помощью теории вычетов, и, следовательно, найти оригиналы коэффициентов рядов перемещений u, v, напряжений σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ и кинематических параметров оболочки u_1, w_1, Φ_1.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отметим, что из полученного решения как частный случай следует решение соответствующей задачи для акустической среды при $\eta \to \infty$.

3. Пример. В качестве примера использования приведенного алгоритма рассмотрим соответствующую задачу для акустического полупространства (вода—сталь). Положим, что $h = 1{,}5$, и к внутренней поверхности оболочки приложена нормальная нагрузка $p_s = H(\tau)$, $q_s = 0$.

На фиг. 1 приведены графики изменения гидродинамического давления в точке $r = 1, 2$, $\theta = \pi$ среды и на поверхности оболочки $r = 1$, $\theta = \pi$ (кривые *1*, *3* соответствуют свободной поверхности, а кривые *2*, *4* — жесткой стенке). На фиг. 2 показаны графики радиального перемещения оболочки w_1 (кривая *1* получена для свободной поверхности, а кривая *2* для жесткой стенки). При вычислениях удерживалось четыре члена ряда по полиномам Лежандра.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ). Код проекта 93-013-16508.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабаев А. Э.* Задачи дифракции нестационарных волн на оболочках, расположенных вблизи плоской границы.//Прикл. мех. 1989. Т. 25. № 1. С. 71—83.
2. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В., Шукуров А. М.* Дифракция нестационарных волн на сферической полости в упругом полупространстве.//Изв. АН. МТТ. 1992. № 5. С. 43—47.
3. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
4. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 184 с.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами./ Под. ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979, 832 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.IV.1995