

УДК 539.3:621.89

© 1995 г. В. М. АЛЕКСАНДРОВ

## КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОБЛЕМОЙ ГЕРМЕТИЧНОСТИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СТЫКОВ

Необходимость обеспечения герметичности деформируемых стыков при высоких рабочих давлениях и разряжениях возникает при конструировании различных аппаратов в авиационно-космической, судостроительной, химико-биологической и других отраслях промышленности. Сюда относится расчет всевозможных уплотнительных элементов и клапанов. Указанная проблема здесь сводится к исследованию своеобразных контактных задач. В итоге численно-аналитического решения этих задач формулируется условие, обеспечивающее абсолютную герметичность стыка.

1. Будем параллельно рассматривать плоские и осесимметричные задачи.

*Задача А.* Дан упругий слой ( $|x| < \infty$ ,  $|y| < \infty$ ,  $0 \leq z \leq \delta$ ), защемленный по основанию. Пусть на верхнюю границу слоя ( $z = \delta$ ) поставлена (фиг. 1) плоским торцом жесткая стенка ( $|x| \leq a$ ,  $|y| < \infty$ ,  $\delta \leq z < \infty$ ). Слева от стенки находится жидкость под давлением  $p_*$ , справа давление равно  $p_0$ , причем  $p_0 < p_*$ . Допустим теперь, что стенка удерживается в неподвижном состоянии, а через область контакта  $|x| \leq a$  ее со слоем, вследствие деформации последнего, жидкость просачивается направо, образуя прослойку толщины  $h(x)$  ( $\max h(x) \ll 2a$ ). Необходимо рассчитать вертикальное усилие  $P$  на единицу длины стенки, удерживающее ее так, чтобы поток  $Q$  жидкости был бы предельно мал. Такой случай возможен и обнаружен в [1], назовем его режимом фильтрации или ограниченной герметичности.

*Задача В.* На верхнюю границу ( $z = \delta$ ) слоя ( $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq z \leq \delta$ ) поставлен (фиг. 2) плоским торцом жесткий цилиндр ( $a \leq r \leq b$ ,  $\delta \leq z < \infty$ ). Внутри цилиндра находится жидкость под давлением  $p_*$ , вне цилиндра давление равно  $p_0$  ( $p_0 < p_*$ ). Пусть теперь цилиндр удерживается в неподвижном состоянии, а через область контакта  $a \leq r \leq b$  его со слоем, вследствие деформации последнего, жидкость просачивается наружу, образуя прослойку толщины  $h(r)$  ( $\max h(r) \ll b - a$ ). Необходимо рассчитать вертикальное усилие  $P$ , удерживающее цилиндр так, чтобы поток  $Q$  жидкости наружу был бы предельно мал.

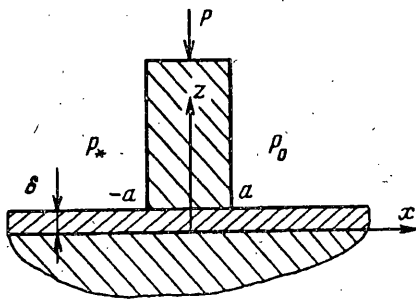
Задача А может быть приведена к следующей системе уравнений: интегральное уравнение контакта стенки со слоем [2]:

$$(p_* - p_0) \int_{-\infty}^{-a} k\left(\frac{\xi - x}{\delta}\right) d\xi + \int_{-a}^a [p(\xi) - p_0] k\left(\frac{\xi - x}{\delta}\right) d\xi = \pi\theta h(x) \quad (|x| \leq a) \quad (1.1)$$

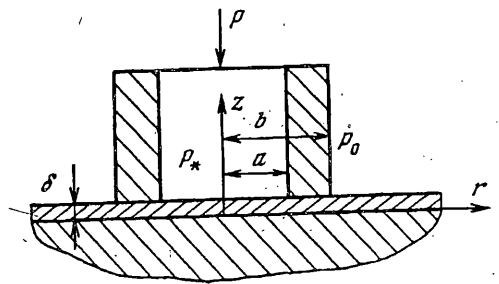
дифференциальное уравнение Рейнольдса [3]:

$$-\frac{h^3 p'}{12\mu} = Q, \quad p(-a) = p_*, \quad p(a) = p_0 \quad (1.2)$$

описывающее стационарное течение несжимаемой ньютоновской жидкости в тонком слое. В (1.1) и (1.2) введены обозначения:  $p(x)$  — контактное давление,



Фиг. 1



Фиг. 2

$\theta = G(1 - \nu)^{-1}$ ,  $G$  и  $\nu$  — упругие постоянные,  $\mu$  — коэффициент вязкости. Ядро уравнения (1.1) имеет вид [2]:

$$k(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \quad (1.3)$$

$$L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 1 + \kappa^2 + 4u^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu \quad (1.4)$$

Задача В может быть приведена к такой системе уравнений: интегральное уравнение контакта цилиндра со слоем [2]:

$$(p_* - p_0) \int_0^a k\left(\frac{r}{\delta}, \frac{\rho}{\delta}\right) \rho d\rho + \int_a^b [p(\rho) - p_0] k\left(\frac{r}{\delta}, \frac{\rho}{\delta}\right) \rho d\rho = \theta \delta h(r) \quad (a \leq r \leq b) \quad (1.5)$$

дифференциальное уравнение Рейнольдса [3]:

$$-\frac{\pi r}{6\mu} h^3 p' = Q, \quad p(a) = p_*, \quad p(b) = p_0 \quad (1.6)$$

Здесь  $p(r)$  — контактное давление, а ядро уравнения (1.5) имеет вид [2]:

$$k(t, \tau) = \int_0^{\infty} L(u) J_0(tu) J_0(\tau u) du \quad (1.7)$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя, а  $L(u)$  дается формулой (1.4).

Будем предполагать, что в задачах А и В вязкость следующим образом зависит от давления [3]:

$$\mu = \mu_0 \exp[n(p - p_0)] \quad (1.8)$$

где  $n$  — пьезокоэффициент вязкости.

Как показано в [4], при малых значениях параметра  $\lambda = \delta/a$  уравнение (1.1) задачи А вырождается в соотношение

$$p(x) - p_0 = \frac{\theta}{\delta A} h(x), \quad A = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)^2} \quad (1.9)$$

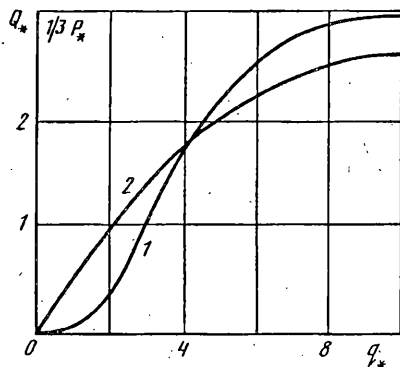
Введем безразмерные величины

$$q = n(p - p_0), \quad q_* = n(p_* - p_0) \quad (1.10)$$

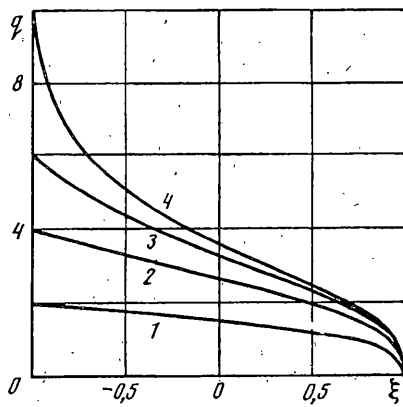
$$\xi = x/a, \quad Q_* = 12\mu_0 k^3 n^4 a Q, \quad k = \theta/(\delta A)$$

Тогда уравнение (1.2) с учетом (1.8) и (1.9) примет вид

$$e^{-q} q^3 q' = Q_*, \quad q(-1) = q_*, \quad q(1) = 0 \quad (1.11)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

К (1.11) нужно еще добавить условие

$$P_0 = 2ap_0 + \frac{a}{n} P_*, \quad P_* = \int_{-1}^1 q d\xi \quad (1.12)$$

При заданном  $q_*$  из (1.11) и (1.12) найдем  $q(\xi)$  и значения  $Q_*$ ,  $P_*$ . В окрестности  $\xi = 1$  функция  $q(\xi)$  может быть представлена в явной форме

$$q = (4Q_*(1 - \xi))^{1/4} \quad (1.13)$$

На фиг. 3 кривая 1 — зависимость  $Q_*$  от  $q_*$ , кривая 2 — зависимость  $P_*$  от  $q_*$ . На фиг. 4 кривые 1—4 — зависимость  $q$  от  $\xi$  при  $q_* = 2, 4, 6, 10$ . Заметим, что график для  $h(x)$  подобен графику  $q$ , т. е.  $h(a) = 0$ . Следовательно, при небольшом превышении силы  $P_0$ , определяемой формулой (1.12), когда стенка немного переместится поступательно в отрицательном направлении оси  $z$ , произойдет абсолютное закрытие канала для жидкости.

Аналогично для задачи В при малых значениях параметра  $\lambda = \sup [\delta/a, \delta/(b-a)]$  уравнение (1.5) вырождается в соотношение [5]:

$$p(r) - p_0 = \theta h(r)/(\delta A) \quad (1.14)$$

Введем согласно (1.10) безразмерные величины  $q$ ,  $q_*$  и  $k$ , а также

$$\xi = r/b; \quad \varepsilon = a/b, \quad Q_* = 6\pi^{-1} \mu_0 k^3 n^4 Q \quad (1.15)$$

Тогда уравнение (1.6) с учетом (1.8) и (1.14) примет вид

$$-\xi q^3 e^{-q} q' = Q_*, \quad q(\varepsilon) = q_*, \quad q(1) = 0 \quad (1.16)$$

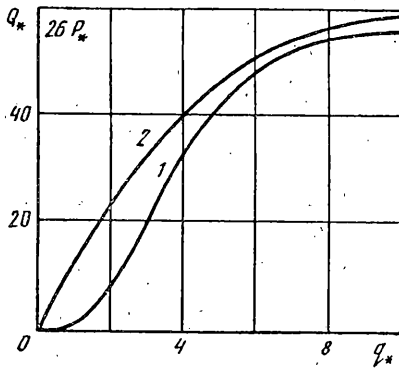
К (1.16) нужно еще добавить условие

$$P_0 = \pi b^2 (1 - \varepsilon^2) p_0 + b^2 n^{-1} P_*, \quad P_* = 2\pi \int_{\varepsilon}^1 q(\xi) \xi d\xi \quad (1.17)$$

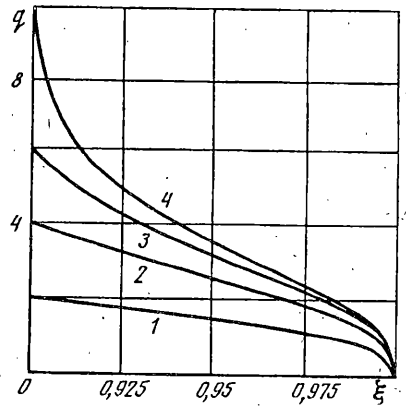
При заданных  $q_*$  и  $\varepsilon$  из (1.16) и (1.17) найдем  $q(\xi)$  и значения  $Q_*$ ,  $P_*$ . В окрестности  $\xi = 1$  функция  $q(\xi)$  может быть представлена в явной форме

$$q(\xi) = (4Q_* \ln \xi^{-1})^{1/4} \quad (1.18)$$

Примем для расчетов  $\varepsilon = 0,9$ . На фиг. 5 кривая 1 — зависимость  $Q_*$  от  $q_*$ , кривая 2 — зависимость  $P_*$  от  $q_*$ , на фиг. 6 кривые 1—4 — зависимость  $q$  от  $\xi$  при  $q_* = 2, 4, 6, 10$ . График для  $h(r)$  подобен графику  $q$ .



Фиг. 5



Фиг. 6

2. Если слева от стенки (фиг. 1) или внутри цилиндра (фиг. 2) под давлением  $p_*$  находится баротропный сжимаемый газ с вязкостью  $\mu$  (независящей от давления) и плотностью  $\rho$  (прямопропорциональной давлению), то уравнение (1.2) нужно заменить (задача С) следующим [3]:

$$-h^3 \rho \rho' / (12\mu) = B, \quad p(-a) = p_*, \quad p(a) = p_0 \quad (2.1)$$

где  $B = \text{const}$  и расход газа через область контакта дается соотношением

$$Q = B\rho^{-1} \quad (2.2)$$

а уравнение (1.6) нужно заменить (задача D) таким [3]:

$$-\frac{\pi r}{6\mu} h^3 \rho \rho' = B, \quad p(a) = p_*, \quad p(b) = p_0 \quad (2.3)$$

где  $B = \text{const}$  и расход газа через область контакта снова дается соотношением (2.2).

Введем для задачи С безразмерные величины

$$q = \frac{p - p_0}{p_0}, \quad q_* = \frac{p_* - p_0}{p_0}, \quad \xi = \frac{x}{a} \quad (2.4)$$

$$B_* = 12\mu k^3 a B / p_0^5, \quad k = \theta / (\delta A)$$

Тогда уравнение (2.1) с учетом (1.9) примет вид

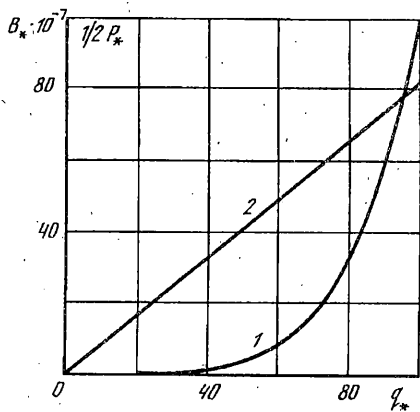
$$-q^3 (q + 1) q' = B_*, \quad q(-1) = q_*, \quad q(1) = 0 \quad (2.5)$$

К (2.5) нужно еще добавить условие (1.12), где  $n^{-1}$  следует заменить на  $p_0$ . При заданном  $q_*$  из (2.5) и (1.12) найдем, как и выше,  $q(\xi)$  и значения  $B_*$ ,  $P_*$ . В окрестности  $\xi = 1$  функция  $q(\xi)$  представима в форме (1.13), где только  $Q_*$  нужно заменить на  $B_*$ .

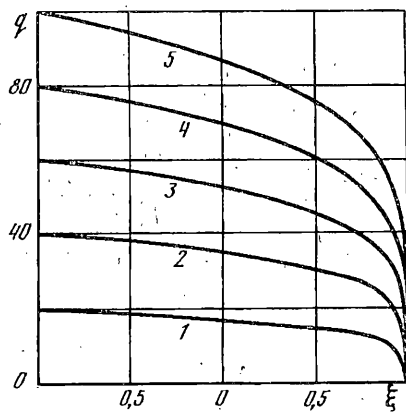
На фиг. 7 кривая 1 — зависимость  $B_*$  от  $q_*$ , кривая 2 — зависимость  $P_*$  от  $q_*$ . Последняя зависимость оказалась практически линейной. На фиг. 8 кривые 1—5 — зависимость  $q$  от  $\xi$  при  $q_* = 20, 40, 60, 80, 100$ . График для  $h(x)$  подобен графику  $q$ .

Аналогично для задачи D введем согласно (2.4) безразмерные величины  $q$ ,  $q_*$  и  $k$ , а также

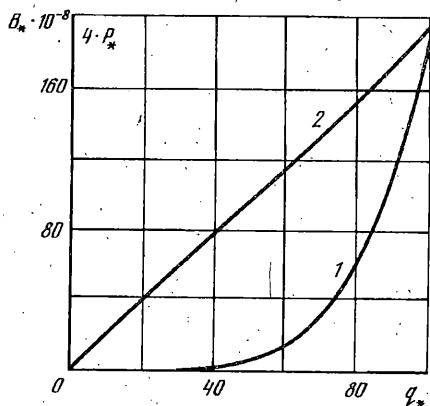
$$\xi = r/b, \quad \varepsilon = a/b, \quad B_* = 6\mu k^3 B / (\pi p_0^5) \quad (2.6)$$



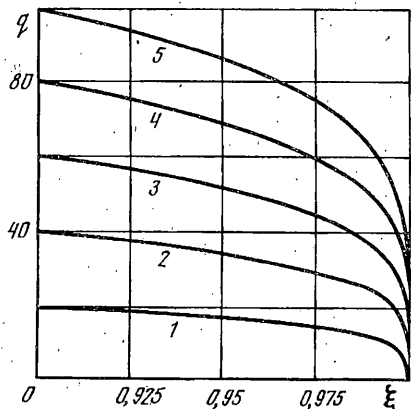
Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Тогда уравнение (2.3) с учетом (1.14) примет вид

$$-\xi q^3 (q + 1) q' = B_*, \quad q(\varepsilon) = q_*, \quad q(1) = 0 \quad (2.7)$$

К (2.7) нужно еще добавить условие (1.17), где  $n^{-1}$  следует заменить на  $p_0$ . При заданных  $q_*$  и  $\varepsilon$  из (2.7) и (1.17) найдем  $q(\xi)$  и значения  $B_*$ ,  $P_*$ . В окрестности  $\xi = 1$  функция  $q(\xi)$  представима в форме (1.18), где только  $Q_*$  нужно заменить на  $B_*$ .

Снова примем для расчетов  $\varepsilon = 0,9$ . На фиг. 9 кривая 1 — зависимость  $B_*$  от  $q_*$ , кривая 2 — зависимость  $P_*$  от  $q_*$ . Последняя зависимость оказалась практически линейной. На фиг. 10 кривые 1—5 — зависимость  $q$  от  $\xi$  при  $q_* = 20, 40, 60, 80, 100$ . График для  $h(r)$  подобен графику  $q$ .

3. Допустим, что стенка в задачах А, С и цилиндр в задачах В, D находится в направляющих, позволяющих им двигаться в направлении оси  $z$ . Тогда, если к стенке или цилиндру приложено вертикальное усилие  $p = p_0$ , то осуществляется режим фильтрации ( $Q$  — предельно мало), если  $p = p_0 - 0$ , то произойдет разгерметизация, если же  $p = p_0 + 0$ , то будет осуществлена герметизация стыка.

Описанная схема будет иметь силу, если основание стенки или цилиндра идеально ровное. Если же основание шероховато, то для обеспечения абсолютной герметичности к стенке или цилиндру нужно приложить дополнительное усилие, задавливающее упругую среду слоя в проемы между микровыступами (компенсирующее микронеровности). Для определения этого дополнительного усилия

допустим, что основание слоя или цилиндра имеет регулярный микрорельеф, описываемый уравнением

$$z = \varepsilon \cos(2\pi x/l) \cos(2\pi y/m) \quad (3.1)$$

где  $\varepsilon$  — высота микронеровностей,  $2l$  — шаг микронеровностей по направлению  $x$ ,  $2m$  — шаг микронеровностей по ортогональному к  $x$  направлению  $y$ .

Учитывая, что  $\varepsilon \ll \delta$ , рассмотрим задачу  $E$  о вдавливании в слой бесконечного в направлениях  $x$  и  $y$  штампа с поверхностью основания (3.1). Такая задача сводится к интегральному уравнению [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, \eta) k\left(\frac{\xi-x}{\delta}, \frac{\eta-y}{\delta}\right) d\xi d\eta = \pi^2 \theta \delta \left( \gamma - \varepsilon \cos \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi y}{m} \right) \quad (|x| < \infty, |y| < \infty) \quad (3.2)$$

где  $q(x, y)$  — контактное давление,  $\gamma$  — осадка штампа, ядро  $k(z, \zeta)$  дается формулой [2]:

$$k(z, \zeta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos sz \cos t\zeta ds dt \quad (u = \sqrt{s^2 + t^2}) \quad (3.3)$$

Здесь  $L(u)$  по-прежнему имеет вид (1.4).

Определим среднее по периодам  $2l$  и  $2m$  усилие, которое нужно приложить к штампу, чтобы обеспечить при всех  $x$  и  $y$  неотрицательность контактного давления  $q(x, y)$ . Используя теорему о свертке для интегрального преобразования Фурье, найдем решение уравнения (3.2) в виде

$$q(x, y) = \frac{\theta \varepsilon}{\delta} \left[ \frac{\gamma}{\varepsilon A} - \frac{n}{L(n)} \cos \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi y}{m} \right] \quad (3.4)$$

$$(n = 2\pi \delta (l^{-2} + m^2)^{1/2})$$

Удовлетворяя далее условию  $q(0, 0) = 0$ , исключим  $\gamma$  и получим

$$q^* = \frac{1}{4lm} \int_{-l}^l \int_{-m}^m q(x, y) dx dy = \frac{\theta \varepsilon n}{\delta L(n)} \quad (3.5)$$

Теперь можно заключить, что для обеспечения абсолютной герметичности стыка к стенке или цилиндру нужно соответственно приложить усилие

$$P = P_0 + \omega q^* \begin{cases} 1, \\ 2\pi b, \end{cases} \quad \omega = \sup(2l, 2m) \quad (3.6)$$

где  $P_0$  определяется формулой (1.12) или (1.17).

Ниже даны значения  $L(n)/n$  при  $\nu = 0,3$ , необходимые для расчета  $q^*$ .

$n$	0	0,5	1	1,5	2
$L(n)/n$	0,408	0,413	0,416	0,405	0,381
$n$	2,5	3	3,5	4	4,5
$L(n)/n$	0,347	0,311	0,276	0,246	0,221

Заметим, что при больших  $n$  функция  $L(n)$  экспоненциально стремится к единице.

Если микрогеометрия основания стенки или цилиндра не регулярна, то расчет  $q^*$  нужно вести по максимальной высоте и среднестатистическому шагу микронеровностей.

Отметим, что полученные результаты нетрудно обобщить на случай неньютоновской жидкости со степенным характером зависимости напряжения сдвига от скорости сдвига.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» по направлению «Фундаментальные проблемы математики и механики».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камал. Уплотнение с высоким давлением в зазоре//Проблемы трения и смазки. 1968. Т. 90. № 2. С. 111—116.
2. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Коровчинский М. В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. М.: Машгиз, 1959. 404 с.
4. Александров В. М. К вопросу о герметичности деформируемых стыков//Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1989. Т. 4. № 2. С. 13—16.
5. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача, связанная с проблемой герметичности деформируемых стыков//Современные проблемы механики контактных взаимодействий. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1990. С. 6—9.

Москва

Поступила в редакцию  
13.X.1993