

УДК 539.3

© 1995 г. В. Н. КУКУДЖАНОВ, Д. Н. ШНЕЙДЕРМАН

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УПРУГИХ ЗАДАЧ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Разработан численный метод решения трехмерных задач для осесимметричных анизотропных упругих тел, нагруженных неосесимметричной нагрузкой. Метод представляет собой разновидность метода Ритца, в котором по окружному направлению используется разложение по системе тригонометрических функций, а по двум другим — двухмерная конечноэлементная аппроксимация. Он применен к исследованию важной практической задачи определения остаточных напряжений методом высверливания малого отверстия [1, 2]. Метод заключается в измерении перемещений на поверхности тела, вызванных удалением материала из тела, нагруженного остаточными напряжениями. Для определения остаточных напряжений по измеренным перемещениям используются решения задач о деформировании полупространства с отверстием тремя различными системами сил, приложенными к боковой поверхности отверстия. Для моделирования неограниченной области используются бесконечные элементы. Приведены результаты расчетов деформирования ортотропного полупространства из стеклопластика с эпоксидной матрицей. Исследован вопрос о сходимости решения Ритца к точному решению.

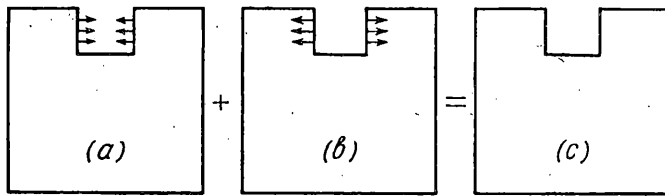
1. Методика определения остаточных напряжений в анизотропных материалах. Рассмотрим тело из анизотропного материала, в некоторой точке поверхности которого необходимо определить остаточные напряжения. Метод отверстий для определения остаточных напряжений заключается в высверливании в исследуемой точке отверстия, что приводит к снятию напряжений и вызывает деформацию в окрестности отверстия. Эта деформация регистрируется измерительными приборами и по ней определяются напряжения, которые существовали в теле на месте отверстия.

Предполагается, что тело при проделывании отверстия деформируется упруго. Тогда возмущенное поле перемещений порождается поверхностными силами, противоположными силам, с которыми удаленный материал действовал на оставшуюся часть до высверливания отверстия (фиг. 1). Эта противоположная нагрузка изображена на фиг. 1, *b*.

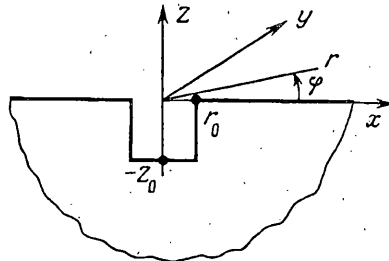
Построим декартову систему координат с началом в заданной точке, осями x , y , лежащими в касательной плоскости к граничной поверхности тела, и осью z , перпендикулярной первым двум. Пусть до высверливания отверстия в рассматриваемой точке были компоненты напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$). Предположим, что размеры отверстия настолько малы, что в его пределах напряженное состояние тела до высверливания отверстия можно считать однородным. Тогда поверхностная нагрузка, вызывающая перемещение тела от высверливания отверстия, приложена к боковой поверхности отверстия и имеет следующие компоненты в цилиндрической системе координат, связанной с отверстием (фиг. 2):

$$t_r = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$t_\varphi = -\sigma_x \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi; \quad t_z = 0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Поле перемещений, возникших от высверливания отверстия, можно представить в виде $u = \sigma_x \bar{u}_1 + \sigma_y \bar{u}_2 + \tau_{xy} \bar{u}_{12}$, где $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_{12}$ — векторы перемещений от поверхностных сил, приложенных к боковой поверхности отверстия и имеющих соответственно компоненты:

$$t_r = \cos^2 \varphi, \quad t_\varphi = -\sin \varphi \cos \varphi, \quad t_z = 0 \quad (1.1)$$

$$t_r = \sin^2 \varphi, \quad t_\varphi = \sin \varphi \cos \varphi, \quad t_z = 0 \quad (1.2)$$

$$t_r = \sin 2\varphi, \quad t_\varphi = \cos 2\varphi, \quad t_z = 0 \quad (1.3)$$

Если в результате измерения перемещений возмущенной поверхности тела методом голографической интерферометрии [1] известны какие-либо три значения компонент перемещений, то получим систему трех уравнений, из которой можно определить компоненты остаточных напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Таким образом, задача определения остаточных напряжений для анизотропного тела сводится к задаче определения полей перемещений $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_{12}$.

Имеется ряд работ, в которых описывается применение метода отверстий для определения остаточных напряжений в телах из изотропного материала [1, 2]. В этих работах задача определения перемещений $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_{12}$ решается разложением нагрузок (1.1)—(1.3) в ряд Фурье по углу и представлением перемещений в том же виде, что и нагрузка. Трехмерная задача распадается на две двумерные задачи для нулевой и второй гармоник, которые решаются методом конечных элементов.

В случае анизотропного тела перемещения не будут иметь то же представление, что и нагрузка, так как матрица упругих постоянных в цилиндрической системе координат будет зависеть от φ . Однако и в этом случае оказывается удобным искать приближенное решение задачи, раскладывая перемещение в ряд Фурье по углу φ , а по двум другим координатам используя конечноэлементную аппроксимацию.

2. Постановка задачи о деформировании ортотропного полупространства. Будем рассматривать частный случай анизотропного тела, задаваемый следующими условиями: материал тела ортотропный; касательная плоскость к граничной поверхности тела в рассматриваемой точке совпадает с плоскостью упругой симметрии тела в этой точке.

Будем считать, что размеры отверстия малы по сравнению с радиусами кривизны граничной поверхности тела в точке проделывания отверстия. Тогда тело можно заменить полупространством с отверстием радиуса r_0 и глубины z_0 .

Направим оси x, y по главным осям анизотропии и будем решать задачу в цилиндрической системе координат (r, φ, z) (фиг. 2).

Для удобства записи введем следующие векторы:

$$u^T = [u_r, u_\varphi, u_z], \quad \varepsilon^T = [\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \gamma_{r\varphi}, \gamma_{rz}, \gamma_{\varphi z}]$$

$$\sigma^T = [\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}], \quad t^T = [t_r, t_\varphi, t_z]$$

Задача рассматривается при малых деформациях. Напряжения и деформации связаны обобщенным законом Гука: $\sigma = D\varepsilon$, где D — матрица упругих постоянных в цилиндрической системе координат.

Основываясь на формулах преобразования тензора четвертого ранга при повороте системы координат вокруг оси z , получим следующее выражение для матрицы D :

$$D = D_0 + \sum_{i=1}^2 (D_i \cos 2i\varphi + E_i \sin 2i\varphi) \quad (2.1)$$

где D_0, D_1, E_1, D_2, E_2 — постоянные матрицы, коэффициенты которых выражаются через коэффициенты матрицы D в системе координат x, y, z .

Задача заключается в определении поля перемещений, доставляющего минимум функционалу потенциальной энергии

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_t} u^T t d\Gamma \quad (2.2)$$

где Ω — область, занимаемая телом, Γ_t — боковая поверхность отверстия.

Для обеспечения разрешимости и единственности задачи минимизации функционал J рассматривается на множестве функций u , удовлетворяющих на бесконечности следующим условиям [3]:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |u| = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0. \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

где $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$, а во второй формуле (2.3) компоненты перемещений и производные рассматриваются в декартовой системе координат $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

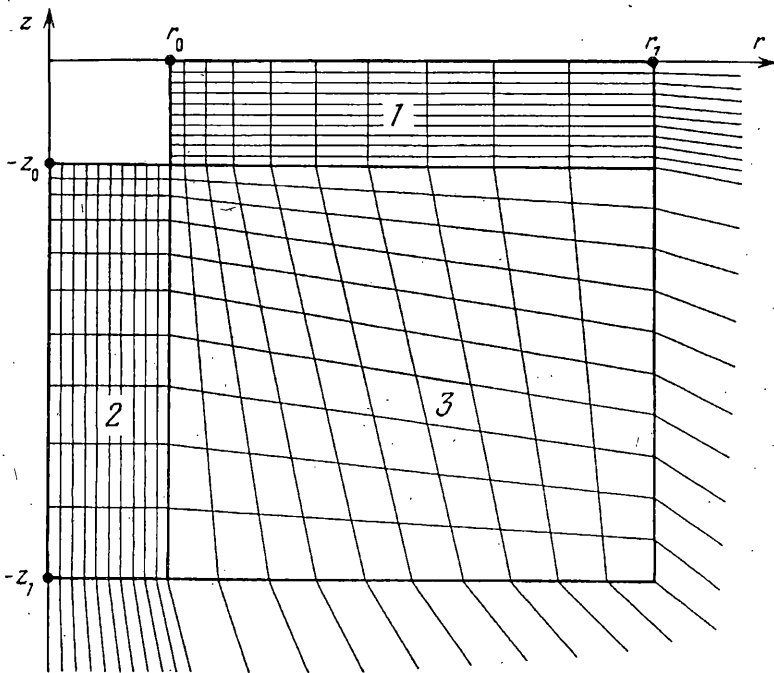
3. Метод решения задачи. Для решения задачи минимизации применяется аппроксимация перемещений по методу Ритца. Меридиональное сечение тела разбивается на внутреннюю часть, охватывающую отверстие, и оставшуюся внешнюю часть. Внутренняя часть разбивается на конечные элементы, а внешняя часть — на бесконечные элементы, стыкующиеся с конечными по общей границе (фиг. 3). Бесконечный элемент представляет собой неограниченный четырехугольник, две бесконечные стороны которого являются продолжениями лучей, исходящих из начала координат.

Компоненты перемещений \bar{u}_1 и \bar{u}_2 представляются в виде

$$u_r(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^n a_r^k(r, z) \cos 2k\varphi, \quad u_\varphi(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^n a_\varphi^k(r, z) \sin 2k\varphi$$

$$u_z(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^n a_z^k(r, z) \cos 2k\varphi, \quad a^k(r, z) = \sum_{i=1}^m N_i(r, z) a_i^k \quad (3.1)$$

где N_i — глобальная функция формы узла i , $a^k = [a_r^k, a_\varphi^k, a_z^k]$, a_i^k — значение a^k в узле i , m — число узлов сетки конечных элементов.



Фиг. 3

Функция формы в бесконечном элементе представляется в виде

$$N_i = \bar{N}_i R'_0 / R' \quad (3.2)$$

где \bar{N}_i — функция формы узла i для соседнего с бесконечным конечного элемента, вычисленная в точке пересечения общей стороны элементов с лучом, соединяющим начало координат и рассматриваемую точку бесконечного элемента; R, R_0 — расстояния от начала координат соответственно до точки бесконечного элемента и точки, в которой вычисляется функция \bar{N}_i ; l — порядок асимптотики перемещения на бесконечности.

Более подробно построение бесконечных элементов, задание в них перемещений и интегрирование по элементам рассмотрено в работах [4, 5].

Компоненты перемещения \bar{u}_{12} получаются из (3.1) заменой \cos на \sin , а \sin на \cos , нижнего предела суммы 0 на 1, а 1 на 0.

Введем обозначения $\delta^T = [\delta_0 \delta_1 \dots \delta_n]$, $\delta_k = [a_1^k a_2^k \dots a_m^k]$ ($k = 0, \dots, n$). Тогда будем иметь

$$u = N\delta, \quad \varepsilon = B\delta$$

$$N = [N_0 N_1 \dots N_n]; \quad B = [B_0 B_1 \dots B_n]$$

где N_k — матрица $3 \times 3m$, а B_k — матрица $6 \times 3m$, $k = 0, \dots, n$.

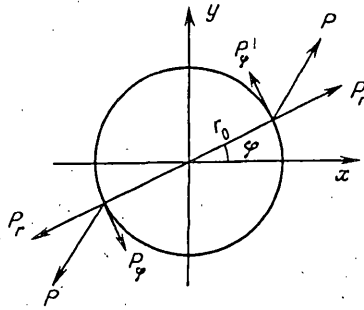
Элементы матриц имеют вид $f(r, z) \cos 2k\varphi$ или $f(r, z) \sin 2k\varphi$.

Задача минимизации функционала (2.2) приводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \right\} \delta = \int_{\Gamma_t} N^T t d\Gamma$$

матрица жесткости

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega$$



Фиг. 4

состоит из блоков

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega \quad (i, j = 0, 1, \dots, n) \quad (3.3)$$

В силу представления для коэффициентов матрицы B и формулы (2.1) интеграл (3.3) отличен от нуля только при $|i - j| \leq 2$, т. е. матрица K — пятиблочнодиAGONальная.

Для решения системы линейных уравнений используется прямой метод, называемый в литературе методом минимальной степени [6]. В этом методе производятся хранение и операции только с ненулевыми элементами разложенной матрицы. До решения системы осуществляется переупорядочение неизвестных, имеющее цель минимизировать заполнение матрицы при разложении. Метод очень эффективен для конечноэлементных расчетов. Так, на ЭВМ РС-486 с оперативной памятью 8 МГб и тактовой частотой 25 МГц удавалось решать системы для 4500 узлов двумерной сетки конечных элементов с тремя неизвестными в каждом узле в течение 6 минут.

4. Определение асимптотического поведения решения на бесконечности. Для трех систем сил, приложенных к боковой поверхности отверстия, определим показатель степени l в (3.2). Для этого будем рассматривать изотропное полупространство, так как для анизотропного полупространства характер асимптотики не изменится. Асимптотическое поведение решения очевидно, не изменится, если глубину отверстия устремить к нулю, а поверхностную силу — к бесконечности, так чтобы их произведение оставалось постоянным. В пределе получим задачу о деформировании полупространства силами P , приложенными к окружности радиуса r_0 на граничной плоскости (фиг. 4) и имеющими компоненты

$$P_r = t_r z_0, \quad P_\varphi = t_\varphi z_0, \quad P_z = 0 \quad (4.1)$$

Необходимо отметить, что $P_r(\varphi + \pi) = P_r(\varphi)$, $P_\varphi(\varphi + \pi) = P_\varphi(\varphi)$.

Перемещение от действия указанных сил представим в виде

$$u(r, \varphi, z) = \int_0^\pi (u^1(r, \varphi - \varphi_1, z) P_r(\varphi_1) + u^2(r, \varphi - \varphi_1, z) P_\varphi(\varphi_1 + \pi/2)) r_0 d\varphi_1 \quad (4.2)$$

где u^1 — вектор-функция перемещений полупространства от действия двух единичных сосредоточенных сил, одна из которых приложена в точке $x = r_0$, $y = 0$ и направлена вдоль оси x , а другая приложена в точке $x = -r_0$, $y = 0$ и направлена против оси x ; функция u^2 отличается от u^1 тем, что одна из сил приложена в точке $x = 0$, $y = r_0$ и направлена против оси x , а другая приложена в точке $x = 0$, $y = -r_0$ и направлена вдоль оси x .

Перемещение $u^1(x, y, z)$ представляется в виде

$$u^1 = u^0(x - r_0, y, z) - u^0(x + r_0, y, z) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{(2i-1)!} \frac{\partial^{2i-1} u^0}{\partial x^{2i-1}} r_0^{2i-1}$$

где u^0 — перемещение полупространства от действия единичной сосредоточенной силы, приложенной в начале координат вдоль оси x .

Представление для u^0 , указанное в [7], запишем в сферической системе координат R, θ, φ :

$$u_R^0 = \frac{2A}{R} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \sin \theta \cos \varphi$$

$$u_\theta^0 = \frac{A}{R} \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\mu} \cos \theta - \frac{1 + 2 \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) \cos \varphi$$

$$u_\varphi^0 = - \frac{A}{R} \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} + \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \sin \varphi, \quad A = \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)}$$

где λ, μ — параметры Ламе.

Нетрудно убедиться, что дифференцирование вектор-функции u^0 увеличивает порядок асимптотики на единицу, т. е. $\partial u^0 / \partial x = f_1(\theta, \varphi) / R^2$, $\partial^2 u^0 / \partial x^2 = f_2(\theta, \varphi) / R^3$ и т. д. Следовательно, u^1 имеет асимптотику на бесконечности R^{-2} .

Перемещение $u^2(x, y, z)$ представляется в виде

$$u^2 = -u^0(x, y - r_0, z) + u^0(x, y + r_0, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{(2i-1)!} \frac{\partial^{2i-1} u^0}{\partial y^{2i-1}} r_0^{2i-1}$$

Следовательно, u^2 также имеет асимптотику на бесконечности R^{-2} .

Исследование выражения (4.2) для сил P , задаваемых (4.1) и (1.1) — (1.3), показывает, что интегрирование не меняет характера асимптотики, т. е. показатель степени l в (3.2) равен 2.

5. О сходимости решения Ритца к точному решению. Обозначим через Δ диаметр двумерной области, дискретизируемой конечными элементами, через h — максимальный диаметр конечного элемента. Для оценки разности между точным решением задачи u и аппроксимацией Ритца v введем вспомогательные вектор-функции e, f, g . Функция

$$e = \sum_{k=0}^n (e_1^k(r, z) \cos 2k\varphi + e_2^k(r, z) \sin 2k\varphi)$$

есть сумма $(n+1)$ -первых членов разложения u в ряд Фурье по φ .

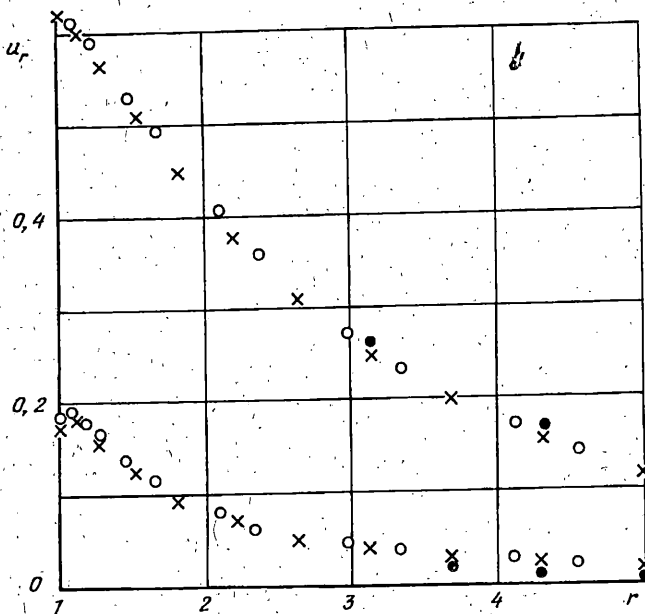
Функция f совпадает с e во внутренней области (меридиональное сечение которой дискретизируется конечными элементами), а во внешней области $f(A) = f(B)(R_0/R)^l$, где R, R_0 — расстояния от начала координат соответственно до точки A внешней области и точки B границы внутренней области, лежащей на том же луче. Функция g — интерполант e , т. е.

$$g = \sum_{i=1}^m N_i e(r_i, \varphi, z)$$

где N_i — функция формы узла i в конечных и бесконечных элементах; r_i, z_i — координаты узла i .

Будем рассматривать энергетическую норму вектор-функции u [8].

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon d\Omega \right)^{1/2}$$



Фиг. 5

Оценим $\|u - g\|$. По свойству нормы $|\|u - f\| - \|g - f\|| \leq \|u - g\| \leq \|u - f\| + \|g - f\|$. Так как $\|g - f\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то $\|u - g\| \rightarrow \|u - f\|$ при $h \rightarrow 0$. Аналогично из-за того, что $\|e - f\| \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow \infty$, имеем $\|u - f\| \rightarrow \|u - e\|$ при $\Delta \rightarrow \infty$. Наконец, $\|u - e\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В итоге имеем

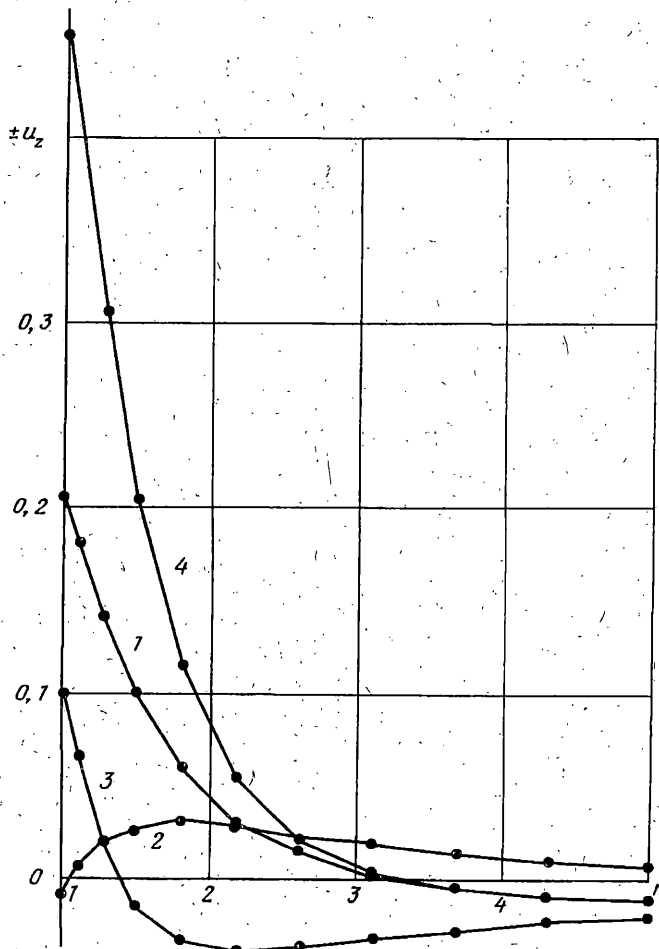
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \|u - g\| = 0$$

Из основного свойства аппроксимации Рунге [8] вытекает неравенство $\|u - v\| \leq \|u - g\|$.

6. Результаты расчетов. Были проведены расчеты деформирования полупространства с отверстием, изготовленного из ортотропного материала со следующими безразмерными упругими постоянными: $E_x = 4,7$, $E_y = E_z = 1$, $\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,28$, $\nu_{yz} = 0,4$, $G_{xy} = G_{xz} = 0,382$, $G_{yz} = 0,357$. Такие упругие постоянные имеют стеклопластик с эпоксидной матрицей, волокна которого направлены вдоль оси x . Принималось, что $r_0 = z_0 = 1$.

Для каждого из трех вариантов нагружения область, дискретизируемая конечными элементами, имела радиус $r_1 = 5$ и глубину $z_1 = 5$ (фиг. 3). Область разбивалась на три прямоугольные зоны, в каждой из которых строилась сетка линейных изопараметрических четырехугольных конечных элементов. Все три зоны разбивались на 10 частей по координатам r и z . Сетка конечных элементов сгущалась в направлении к отверстию. Число n в разложении (3.1) равнялось 3, т. е. рассматривались гармоники с номерами 0, 2, 4, 6.

Для проверки точности полученного решения для каждого из трех вариантов нагружения проводились три дополнительных расчета, включающие: более густую сетку конечных элементов; большие размеры зоны, дискретизируемой конечными элементами; большее число гармоник. В первом расчете размеры области, дискретизируемой конечными элементами, и число гармоник не менялись. Все три зоны области разбивались на 15 частей по обеим координатам. Для второго расчета принималось, что $r_1 = z_1 = 15$. Зона 1 разбивалась на 20 частей по r и на 10 частей по z , зона 2 — на 10 частей по r и на 20 частей по z , зона 3 разбивалась на 20 частей по обеим координатам. Число гармоник не менялось.



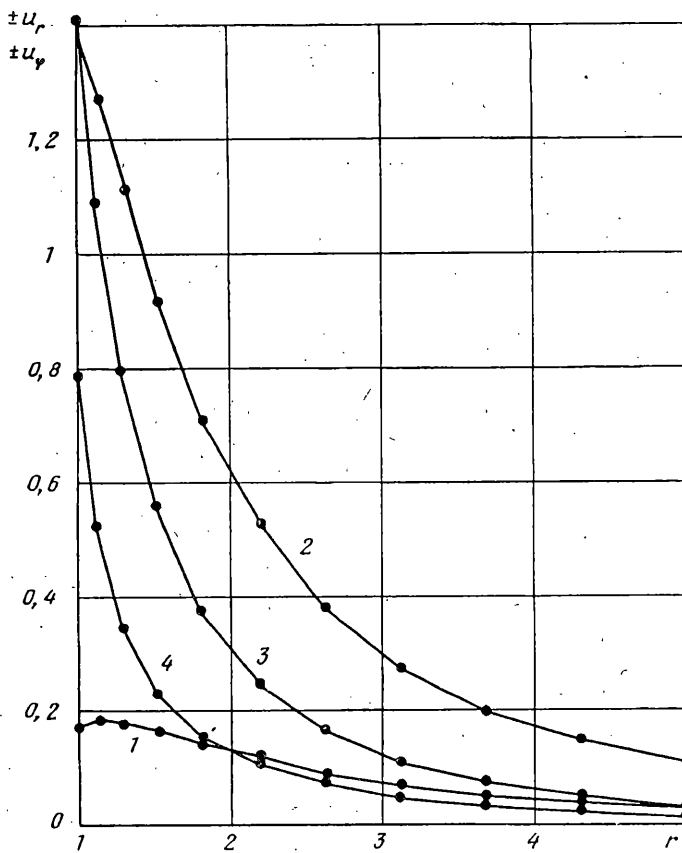
Фиг. 6

В третьем расчете увеличивалось только число n разложения (3.1), которое равнялось 4.

На фиг. 5 представлены графики зависимости от r перемещения u_x на граничной плоскости полупространства от действия нагрузки (1.1) для основного и трех дополнительных расчетов. Верхний график изображает перемещение u_x на оси x , а нижний — $-u_x$ на оси y . Косыми крестами обозначены результаты основного расчета, светлыми точками — первого дополнительного расчета, темными точками — третьего дополнительного расчета. Отсутствие знака в некоторой точке означает, что в этой точке соответствующее решение совпадает с основным в пределах масштаба рисунка. Так, во всех точках сливаются с основным решением результаты второго дополнительного расчета.

На фиг. 6 цифрами 1, 2 обозначены графики зависимости от r перемещения u_z соответственно на осях x и y от действия нагрузки (1.1). Цифрами 3, 4 обозначены перемещения соответственно $-u_z$ на оси x и u_z на оси y от действия нагрузки (1.2).

На фиг. 7 цифрами 1, 2 обозначены графики зависимости от r перемещений соответственно $-u_x$ на оси x и u_x на оси y от действия нагрузки (1.2). Цифрами 3, 4 обозначены перемещения соответственно u_y на оси x и $-u_y$ на оси y от действия нагрузки (1.3).



Фиг. 7

Нормальные остаточные напряжения σ_x, σ_y можно определить, воспользовавшись графиками на фиг. 5, 6 и графиками 1, 2 на фиг. 7 и измерив перемещения от высверливания отверстия в двух точках на осях x и y . При этом точность определения напряжений тем выше, чем больше определитель полученной системы двух линейных алгебраических уравнений. Для рассматриваемого в расчетах материала можно порекомендовать использование перемещения u_x в точке на кромке отверстия на оси x и перемещения u_z в такой же точке на оси y . В результате для определения остаточных напряжений σ_x, σ_y получим следующую систему: $0,615\sigma_x - 0,187\sigma_y = u_x$; $-0,010\sigma_x + 0,454\sigma_y = u_z$.

Касательное остаточное напряжение τ_{xy} определяется делением перемещения u_φ , измеренного, например, в точке кромки отверстия на оси x , на соответствующую ординату графика 3 на фиг. 7.

Авторы благодарят Г. Н. Чернышеву за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов А. А., Морозов В. К., Чернышев Г. Н. Измерение напряжений методом голографирования возмущенной поверхности тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 185—189.
2. Schajer G. S. Application of finite element calculations to residual stress measurements // Trans. ASME J. Eng. Mater. and Technol. 1981. V. 103. No. 2. P. 157—163.

3. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1968, 627 с.
4. Rajapakse R. K. N. D., Karasudhi P. Elastostatic infinite elements for layered half spaces//J. Eng. Mech. 1985. V. 111. No. 9. P. 1144—1158.
5. Кукуджанов В. Н., Шнейдерман Д. Н. Численное моделирование внешних упруго-пластических задач методом конечных элементов//Информационная технология и численные методы анализа распределенных систем. М.: Ин-т физ.-тех. проблем РАН, 1992. С. 7—16.
6. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 333 с.
7. Ляв А. Э. Х. Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит. и номогр., 1935. 674 с.
8. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977, 349 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XII.1993