

УДК 539.377

© 1995 г. А. А. ЕВТУШЕНКО, Е. В. КОВАЛЕНКО

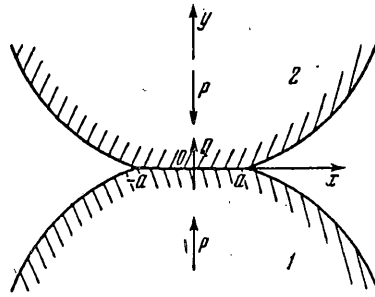
### ВЛИЯНИЕ ТЕРМОСОПРОТИВЛЕНИЯ НА ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНТАКТА В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается плоская контактная задача о взаимодействии двух полубесконечных нагретых тел, когда термосопротивление в области их касания обратно пропорционально контактному давлению. Задача приводится к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений, для решения которой применяется модификация метода ортогональных полиномов. Последняя позволяет исследовать влияние величины прижимающей силы, теплофизических и механических параметров соприкасающихся тел на основные характеристики контакта: давление, тепловой поток и ширину участка взаимодействия.

В работах [1—3] при изучении контактных явлений, протекающих в условиях теплового режима, установлено, что увеличение перепада температур вызывает рост относительных кривизн поверхностей взаимодействующих тел и, как следствие, уменьшение области контакта. Здесь важную роль играют два фактора: направление теплового потока между телами и величины коэффициентов их термического искажения. Показано, что в случае тела с большим коэффициентом термического искажения, обладающим более высокой температурой, на краях площадки контакта образуется зона, где давление отрицательно при любой разности температур сопряженных поверхностей. Отсюда, при заданной внешней силовой и тепловой нагрузке получаемое решение соответствующей задачи термоупругости некорректно или вообще не существует. В [4] сделан вывод, что этот результат напрямую зависит от граничных условий, предполагающих равенство температур поверхностей тел в области контакта и их теплоизоляцию вне ее. Для преодоления возникающих здесь сложностей в [3] предложено ввести в рассмотрение область неполного контакта, в которой давление и зазор между взаимодействующими телами равны нулю, однако учитывается тепловой поток между ними. Предположение о существовании зоны неполного контакта позволило объяснить ряд экспериментально наблюдаемых явлений, в частности, термическую ректификацию.

Несколько иным подходом к решению задач о взаимодействии тел с различными температурами является учет дискретности контакта вследствие шероховатости их поверхностей. Установлено, что площадь фактического контакта составляет незначительную долю от номинальной, определяемой геометрическими размерами тел. Поэтому между взаимодействующими деталями имеются микрополости, заполненные воздухом или иной средой и являющиеся причиной контактного термосопротивления [5]. Согласно экспериментальным данным [6], величина его обратно пропорциональна контактному давлению и, следовательно, соответствующая граничная задача термоупругости становится существенно нелинейной. По этой причине в основном известны решения лишь одномерных задач [7, 8].

1. В рамках плоской теории упругости (плоская деформация) рассмотрим задачу о взаимодействии без трения двух цилиндрических тел с образующими, параллельными оси  $Oz$  (фиг. 1). Предположим, что тела прижимаются друг к другу силами  $P$ , отнесенными к единице длины, и разогреты до разных температур. При этом суммарная интенсивность теплового потока через линию контакта  $|x| \leq a$  равна  $Q$ . Ниже величины, связанные с контактирующими цилиндрами,



Фиг. 1

снабдим соответственно индексами 1 и 2. Тогда граничные условия в касательной плоскости  $y=0$  примут вид

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} = \begin{cases} -p(x) & (|x| \leq a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} = 0 \quad (|x| < \infty)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{x}{R} \quad (|x| \leq a) \quad (1.2)$$

Здесь  $\sigma_y(x, y)$  и  $\tau_{xy}(x, y)$  — компоненты тензора напряжений, причем  $\sigma_y^{(i)}(x, y), \tau_{xy}^{(i)}(x, y) \rightarrow 0$  при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  ( $i=1, 2$ ),  $v(x, y)$  — составляющая вектора перемещений вдоль оси  $Oy$ ,  $p(x)$  — контактное давление,  $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$  — относительная кривизна. Будем считать тепловой контакт тел 1 и 2 неидеальным, т. е.

$$T_2(x, 0) - T_1(x, 0) = \rho(x) q(x) \quad (|x| \leq a) \quad (1.3)$$

а свободные части их боковых поверхностей теплоизолированными

$$\partial T_i / \partial y = 0 \quad (y=0, |x| > a, i=1, 2) \quad (1.4)$$

В формулах (1.3), (1.4)  $T_i(x, y)$  — температуры соприкасающихся тел, исчезающие на бесконечности,  $\rho(x)$  — термосопротивление,  $q(x)$  — интенсивность теплового потока в области взаимодействия, отличная от нуля при  $|x| < a$ .

В соответствии с экспериментальными данными [6], возьмем функцию  $\rho(x)$  в виде

$$\rho(x) = A [p(x)]^{-1} \quad (1.5)$$

где значение постоянной  $A$  зависит от механических и теплофизических свойств материалов цилиндров, а также от условий их контактирования.

Сумму термоупругих перемещений тел в области контакта запишем в форме [9] ( $v^e(x)$  и  $v^T(x)$  — упругая и температурная составляющие соответственно)

$$v_1(x, 0) - v_2(x, 0) = v^e(x) + v^T(x) \quad (|x| \leq a) \quad (1.6)$$

Принимая во внимание равенства (1.1), имеем [10] ( $G_i, \nu_i$  — модули сдвига и коэффициенты Пуассона материалов цилиндров):

$$\frac{dv^e}{dx} = \frac{1}{\pi\theta} \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (|x| \leq a) \quad (1.7)$$

$$\theta^{-1} = \theta_1^{-1} + \theta_2^{-1}, \quad \theta_i = G_i(1 - \nu_i)^{-1} \quad (i=1, 2)$$

Передачу тепла через линию раздела тел 1 и 2 будем моделировать при помощи системы источник-сток с плотностью  $q(x)$  ( $|x| \leq a$ ). В этом случае, с учетом (1.4), найдем [11]:

$$\frac{d\vartheta^j}{dx} = (\delta_1 - \delta_2) \int_{-a}^a q(\xi) d\xi, \quad \delta_i = \frac{\alpha_i(1 + \nu_i)}{K_i} \quad (|x| \leq a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (T_2 - T_1) = -\frac{1}{\pi K} \int_{-a}^a \frac{q(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (y = 0, |x| \leq a)$$

$$K^{-1} = K_1^{-1} + K_2^{-1} \quad (1.8)$$

где  $\delta_i$ ,  $\alpha_i$  и  $K_i$  — коэффициенты термического искажения, линейного температурного расширения и теплопроводности.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и обозначения  $s = xa^{-1}$ ,  $r = \xi a^{-1}$ ,  $p^*(s) = aP^{-1}p(x)$ ,  $q^*(s) = aQ^{-1}q(x)$ ,  $a^* = aR^{-1}$ ,  $A_1 = a\theta P^{-1}$ ,  $A_2 = (\delta_1 - \delta_2)Q$ ,  $A_3 = AKP^{-1}$ .

Используя условия (1.2), (1.3), (1.5) и (1.6)–(1.8), получим систему разрешающих уравнений поставленной задачи (звездочку далее опустим):

$$\frac{1}{\pi A_1} \int_{-1}^1 \frac{p(r)}{r-s} dr + A_2 \int_{-1}^1 q(r) dr = -as \quad (|s| \leq 1) \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{\pi A_3} \int_{-1}^1 \frac{q(r)}{r-s} dr = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{q(s)}{p(s)} \right] \quad (1.10)$$

Искомые функции  $p(s)$  и  $q(s)$  должны дополнительно удовлетворять следующим соотношениям

$$\int_{-1}^1 p(s) ds = 1, \quad \int_{-1}^1 q(s) ds = 1 \quad (1.11)$$

$$p(\pm 1) = 0 \quad (1.12)$$

причем последние из них служат для определения неизвестной области контакта взаимодействующих цилиндров.

2. Исследуем структуру решения нелинейной системы (1.9)–(1.12). Для этого представим уравнения (1.9) и (1.10) в виде

$$\int_{-1}^1 \frac{p(r)}{r-s} dr = \pi\psi(s), \quad \psi(s) = -A_1 \left[ A_2 \int_{-1}^1 q(r) dr + as \right] \quad (|s| \leq 1) \quad (2.1)$$

$$h'(s) - \frac{1}{\pi A_3} \int_{-1}^1 q'(r) \ln|r-s| dr = g(s) \quad (2.2)$$

$$h(s) = \frac{q(s)}{p(s)}, \quad g(s) = \frac{1}{\pi A_3} [q(-1) \ln(1+s) - q(1) \ln(1-s)]$$

Форма (2.2) предполагает, по крайней мере, что  $q(s)$  непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$  функция, а  $q'(s) \in L_p(-1, 1)$  ( $p > 1$ ). В этом случае  $\psi(s) \in H^1(-1, 1)$ , где  $H^\alpha(-1, 1)$  — пространство функций, удовлетворяющих на  $[-1, 1]$  условию Гёльдера с показателем  $0 < \alpha \leq 1$ . Тогда [12] при выполнении соотношений ограниченности, следующих из (1.11), (1.12):

$$1 + \int_{-1}^1 \frac{\psi(s) s ds}{\sqrt{1-s^2}} = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{\psi(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = 0 \quad (2.3)$$

решение интегрального уравнения (2.1) имеет вид

$$p(s) = \omega_1(s) \sqrt{1-s^2}, \quad \omega_1(s) \in H^{1/2}(-1, 1) \quad (2.4)$$

При помощи оценок из § 4 гл. 4 монографии [12] можно показать, что функция  $h(s)$  в (2.2) принадлежит классу  $H^{1-0}(-1, 1)$ . Отсюда, с учетом (2.4), получим

$$q(s) = \omega_2(s) \sqrt{1-s^2}, \quad \omega_2(s) \in H^{1/2-0}(-1, 1) \quad (2.5)$$

В соответствии со структурами (2.4), (2.5), будем искать решение системы (1.9)–(1.12) в форме равномерно сходящихся рядов Фурье по полиномам Чебышева второго рода

$$\begin{aligned} p(s) &= \sqrt{1-s^2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n U_{2n}(s), & p_0 &= 2\pi^{-1} \\ q(s) &= \sqrt{1-s^2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n U_{2n}(s), & q_0 &= 2\pi^{-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Такой вид функций  $p(s)$  и  $q(s)$  учитывает симметрию поставленной задачи, а также выполнение второго условия (2.3).

Продифференцировав по  $s$  обе части интегрального уравнения (1.9), запишем

$$\frac{1}{\pi A_1} \frac{d}{ds} \int_{-1}^1 \frac{p(r)}{r-s} dr = -[A_2 q(s) + a] \quad (|s| \leq 1) \quad (2.7)$$

Подставим соотношения (2.6) в (2.7) и используем тождества [13] ( $T_n(s)$  — многочлены Чебышева первого рода):

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-r^2} U_{2n}(r)}{r-s} dr = -\pi T_{2n+1}(s) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

$$T_{2n+1}'(s) = (2n+1) U_{2n}(s)$$

В результате найдем

$$\frac{1}{A_1} \sum_{n=0}^{\infty} p_n (2n+1) U_{2n}(s) = A_2 \sqrt{1-s^2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n U_{2n}(s) + a \quad (2.9)$$

Умножим обе части (2.9) на  $\sqrt{1-s^2} U_{2m}(s)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) и проинтегрируем полученное выражение по  $s$  в пределах от  $-1$  до  $1$ . Принимая во внимание условие ортогональности полиномов Чебышева второго рода, будем иметь

$$p_n = \frac{A_1 A_2}{\pi (n+1/2)} \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} q_m \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

$$1 = A_1 \left( \frac{1}{2} \pi a + A_2 \sum_{m=0}^{\infty} B_{0m} q_m \right) \quad (2.11)$$

$$B_{mn} = B_{nm} = \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - 4n^2} - \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - 4(n+1)^2}$$

Заметим, что соотношение (2.11) является аналогом первого условия ограниченности (2.3) и служит, после определения коэффициентов  $q_m$ , для нахождения неизвестной относительной полуширины  $a$  области контакта.

Внесем теперь разложения (2.6) в интегродифференциальное уравнение (1.10). Отправляясь от формулы (2.8), получим

$$\frac{1}{A_3} \sum_{m=0}^{\infty} q_m T_{2m+1}(s) = \frac{d}{ds} \left[ \frac{\sum_{m=0}^{\infty} q_m U_{2m}(s)}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n U_{2n}(s)} \right] \quad (|s| \leq 1) \quad (2.12)$$

Проинтегрируем равенство (2.12) по  $s$ . Тогда

$$\left[ \frac{1}{2A_3} \sum_{m=0}^{\infty} q_m F_m(s) + C \right] \sum_{n=0}^{\infty} p_n U_{2n}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m U_{2m}(s) \quad (2.13)$$

$$\int T_{2m+1}(s) ds = 1/2 F_m(s) + \tilde{C} \quad (\tilde{C} = \text{const})$$

$$F_m(s) = \begin{cases} (2m+2)^{-1} T_{2m+2}(s) - (2m)^{-1} T_{2m}(s) & (m \neq 0) \\ 1/2 T_2(s) & (m = 0) \end{cases}$$

Избавимся в (2.13) от неопределенной постоянной  $C$ . Для этого вычтем из него выражение, получающееся при  $s=0$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2A_3} \sum_{n=0}^{\infty} p_n U_{2n}(s) \sum_{m=0}^{\infty} q_m [F_m(s) - F_m(0)] &= \\ = \sum_{m=0}^{\infty} (q_m - D p_m) U_{2m}(s) \quad (D = q(0) [p(0)]^{-1}) & \end{aligned} \quad (2.14)$$

Умножив обе части соотношения (2.14) на  $\sqrt{1-s^2} U_{2k}(s)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) и проинтегрировав результат по  $s$  от  $-1$  до  $1$ , найдем ( $p_i = 0$  при  $i < 0$ )

$$1 + \frac{1}{4A_3} \left( C_{00} + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} C_{0m} q_m \right) = D \quad (2.15)$$

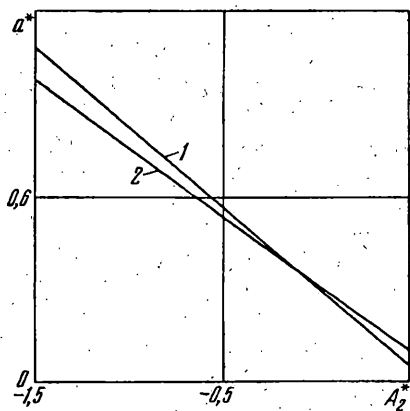
$$q_n + \frac{1}{4A_3} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} q_m = D p_n - \frac{1}{2\pi A_3} C_{n0} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.16)$$

$$C_{ij} = 2p_i F_j(0) - D_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

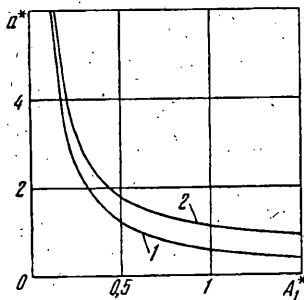
$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2j+2} (p_{i-j-1} + p_{i+j+1} - p_{j-i}) - \frac{1}{2j} (p_{i-j} + p_{i+j} - p_{j-i-1}) & (j \neq 0) \\ 1/2 (p_{i-1} + p_{i+1} - p_0) & (j = 0) \end{cases}$$

Далее предлагается следующий алгоритм приближенного решения системы (1.9)–(1.12): задаемся начальным видом функции  $q(s)$  и определяем  $(N+1)$  первых коэффициентов  $q_m$  ряда (2.6); по данным значениям  $q_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots, N$ ) из соотношений (2.10) и (2.11) находим  $a$  и  $p_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ); внося величины  $p_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, N$ ) в равенства (2.17), определяем коэффициенты  $C_{ij}$  (при этом учитывается, что  $p_i$  для  $i > N$ ); решаем редуцированную систему линейных алгебраических уравнений (2.16), т. е. находим новые значения  $q_m$  ( $m=1, 2, \dots, N$ ) с точностью до постоянной  $D$ ; величину последней определяем путем подстановки найденного решения в соотношение (2.15). Вычислительный процесс продолжаем до тех пор, пока относительная погрешность найденных на двух соседних итерациях величин  $q_m$  ( $m=1, 2, \dots, N$ ) не будет меньше заданной точности.

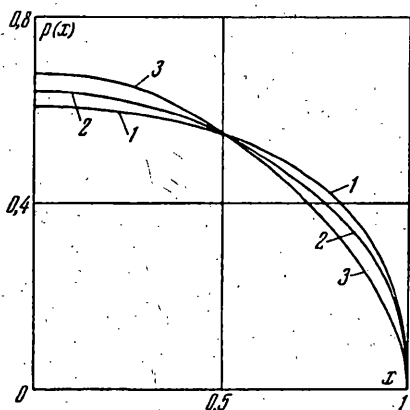
Заметим, что в ходе реализации алгоритма приходится урезать бесконечную алгебраическую систему (2.16). Такая процедура законна, поскольку можно показать [14], что эта система квазивполне регулярна для всех  $A_3 \in (0, \infty)$  и



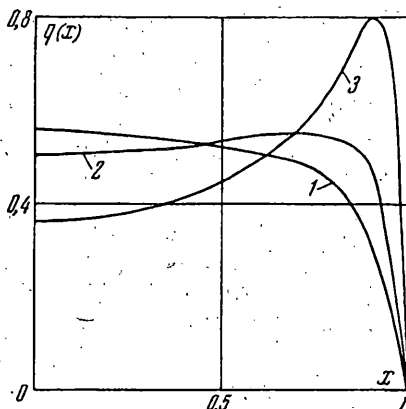
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

вполне регулярна при достаточно больших значениях  $A_3$ . Кроме того, после окончательного определения неизвестных  $q_m$  соотношение

$$D = \frac{q(0)}{p(0)} = \sum_{m=0}^N (-1)^m q_m \left[ \sum_{n=0}^N (-1)^n p_n \right]^{-1}$$

должно выполняться тождественно с заданной наперед точностью. Это обстоятельство может служить контролем правильности решения исходной нелинейной системы интегродифференциальных уравнений.

3. Рассмотрим задачу, входными параметрами которой являются безразмерные величины  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), причем знак постоянной  $A_2$  определяет направление теплового потока:  $A_2 > 0$  ( $\delta_1 > \delta_2$ ) свидетельствует о том, что теплообмен происходит в сторону тела с большим коэффициентом термического искажения, а  $A_2 < 0$  ( $\delta_1 < \delta_2$ ) указывает на противоположное направление теплового потока.

На фиг. 2 показано изменение относительной полуширины участка контакта  $a^* = a \cdot 10^3$  в зависимости от параметра  $A_2^* = A_2 \cdot 10^3$  при фиксированных  $A_1^* = A_1 \cdot 10^{-3} = 2$  и  $A_3 = 0,2$  — линия 1,  $A_3 = 0$  (идеальный тепловой контакт) — линия 2. Видно, что эта зависимость носит линейный характер, причем с увеличением параметра  $A_2^*$  величина  $a^*$  убывает, достигая соответственно при  $A_2^* = 0,6$  и  $A_2^* = 0,7$  нулевого значения. Отсюда в результате термического выпучивания контакт взаимодействующих тел будет происходить лишь в одной точке.

Иная картина наблюдается при противоположном направлении теплового потока, когда  $A_2 < 0$ . В этом случае с увеличением модуля параметра  $A_2$  область контакта возрастает.

На фиг. 3 изображена зависимость величины  $a^*$  от параметра  $A_1^*$  при фиксированных значениях  $A_2^* = 0,1$  (кривая 1),  $A_2^* = -1$  (кривая 2) и  $A_3 = 0,2$ . В обоих случаях рост параметра  $A_1^*$ , например, уменьшение прижимающей силы  $P$ , приводит к убыванию размеров площадки контакта.

На фиг. 4 и 5 представлены соответственно эпюры контактного давления  $p(x)$  и теплового потока  $q(x)$ , вычисленные при  $A_1^* = 1,5$ ,  $A_2^* = -1$ ,  $A_3 = 2$  (кривая 1),  $A_1^* = 2$ ,  $A_2^* = -1,2$ ,  $A_3 = 0,2$  (кривая 2),  $A_1^* = 1$ ,  $A_2^* = -1$ ,  $A_3 = 0,02$  (кривая 3). Видно, что давление слабо зависит от величины параметра  $A_3$ , характеризующего термосопротивление, в то время как тепловой поток существенно зависит от него. Так, при малых значениях термосопротивления (кривая 3 на фиг. 5) тепловой поток через линию раздела взаимодействующих тел претерпевает возмущения вблизи краев области контакта. По мере уменьшения  $A_3$ , т. е. при переходе к условию идеального теплового контакта, эти возмущения увеличиваются. Наконец, при  $T_1 = T_2$  в зоне соприкосновения тел тепловой поток становится неограниченным в точках смены граничных условий, что отмечалось выше.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородачев Н. М. Плоская задача термоупругости о вдавлении штампа // Инж. ж. 1963. Т. 3. Вып. 4. С. 736—740.
2. Грилицкий Д. В., Попович Б. I. Плоскі контактні задачі термопружності. Львів: Вища шк., 1973. 114 с.
3. Barber J. R. Indentation of the semi-infinite solid by a hot sphere. // Intern. J. Mech. Sci. 1973. V. 15. № 10. P. 813—819.
4. Comninou M., Dundurs J. On the Barber boundary conditions for thermoelastic contact. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1979. V. 46. No. 4. P. 849—853.
5. Шлыков Ю. П., Ганин Е. А. Контактный теплообмен. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. 144 с.
6. Шлыков Ю. П., Ганин Е. А., Царевский С. Н. Контактное термическое сопротивление. М.: Энергия, 1977. 328 с.
7. Колесов В. С., Чуйко Е. Е. Влияние контактного термического сопротивления на термонапряженное состояние составного цилиндра // Прикл. механика. 1974. Т. 10. No. 3. С. 128—132.
8. Barber J. R., Zhang R. Transient behaviour and stability for the thermoelastic contact of two rods of dissimilar materials. // Intern. J. Mech. Sci. 1988. V. 30. No. 9. P. 691—704.
9. Barber J. R. Elasticity. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1992. 293 p.
10. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
11. Dundurs J., Comninou M. Green's function for planar thermoelastic contact problems: Interior contact. // Mech. Res. Commun. 1979. V. 6. No. 5. P. 317—321.
12. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных. М.: Наука, 1971. 1108 с.
14. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.