МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 539.3

 К. Ф. ЧЕРНЫХ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работах автора [1—5] были предложены геометрически и физически нелинейные теории трещин и дислокаций Вольтерра. При этом в основу рассмотрения была положена предложенная автором предельно простая версия плоской нелинейной теории упругости для изотропного материала. В предлагаемой статье дано обобщение теории на анизотропные материалы. Основное внимание уделяется ортотропному и трансверсально-изотропному видам анизотропии.

1. В плоской задаче нелинейной теории упругости широко используются [1, 2]: комплексные координаты

$$\zeta = x_1^\circ + ix_2^\circ, \quad \bar{\zeta} = x_1^\circ - ix_2^\circ, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2$$

дифференцирование по ним

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\circ} - i\frac{\partial}{\partial x_2^\circ}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\circ} + i\frac{\partial}{\partial x_2^\circ}\right)$$

и комплексные компоненты тензора

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), \quad T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}) \tag{1.1}$$

В приведенных соотношениях x_i°, x_i — прямоугольные декартовы координаты материальной точки, до и после деформации. Ниже величины со значком градус относятся к недеформированной конфигурации тела, а без него — к деформированной.

Комплексные компоненты тензора номинальных напряжений $\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_i$ удовлетворяют комплексному уравнению равновесия

$$\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1}{\partial\bar{\zeta}} + \frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2}{\partial\zeta} + \rho^\circ(f_1 + if_2) = 0 \tag{1.2}$$

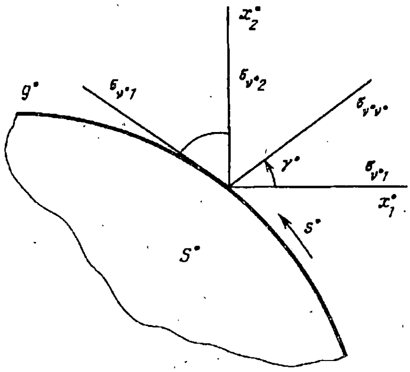
где ρ° — плотность недеформированного материала, а f_1, f_2 — компоненты массовой силы.

В области S° с граничным контуром g° (фигура) имеет место статическое граничное условие

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1 e^{i\gamma^\circ} + \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\gamma^\circ} = 2\,[\sigma_{\nu^\circ 1}(s^\circ) + i\sigma_{\rho\nu^\circ 2}(s^\circ)] =$$
$$= 2e^{i\gamma^\circ}\,[\sigma_{\nu^\circ\nu^\circ}(s^\circ) + i\,\sigma_{\nu^\circ t^\circ}(s^\circ)] \tag{1.3}$$

В частности, для следящей нагрузки

$$\sigma_{\nu^\circ s}(s^\circ) + i\sigma_{\nu^\circ 2}(s^\circ) = -(\sigma_0 - i\tau_0)\,\lambda\frac{\partial z}{\partial\zeta}e^{i\gamma^\circ} + (\sigma_0 + i\tau_0)\,\lambda\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}e^{-i\gamma^\circ} \tag{1.4}$$



Здесь σ_0, τ_0 — составляющие, соответственно, по внутренней нормали и касательной к деформированному контуру вектора напряжений, а λ — кратность удлинений в направлении оси x_3°.

Наряду с традиционным геометрическим граничным условием

$$z = z(s^\circ) \qquad (1.5)$$

имеет место более удобное для практического использования — дисторсионное граничное условие

$$\partial z/\partial\zeta e^{i\gamma^\circ} - \partial z/\partial\bar{\zeta} e^{-i\gamma^\circ} = -idz(s^\circ)/ds^\circ \qquad (1.6)$$

частным случаем которого является условие жесткого края

$$\partial z/\partial\zeta e^{i\gamma^\circ} - \partial z/\partial\bar{\zeta} e^{-i\gamma^\circ} = e^{i\gamma^\circ} \qquad (1.7)$$

На цилиндрическую поверхность, проходящую через кривую L° области S° (она может быть и граничным контуром g°), действуют, в расчете на единицу ее высоты, напряжения с главными вектором и моментом

$$F_1 + iF_2 = -\frac{i}{2}\int_{L^\circ} [\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1\, d\zeta - \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2 d\bar{\zeta}]$$

$$M_3 = -\tfrac{1}{2}\int_{L^\circ} \bar{\zeta}\, [\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1\, d\zeta - \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2\, d\bar{\zeta}] \qquad (1.8)$$

На область же S° со стороны положительного направления оси x_3° действуют напряжения с главными вектором и моментом

$$F_3 = \int_{S^\circ} \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33}, \quad M_1 + iM_2 = -\int_{S^\circ}\zeta\, \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33}\, dS^\circ \qquad (1.9)$$

Для истинных напряжений (напряжений Коши) σ_{ij} и условных (симметричных напряжений Био) σ_{ij}° имеют место комплексные выражения:

$$\Sigma_1 \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{1}{\lambda\Delta}\left[\frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1 + \frac{\overline{\partial z}}{\partial\bar{\zeta}}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2\right]$$

$$\Sigma_2 \equiv \sigma_{11} - \sigma_{22} + i2\sigma_{12} = \frac{1}{\lambda\Delta}\left[\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1 + \frac{\partial z}{\partial\zeta}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2\right]$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{\Delta}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33} \qquad (1.10)$$

$$\Sigma_1^\circ \equiv \sigma_{11}^\circ + \sigma_{22}^\circ = \left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^{-1} \mathrm{Re}\left[\frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1\right]$$

$$\Sigma_2^\circ \equiv \sigma_{11}^\circ - \sigma_{22}^\circ + i2\sigma_{12}^\circ = \left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^{-1}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2$$

$$\sigma_{33}^\circ = \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33} \qquad (1.11)$$

$$\Delta = \frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta} - \frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\bar{\zeta}} \qquad (1.12)$$

кратность изменения площади области S°, связанная с кратностью изменения объема J соотношением

$$J = \lambda\Delta = \lambda\left(\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\right|^2\right) \qquad (1.13)$$

В нелинейной теории упругости широко используется тензор деформации Коши — Лагранжа с компонентами

$$c_{11}^{\circ} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar\zeta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar\zeta} + \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\right)$$

$$c_{22}^{\circ} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar\zeta}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar\zeta} + \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\right)$$

$$c_{12}^{\circ} = i\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar\zeta} - \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\right) \qquad (1.14)$$

$$c_{33}^{\circ} = \lambda^2$$

$$C_1^{\circ} = 2\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar\zeta}\right), \quad C_2^{\circ} = 4\,\frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}$$

Для главных кратностей удлинений при $\lambda_1 \geq \lambda_2$ имеют место соотношения

$$|\partial z/\partial \zeta| = ½(\lambda_1 + \lambda_2), \quad |\partial z/\partial \bar\zeta| = ½(\lambda_1 - \lambda_2) \qquad (1.15)$$

Закон упругости имеет вид

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1 = 2\,\frac{\partial \Phi}{\partial\,\overline{(\partial z/\partial \zeta)}}, \quad \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2 = 2\,\frac{\partial \Phi}{\partial\,\overline{(\partial z/\partial \bar\zeta)}} \qquad (1.16)$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad \Phi = \Phi\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}, \frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar\zeta}, \lambda\right)$$

где Φ — упругий потенциал (плотность энергии деформации). При этом его аргументы должны входить в комбинациях Ψ_k, инвариантных относительно преобразований симметрии рассматриваемых материалов.

При обобщенной плоской деформации постоянная λ при заданной силе F_3 определяется из соотношения

$$\int_{S^{\circ}} \partial\Phi/\partial\lambda dS^{\circ} = F_3 \qquad (1.17)$$

При плоском напряженном состоянии для определения функции $\lambda(\zeta, \bar\zeta)$ следует использовать уравнение (см. (1.16) при $\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33} = 0$):

$$\partial\Phi/\partial\lambda = 0 \qquad (1.18)$$

Коль скоро основные искомые величины $\partial z/\partial\zeta$, $\partial z/\partial\bar\zeta$, λ найдены, смещения подсчитываются по формулам

$$z = \zeta + (u_1 + iu_2) = \int\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}d\bar\zeta\right), \quad x_3 = \lambda x_3^{\circ} \qquad (1.19)$$

Все выписанные соотношения пригодны как для изотропного материала, так и для анизотропных. В [3, 4] были отмечены многочисленные неоспоримые преимущества условных напряжений перед истинными. Ниже ограничимся рассмотрением наиболее интересных в приложениях ортотропного и трансверсально-изотропного материалов.

2. При рассмотрении анизотропных материалов в линейной теории упругости удобно использовать симметричные коэффициенты Пуассона [2]. Так для ортотропного материала при обобщенной плоской деформации ($e = e_{33} = \text{const}$):

$$\sigma_{11} = E_1 e_{11} + \sqrt{E_1E_2}\,\nu_{12}e_{22} + \sqrt{E_1E_3}\,\nu_{13}e$$

$$\sigma_{22} = \sqrt{E_1E_2}\,\nu_{12}e_{11} + E_2e_{22} + \sqrt{E_2E_3}\,\nu_{23}e$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{1-\nu_{12}^2}\left[\sqrt{\frac{E_3}{E_1}}(\nu_{13}-\nu_{12}\nu_{23})\sigma_{11} + \sqrt{\frac{E_3}{E_2}}(\nu_{23}-\nu_{12}\nu_{13})\sigma_{22}\right] +$$
$$+ E_3(1 + 2\nu_{12}\nu_{13}\nu_{23} - \nu_{12}^2 - \nu_{23}^2 - \nu_{13}^2)\, e \tag{2.1}$$

Для ортотропного материала в плоском напряженном состоянии

$$\sigma_{11} = E_1(1-\nu_{13}^2)\, e_{11} + \sqrt{E_1E_2}(\nu_{12}-\nu_{13}\nu_{23})\, e_{22}$$
$$\sigma_{22} = \sqrt{E_1E_2}(\nu_{12}-\nu_{13}\nu_{23})\, e_{11} + E_2(1-\nu_{23}^2)\, e_{22}$$
$$\sigma_{12} = 2E_4 e_{12} \quad (\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0) \tag{2.2}$$

В обоих случаях положительность плотности энергии деформации обеспечивается неравенствами

$$E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad E_3 > 0, \quad E_4 > 0 \tag{2.3}$$
$$|\nu_{12}| < 1, \quad |\nu_{23}| < 1, \quad |\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}| < (1-\nu_{12}^2)^{1/2}(1-\nu_{23}^2)^{1/2}$$

Для трансверсально-изотропного материала при обобщенной плоской деформации ($e = e_{33} = \text{const}$):

$$\sigma_{11} = E_1(e_{11} + \nu_{12}e_{22}) + \sqrt{E_1E_3}\,\nu_{13}e$$
$$\sigma_{22} = E_1(e_{22} + \nu_{12}e_{11}) + \sqrt{E_1E_3}\,\nu_{13}e \tag{2.4}$$
$$\sigma_{12} = E_1(1-\nu_{12})\, e_{12} \quad (\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0)$$
$$\sigma_{33} = \sqrt{\frac{E_3}{E_1}}\frac{\nu_{13}}{1+\nu_{12}}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) + E_3\left(1 - \frac{2\nu_{13}^2}{1+\nu_{12}}\right) e$$

Для трансверсально-изотропного материала в плоском напряженном состоянии

$$\sigma_{11} = E_1\left[(1-\nu_{12}^2)\, e_{11} + (\nu_{12}-\nu_{13}^2)\, e_{22}\right]$$
$$\sigma_{22} = E_1\left[(1-\nu_{12}^2)\, e_{22} + (\nu_{12}-\nu_{13}^2)\, e_{11}\right] \tag{2.5}$$
$$\sigma_{12} = E_1(1-\nu_{12})\, e_{12} \quad (\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0)$$

В двух последних случаях положительность плотности энергии деформации обеспечивается неравенствами

$$E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad |\nu_{12}| < 1, \quad |\nu_{13}| < 1, \quad |\nu_{13}(1-\nu_{12})| < (1-\nu_{12}^2)^{1/2}(1-\nu_{13}^2)^{1/2} \tag{2.6}$$

Отметим, что переход от трансверсально-изотропного материала к изотропному сопровождается заменами

$$E_3 = E_1 \to \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \nu_{12} = \nu_{13} \to \frac{\nu}{1-\nu} \tag{2.7}$$

3. Для нелинейного ортотропного материала имеют место инварианты (см. [1, 2] и (1.13)—(1.14)):

$$\Psi_1 = c_{11}^\circ = \left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta} + \frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\bar\zeta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\bar\zeta} + \frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)$$
$$\Psi_2 = c_{22}^\circ = \left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta} + \frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\bar\zeta}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\bar\zeta} + \frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)$$
$$\Psi_3 = c_{33}^\circ = \lambda^2 \tag{3.1}$$

$$\sqrt{\Psi_4} = |c_{12}{}^\circ| = i\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)$$

$$\sqrt{\Psi_5} = J = \lambda\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \bar{\zeta}}\right)$$

Принимая таким образом

$$\Phi = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \sqrt{\Psi_4}, J) \tag{3.2}$$

получаем из формул (1.16):

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1 = 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_2} + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right)\frac{\partial z}{\partial\zeta} + 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_1} - \frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_2} - i\frac{\partial\Phi}{\partial\sqrt{\Psi_4}}\right)\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2 = 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_1} - \frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_2} + i\frac{\partial\Phi}{\partial\sqrt{\Psi_4}}\right)\frac{\partial z}{\partial\zeta} + 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_2} - \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right)\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33} = 2\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_3} + \frac{J}{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial J} \tag{3.3}$$

Условия перехода при малых деформациях полученного закона упругости в закон Гука имеют вид (i, $j = 1$, 2, 3; $\nu_{ii} = 1$):

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge = 0, \qquad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\sqrt{\Psi_4}} - \frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge = E_4 \tag{3.4}$$

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Psi_i\partial\Psi_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Psi_i\partial J} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Psi_j\partial J}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\Phi}{(\partial J)^2} + \frac{1}{4}(1 - 2\delta_{ij})\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge = \frac{\sqrt{E_iE_j}\,\nu_{ij}}{4}$$

Здесь и ниже значком $\wedge$ отмечаются величины, отнесенные к недеформированной конфигурации тела.

Для нелинейного трансверсально-изотропного материала имеем

$$\Psi_1 = 2\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta} + \frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\bar{\zeta}}\right) = 2\left(\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2 + \left|\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\right|^2\right), \quad \Psi_3 = \lambda^2$$

$$\sqrt{\Psi_2} = \lambda^{-1}J = \frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\zeta} - \frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\overline{\partial z}}{\partial\bar{\zeta}} = \left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\right|^2 \tag{3.5}$$

Полагая

$$\Phi = \Phi(\Psi_1, \sqrt{\Psi_2}, \Psi_3, J) \tag{3.6}$$

находим из формул (1.16) и (3.5):

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1 = 2\left(2\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\sqrt{\Psi_2}} + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right)\frac{\partial z}{\partial\zeta}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2 = 2\left(2\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_1} - \frac{\partial\Phi}{\partial\sqrt{\Psi_2}} - \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right)\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33} = 2\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_3} + \frac{J}{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial J} \tag{3.7}$$

Условия перехода при малых деформациях выписанного закона упругости в закон Гука имеют вид

$$\left[2\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\sqrt{\Psi_2}} + \frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge = 0, \quad \left[2\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge = 0$$

$$\left[\left(2\frac{\partial}{\partial\Psi_1}+\frac{\partial}{\partial\sqrt{\Psi_2}}+\frac{\partial}{\partial J}\right)^2\Phi\right]^\wedge=\frac{E_1(1+\nu_{12})}{2}$$

$$-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\sqrt{\Psi_2}}+\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge=\frac{E_1(1-\nu_{12})}{2}$$

$$\left[\left(2\frac{\partial}{\partial\Psi_3}+\frac{\partial}{\partial J}\right)\left(2\frac{\partial}{\partial\Psi_1}+\frac{\partial}{\partial\sqrt{\Psi_2}}+\frac{\partial}{\partial J}\right)\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge=\sqrt{E_1E_3}\,\nu_{13}$$

$$\left[\left(2\frac{\partial}{\partial\Psi_3}+\frac{\partial}{\partial J}\right)^2\Phi-\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge=E_3 \tag{3.8}$$

Согласно выражениям (3.5) можно считать

$$\Phi=\Phi(|\partial z/\partial\zeta|,\ |\partial z/\partial\bar\zeta|,\ \lambda) \tag{3.9}$$

При этом соотношения (1.16) переходят в следующие:

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1=\frac{\partial z}{\partial\zeta}\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|} \tag{3.10}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2=\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\bar\zeta|}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}$$

а условия перехода (3.8) записываются так

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|}\right]^\wedge=0,\quad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right]^\wedge=0,\quad \left[\left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\bar\zeta|}\right]^\wedge=2E_1(1-\nu_{12})$$

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{(\partial|\partial z/\partial\zeta|)^2}\right]^\wedge=2E_1(1+\nu_{12}),\quad \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|\,\partial\lambda}+\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge=\sqrt{E_1E_3}\,\nu_{13}$$

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{(\partial\lambda)^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right]^\wedge=E_3 \tag{3.11}$$

Далее, подстановка выражений (3.10) в (1.11) приводит с использованием (1.1) к выражениям

$$\sigma_{11}{}^\circ=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|}+\frac{1}{4}\left(\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}+\frac{\partial z}{\partial\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}}\right)\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^{-1}\left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\bar\zeta|}$$

$$\sigma_{22}{}^\circ=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|}-\frac{1}{4}\left(\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}+\frac{\partial z}{\partial\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}}\right)\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^{-1}\left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\bar\zeta|}$$

$$\sigma_{12}{}^\circ=-\frac{i}{4}\left(\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}-\frac{\partial z}{\partial\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}}\right)\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^{-1}\left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\bar\zeta|}$$

Введем главные условные напряжения $\sigma_1{}^\circ$, $\sigma_2{}^\circ$. Используя их и компоненты $\sigma_{ij}{}^\circ$, запишем инварианты напряжений

$$\sigma_1{}^\circ+\sigma_2{}^\circ=\sigma_{11}{}^\circ+\sigma_{22}{}^\circ=\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|}$$

$$\sigma_1{}^\circ\sigma_2{}^\circ=\sigma_{11}{}^\circ\sigma_{22}{}^\circ-\sigma_{12}{}^{\circ 2}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\bar\zeta|}\right)^2\right]$$

Отсюда и находим искомые выражения для главных условных напряжений

$$\sigma_1^\circ = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|} + \frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\bar\zeta|}\right], \quad \sigma_2^\circ = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|} - \frac{\partial\Phi}{\partial|\partial z/\partial\bar\zeta|}\right] \tag{3.12}$$

4. Реальные конструкционные (не пористые) материалы обладают малой сжимаемостью. С учетом этого был предложен [1] закон для изотропного малосжимаемого материала. Получим его аналог для трансверсально-изотропного материала. Прежде всего согласно (3.5):

$$\Psi_1 = 4\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2 - 2\left(\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^2\right), \quad \sqrt{\Psi_2} = \lambda^{-1}J$$

$$\Psi_3 = \lambda^2, \quad J = \lambda\left(\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^2\right) \tag{4.1}$$

Отсюда видно, что из малости относительного изменения объема $J-1$ при умеренных значениях λ, следует малость инварианта $\sqrt{\Psi_2}-1$ и приближенное равенство

$$\Psi_1 = 4\,|\partial z/\partial\zeta|^2 - 2\lambda^{-1} \tag{4.2}$$

В силу этого инварианты J и $\sqrt{\Psi_2}$ могут быть учтены простейшим (линейным) образом

$$\Phi = AJ + B\sqrt{\Psi_2} + \chi(\Psi_1, \Psi_3) \tag{4.3}$$

или с учетом выражений (4.1) и (4.2):

$$\Phi = (A\lambda + B)\left(\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^2\right) + \chi\left(\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|, \lambda\right)$$

Здесь χ — произвольная функция своих аргументов «ответственная», в основном, за деформацию формоизменения.

Согласно формулам (3.10) имеем при этом

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1 = \left[2(A\lambda + B) + \left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^{-1}\frac{\partial\chi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|}\right]\frac{\partial z}{\partial\zeta}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2 = -2(A\lambda + B)\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta} \tag{4.4}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33} = A\left(\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^2\right) + \frac{\partial\chi}{\partial\lambda}$$

а условия перехода (3.11) принимают вид

$$A = -E_1(1-\nu_{12}) - B, \quad \left[\frac{\partial\chi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|}\right]^\wedge = 2E_1(1+\nu_{12})$$

$$\left[\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right]^\wedge = E_1(1-\nu_{12}) + B, \quad \left[\frac{\partial^2\chi}{(\partial|\partial z/\partial\zeta|)^2}\right]^\wedge = 4E_1$$

$$\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial|\partial z/\partial\zeta|\,\partial\lambda}\right]^\wedge = \sqrt{E_1E_3}\,\nu_{13} + 2E_1(1-\nu_{12}) + 2B_1 \tag{4.5}$$

$$\left[\frac{\partial^2\chi}{(\partial\lambda)^2}\right]^\wedge = E_3 - E_1(1-\nu_{12}) - B$$

Поскольку согласно (4.1) $\sqrt{\Psi_2} = J\lambda^{-1}$, можно считать инвариант $\sqrt{\Psi_2}$ «лишним» и положить в (4.4), (4.5) $B=0$.

Подстановка первых двух из выражений (4.4) в однородное уравнение равновесия (1.2) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial z}{\partial\zeta}\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^{-1}\frac{\partial X}{\partial|\partial z/\partial\zeta|}\right]=0$$

из которого следует

$$\frac{\partial z}{\partial\zeta}=\Omega\,[g_1(\zeta,\lambda)\,\overline{g_1(\zeta,\lambda)},\lambda]\,\frac{g_1(\zeta,\lambda)}{\overline{g_1(\zeta,\lambda)}}$$

$$z=\left[\int\Omega\,[g_1(\zeta,\lambda)\,\overline{g_1(\zeta,\lambda)},\lambda]\,g_1(\zeta,\lambda)/\overline{g_1(\zeta)}+\overline{g_2(\zeta,\lambda)}\right.\tag{4.6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}=\int\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left[\frac{\Omega\,[g_1(\zeta,\lambda)\,\overline{g_1(\zeta,\lambda)},\lambda]}{\overline{g_1(\zeta,\lambda)}}\right]g_1(\zeta,\lambda)\,d\zeta+\overline{g_2'(\zeta,\lambda)}$$

Здесь $g_1(\zeta,\lambda)$, $g_2(\zeta,\lambda)$ — произвольные функции своих аргументов, а $\Omega\,[\ldots]$ — решение нелинейного алгебраического уравнения

$$\frac{\partial X(|\partial z/\partial\zeta|,\lambda)}{\partial|\partial z/\partial\zeta|}=g_1(\zeta,\lambda)\,\overline{g_1(\zeta,\lambda)}\tag{4.7}$$

т. е.

$$|\partial z/\partial\zeta|=\Omega\,[g_1(\zeta,\lambda)\,\overline{g_1(\zeta,\lambda)};\lambda]\tag{4.8}$$

Таким образом принятие закона упругости для малосжимаемого материала (4.5) сводит нахождение разрешающих функций $\partial z/\partial\zeta$ и $\partial z/\partial\bar\zeta$ к квадратурам и решению нелинейного алгебраического уравнения. С другой стороны, разумный выбор функций g_1, g_2 и Ω позволяет получать точные решения плоской задачи нелинейной теории упругости.

5. Примем для трансверсально изотропного материала квадратичный потенциал

$$\Phi=\sigma^*\left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2+\alpha\left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^2+\beta\lambda^2\tag{5.1}$$

где σ^*, α, β — упругие постоянные. Согласно соотношениям (3.12) и (1.15) ему в главных осях деформации отвечает закон упругости

$$\sigma_1{}^\circ=\sigma^*\,[1+(1/2)\,[(\lambda_1-1)+(\lambda_2-j)]]+(1/2)\,\alpha\,[(\lambda_1-1)-(\lambda_2-1)]$$

$$\sigma_2{}^\circ=\sigma^*\,[1+(1/2)\,[(\lambda_1-1)+(\lambda_2-1)]]-(1/2)\,\alpha\,[(\lambda_1-1)-(\lambda_2-1)]]\tag{5.2}$$

При $\lambda_1=\lambda_2=1$ (т. е. при отсутствии деформации) $\sigma_1{}^\circ=\sigma_2{}^\circ=\sigma^*$. Таким образом σ^* — величина всестороннего (в плоскости) предварительного условного напряжения, от которого начинается отсчет деформации. Линейность соотношений свидетельствует о том, что упругому потенциалу отвечает неограниченно линейный материал, предварительно всесторонне напряженный.

Из соотношений (5.1) и (3.10) следует

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1=2\sigma^*\frac{\partial z}{\partial\zeta},\quad\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2=2\alpha\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta},\quad\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33}=2\beta\lambda\tag{5.3}$$

Подстановка полученных выражений в однородное уравнение равновесия (1.2) приводит к гармоническому уравнению $\partial^2 z/\partial\zeta\partial\bar\zeta=0$, из которого следует

$$\frac{\partial z}{\partial\zeta}=\Phi(\zeta),\quad\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}=\overline{\Psi(\zeta)},\quad z=\int\Phi(\zeta)\,d\zeta+\overline{\int\Psi(\zeta)\,d\zeta}\tag{5.4}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1=2\sigma^*\Phi(\zeta),\quad\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2=2\alpha\,\overline{\Psi(\zeta)}\tag{5.5}$$

Отсюда и из соотношений (1.3) и (1.6) видна линейность разрешающих краевых задач в этой, в целом, сильно нелинейной проблеме. Это позволяет, аналогично проделанному в [4, 5] для изотропного материала, выявить в чистом виде влияние геометрической нелинейности.

Работа выполнена в рамках Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
2. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
3. *Новожилов В. В., Черных К. Ф.* Об истинных мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике деформируемого тела//Изв. АН СССР. 1987. № 5. С. 73—79.
4. *Черных К. Ф.* Нелинейная плоская теория упругости и ее применение к физически и геометрически нелинейной механике трещин//Успехи механики. 1989. Т. 12. Вып. 4. С. 51—75.
5. *Черных К. Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1995. 304 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
29.VI.1993