

УДК 531.8

© 1995 г. В. В. ЗАВЬЯЛОВА, Л. Г. ЛОБАС

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДВУХЗВЕННОЙ СИСТЕМЫ С КАЧЕНИЕМ ПРИ КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЯХ И ВБЛИЗИ НИХ

Рассматривается плоскопараллельное движение системы абсолютно твердых и катящихся упругих тел, состоящей из ведущего и ведомого звеньев и моделирующей шарнирно сочлененные пневмоколесные машины (фиг. 1) в рамках феноменологического подхода Рокара [1]. Исследована устойчивость по Ляпунову [2] прямолинейной конфигурации при критических скоростях, для которых один корень характеристического уравнения равен нулю, а действительные части остальных корней отрицательные. Показано, что граница области устойчивости состоит из конечного числа чередующихся между собой опасных и безопасных (по Баутину [3]) участков.

Устойчивость прямолинейного движения с постоянной скоростью одного ведущего звена (двухосного автомобиля) изучена в [1, 4]. Если  $\omega = \dot{\theta}$  — угловая скорость экипажа,  $v$  и  $u$  — продольная и боковая проекции скорости центра масс  $C$ , то начало координат плоскости  $\omega u$  в случае экипажа с избыточной поворачиваемостью при  $v < v_+$  является устойчивым узлом, а при  $v > v_+$  — седлом [5]. Добавление ведомого звена приводит к тому, что граница области устойчивости двухзвенника в пространстве параметров, кроме поверхности  $v = v_+$ , включает также поверхность  $v = v_0$ , точкам которой отвечает пара чисто мнимых корней характеристического уравнения [6,7].

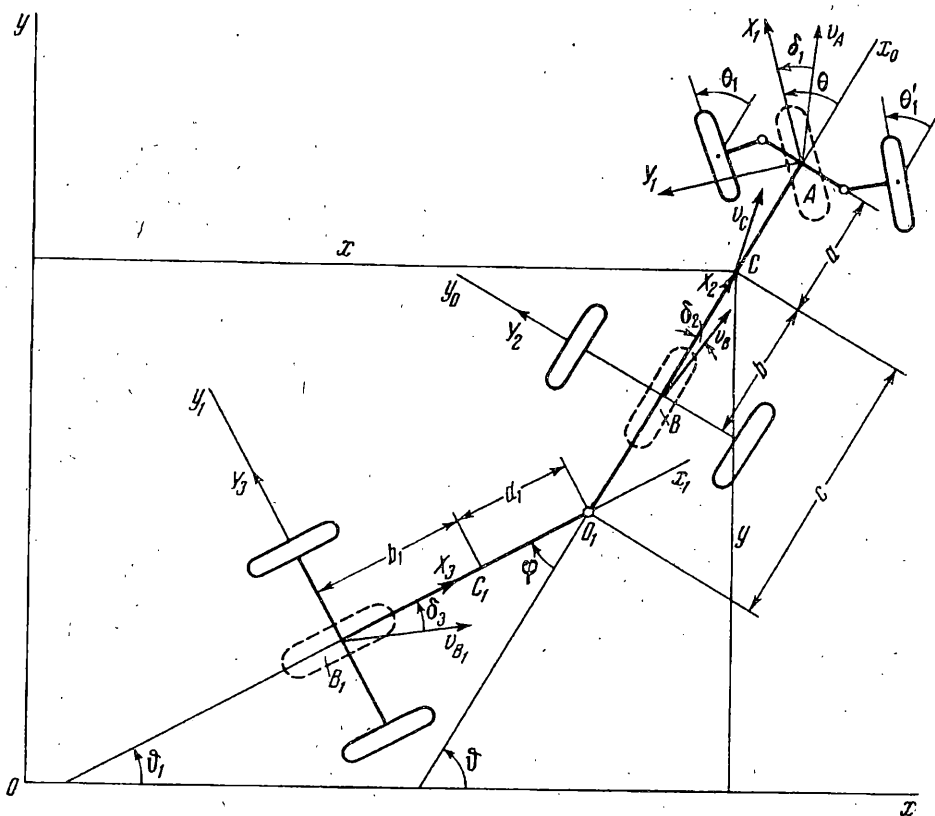
Для суждения об устойчивости движения двухзвенника при критических скоростях и разбиения границы  $v = v_+$  на опасные и безопасные участки необходимо найти соответствующие ляпуновские величины [2, 3]. Явные выражения последних получены в [3] для двумерных и четырехмерных динамических систем с квадратичными нелинейностями. В [8] приведены выражения первых двух ляпуновских величин для  $n$ -мерных систем с запаздыванием. Механическая система, рассматриваемая в данной работе, относится к частному случаю динамических систем; для которых главные части нелинейностей в уравнениях возмущенного движения имеют третий порядок. Соответствующая ляпуновская величина получена для них методом, описанным в [2, 9].

**1. Выражение первого ненулевого ляпуновского коэффициента для  $n$ -мерных динамических систем с симметрией. Динамическая система**

$$\dot{x} = f(x, \theta), \quad x, f \in R^n, \quad \theta = \text{const} \in R^m \quad (1.1)$$

образует подкласс систем с симметрией, если она инвариантна относительно знака переменной состояния  $x$  и векторного (скалярного) параметра  $\theta$ . Необходимым и достаточным условием этого есть  $f(-x, -\theta) = -f(x, \theta)$ . В таких системах точка  $x = 0$  с необходимостью является состоянием равновесия при  $\theta = 0$ . Физически это означает, что система безразлична к направлению смещения от состояния  $x = 0$ . Примерами могут служить осцилляторы Дюффинга и Ван-дер-Поля. Многие транспортные аппараты (автомобиль, самолет, корабль) относятся к системам с симметрией, поскольку их дифференциальные уравнения движения инвариантны относительно замены  $(t, x, \theta) \rightarrow (t, -x, -\theta)$ , причем  $\theta \in R^1$  есть угловая координата рулевого органа. Симметрия таких динамических систем означает равновозможность левого и правого поворота. Внешние силовые поля могут приводить к нарушению симметрии [10]. В этом случае вместо (1.1) можем иметь, например

$$\dot{x} = f(x, \theta) + p, \quad p \in R^n \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Наличие вектора  $p$  связывается с дефектом симметрии в системе (1.2). Для гладких динамических систем с симметрией уравнения возмущенного движения в окрестности состояния  $x = 0$  представимы в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + P_i(x_1, \dots, x_n), \quad a_{ij} = \text{const}$$

$$P_i \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_{klm}^{(i)} x_k x_l x_m + o(|x|^3) \quad (1.3)$$

$$a_{klm}^{(i)} = a_{kml}^{(i)} = a_{mkl}^{(i)} = \text{const}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

Пусть точка  $(0, 0, \dots, 0)$  является негрубым состоянием равновесия, для которого  $\lambda_1 = 0, \text{Re} \lambda_q < 0$  ( $q = 2, \dots, n$ ), т. е. система (1.3) структурно неустойчива. Здесь  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $A = \|a_{ij}\|_n$ . Обозначим через  $A_{ij}$  алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ . Линейная часть системы (1.3) допускает, как известно, линейный интеграл с постоянными коэффициентами. Следуя [2], возьмем его в качестве одной из неизвестных функций  $x = \sum a_i x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Если нумерацию переменных  $x_i$  произвести таким образом, чтобы  $A_{nn} \neq 0$ , то  $a_n \neq 0$ , и можно принять  $x$  вместо  $x_n$ . Положим  $a_i = A_{in}$ . Уравнения (1.3) преобразуются к виду

$$\dot{x} = X(x, x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_s = \sum_{r=1}^{n-1} b_{sr} x_r + b_s x + P_s(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x, x_1, \dots, x_{n-1})) \quad (s = 1, \dots, n-1)$$

$$X(x, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n a_i P_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x, x_1, \dots, x_{n-1})) \quad (1.5)$$

$$x_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x - \sum_{s=1}^{n-1} a_s x_s) a_n^{-1}, \quad b_{sr} = a_{sr} - a_r b_s, \quad b_s = a_{sn} a_n^{-1}$$

Приравняем нулю правые части не критических уравнений и будем искать решение соответствующей системы конечных уравнений в виде  $x_r = u_r(x)$ , где  $u_r(0) = 0$ , причем функции  $u_r(x)$  разлагаются в степенные ряды, сходящиеся при достаточно малых  $x$ . Такие функции существуют [2, 9]. Ограничиваясь величинами первого порядка, находим  $u_r = \sigma_r x + \dots$  ( $r = 1, \dots, n-1$ ), причем  $\sigma_r = A_{nr} / (\sum a_i A_{ni})$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Для суждения об устойчивости нулевого решения системы (1.3) необходимо составить выражение  $X(x, u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) = gx^3 + o(x^3)$ . На основании (1.5) имеем

$$x_n(x, u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) = \sigma_n x + \dots, \quad \sigma_n = (1 - \sum_{r=1}^{n-1} a_r \sigma_r) a_n^{-1}$$

Поэтому

$$g = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_{klm}^{(i)} \sigma_k \sigma_l \sigma_m \quad (1.6)$$

Если  $g < 0$ , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво [2], а гиперповерхность  $A_n = 0$  является безопасной [3] границей области устойчивости в пространстве параметров. При  $g > 0$  невозмущенное движение неустойчиво, а гиперповерхность  $A_n = 0$  — опасная граница в направлении  $dA_n/dv < 0$ : на ней происходит срыв изображающей точки. Здесь  $A_n = |A|$  — свободный член характеристического уравнения,  $v$  — характерный параметр системы, такой, что  $v \leq v_+ \Rightarrow A_n \geq 0$ . Структура выражения (1.6) такова

$$\begin{aligned} g = & \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ijj}^{(i)} \sigma_j^3 + 3\sigma_1^2 \sum_{j=2}^n a_{11j}^{(i)} \sigma_j + 3\sigma_1 \sum_{j=2}^n a_{1jj}^{(i)} \sigma_j^2 + \right. \\ & + 3\sigma_2^2 \sum_{j=3}^n a_{22j}^{(i)} \sigma_j + 3\sigma_2 \sum_{j=3}^n a_{2jj}^{(i)} \sigma_j^2 + \dots + 3\sigma_{n-1}^2 \sum_{j=n}^n a_{n-1, n-1, j}^{(i)} \sigma_j + \\ & + 3\sigma_{n-1} \sum_{j=n}^n a_{n-1, n, m}^{(i)} \sigma_j^2 + 6\sigma_1 \sigma_2 \sum_{j=3}^n a_{12j}^{(i)} \sigma_j + 6\sigma_1 \sigma_3 \sum_{j=4}^n a_{13j}^{(i)} \sigma_j + \dots + \\ & + 6\sigma_1 \sigma_{n-1} \sum_{j=n}^n a_{1, n-1, n}^{(i)} \sigma_j + 6\sigma_2 \sigma_3 \sum_{j=4}^n a_{23j}^{(i)} \sigma_j + 6\sigma_2 \sigma_4 \sum_{j=5}^n a_{24j}^{(i)} \sigma_j + \dots + \\ & \left. + 6\sigma_2 \sigma_{n-1} \sum_{j=n}^n a_{2, n-1, j}^{(i)} \sigma_j + \dots + 6\sigma_{n-2} \sigma_{n-1} \sum_{j=n}^n a_{n-2, n-1, n}^{(i)} \sigma_j \right) \end{aligned}$$

**2. Дифференциальные уравнения движения двухзвенной системы с качением.** Система состоит из двухосного тягача и одноосного полуприцепа. Используем одноколейную (велосипедную) модель, изображенную на фиг. 1 штриховыми линиями;  $\delta_i$  — приведенные углы бокового увода колесных осей. При заданном значении угла  $\theta \approx (\theta_1 + \theta_1')/2$  конфигурация системы описывается координатами  $x, y, \vartheta, \varphi$ . Находим

$$v_c = i_0 v + j_0 u, \quad v = \dot{x} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta, \quad u = -\dot{x} \sin \vartheta + \dot{y} \cos \vartheta$$

$$v_{C_1} = i_1 v_1 + j_1 u_1, \quad v_1 = v \cos \varphi - (u - \omega c) \sin \varphi, \quad u_1 = v \sin \varphi + (u - \omega c) \cos \varphi - \\ - \omega_1 d_1, \quad \omega = \dot{\varphi}, \quad \omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \omega - \dot{\varphi}, \quad \delta_1 = \theta - \text{arctg} [(u + a\omega) v^{-1}] \\ \delta_2 = \text{arctg} [(-u + b\omega) v^{-1}], \quad \delta_3 = \text{arctg} [(-u_1 + \omega_1 b_1) v_1^{-1}]$$

Пусть  $C, C_1, m, m_1, I, I_1$  — центры масс, массы и центральные моменты инерции относительно вертикальных осей ведущего и ведомого звеньев соответственно. Уравнения движения двухзвенника составим на основании алгоритма Больцмана—Гамеля [11]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \Omega_s} - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} + \sum_{r=1}^n \sum_{r=1}^n \gamma'_{rs} \frac{\partial T}{\partial \Omega_r} \Omega_r = P_s, \quad (s = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

$$T = 1/2 (m v_C^2 + I \omega^2 + m_1 v_{C_1}^2 + I_1 \omega_1^2)$$

где  $T$  — кинетическая энергия двухзвенника. Приняв  $\Omega_1 = v, \Omega_2 = u, \Omega_3 = \omega, \Omega_4 = \dot{\varphi}$ , из (2.1) имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} - \omega \frac{\partial T}{\partial u} = F_{x_0}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} + \omega \frac{\partial T}{\partial v} = F_{y_0} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} - u \frac{\partial T}{\partial v} + v \frac{\partial T}{\partial u} = M_\omega, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_\varphi \quad (2.2)$$

$$F_{x_0} = X_1 \cos \theta - Y_1 \sin \theta + X_2 + X_3 \cos \varphi + Y_3 \sin \varphi, \quad F_{y_0} = X_1 \sin \theta + \\ + Y_1 \cos \theta + Y_2 - X_3 \sin \varphi + Y_3 \cos \varphi, \quad M_\omega = (X_1 \sin \theta + Y_1 \cos \theta) a - \\ - b Y_2 + c X_3 \sin \varphi - (L_1 + c \cos \varphi) Y_3, \quad M_\varphi = L_1 Y_3$$

Вместо третьего уравнения (2.2) целесообразно взять следующую линейную комбинацию третьего и четвертого уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - u \frac{\partial T}{\partial v} + v \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_\omega + M_\varphi$$

Окончательные уравнения движения двухзвенника имеют вид

$$(m + m_1) \dot{v} - m_1 d_1 \dot{\omega} \sin \varphi + m_1 d_1 \ddot{\varphi} \sin \varphi - (m + m_1) \omega u + m_1 c \omega^2 + \\ + m_1 d_1 (\omega - \dot{\varphi})^2 \cos \varphi = X_1 \cos \theta - Y_1 \sin \theta + X_2 + X_3 \cos \varphi + Y_3 \sin \varphi \quad (2.3)$$

$$(m + m_1) \dot{u} - m_1 (c + d_1 \cos \varphi) \dot{\omega} + m_1 d_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi + (m + m_1) v \omega - \\ - m_1 d_1 (\omega - \dot{\varphi})^2 \sin \varphi = X_1 \sin \theta + Y_1 \cos \theta + Y_2 - X_3 \sin \varphi + Y_3 \cos \varphi \quad (2.4)$$

$$[I + m_1 c (c + d_1 \cos \varphi)] \dot{\omega} - m_1 c \dot{u} - m_1 c d_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_1 c v \omega + \\ + m_1 c d_1 (\omega - \dot{\varphi})^2 \sin \varphi = a (X_1 \sin \theta + Y_1 \cos \theta) - b Y_2 + c (X_3 \sin \varphi - Y_3 \cos \varphi) \quad (2.5)$$

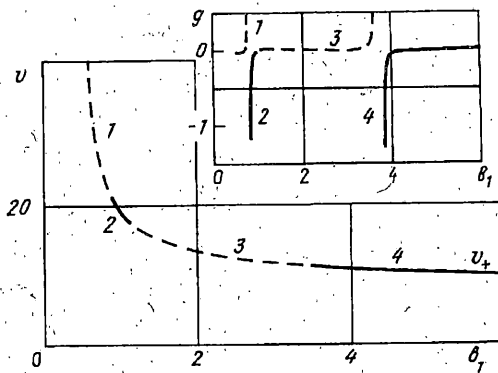
$$(I_1 + m_1 d_1^2) \ddot{\varphi} - [I_1 + m_1 d_1 (d_1 + c \cos \varphi)] \dot{\omega} + m_1 d_1 \dot{u} \cos \varphi + m_1 d_1 \dot{v} \sin \varphi + \\ + m_1 d_1 v \omega \cos \varphi - m_1 d_1 u \omega \sin \varphi + m_1 c d_1 \omega^2 \sin \varphi = L_1 Y_3 \quad (2.6)$$

Удерживая лишь главные части нелинейностей в выражениях боковых реакций  $Y_i$  через углы увода, примем аппроксимацию

$$Y_i = k_i \delta_i (1 + \kappa_i^2 \varphi_i^{-2} \delta_i^2), \quad \kappa_i = k_i G_i^{-1}, \quad \varphi_i \in (0, 1)$$

$$G_1 = [mgb - m_1 g b_1 (c - b) L_1^{-1}] l^{-1}, \quad L_1 = b_1 + d_1, \quad l = a + b$$

$$G_2 = [mga + m_1 g b_1 (a + c) L_1^{-1}] l^{-1}, \quad G_3 = m_1 g d_1 L_1^{-1}$$



Фиг. 2

**3. Устойчивость прямолинейного движения двухзвенника с критической скоростью.** Исследуем движение двухзвенника с заданной скоростью  $v = \text{const}$  при  $X_1 = X_3 = 0$ . Значение  $X_2$ , реализующее такой режим, определяется уравнением (2.3). Вводя вектор  $x = \text{col}(u, \omega, \varphi, \dot{\varphi})$  и вектор-функцию  $f \in R^4$ , запишем уравнения (2.4)–(2.6) при  $\theta = 0$  в виде  $\dot{x} = f(x)$ . Нулевое решение последнего уравнения соответствует прямолинейному движению двухзвенника. Составим уравнения в вариациях для решения  $x = 0$  и запишем характеристическое уравнение, свободный член которого обозначим через  $A_4(v) = \det \|df_i/\partial x_j\|_{x=0}$ . Наибольшую опасность с точки зрения эксплуатационной практики представляет дивергентная неустойчивость движения, при которой один из корней характеристического уравнения положителен. Уравнение  $A_4(v) = 0$  имеет решение  $v = v_+$ , где  $v_+^2 = k_1 k_2 L_1 l^2 \times \{m L_1 (k_1 a - k_2 b) + m_1 b_1 [k_1 a - k_2 b + c(k_1 + k_2)]\}^{-1}$ , причем  $A_4 > 0$  при  $v < v_+$  и  $A_4 < 0$  при  $v > v_+$ . Характер устойчивости движения при  $v = v_+$  определяется знаком величины (1.6). Примем  $m = 2717$  кг,  $I = 4061$  кг·м<sup>2</sup>,  $a = 1,14$  м,  $b = 1,6$  м,  $c = 2$  м,  $m_1 = 9074$  кг,  $I_1 = 47579$  кг·м<sup>2</sup>,  $d_1 = 1,5$  м,  $k_1 = 103500$  Н/рад,  $k_2 = 305090$  Н/рад,  $k_3 = 254080$  Н/рад,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0,8$ . С ростом  $b_1$  знак функции  $g(b_1)$  меняется при прохождении через бесконечность, через нуль и опять через бесконечность, т. е. в зависимости от этого знака область значений величины  $b_1$  [м] делится на четыре подобласти, обозначенные на фиг. 2 цифрами 1–4. Сплошные участки кривой  $v = v_+(b_1)$  отвечают асимптотической устойчивости прямолинейного движения, штриховые — неустойчивости движения. Пограничные слои области  $v < v_+$ , прилегающие к штриховым участкам, являются практически опасными, тогда как пограничные слои области  $v > v_+$ , примыкающие к сплошным участкам кривой  $v = v_+$ , практически безопасны [3].

Прямое численное интегрирование исходной нелинейной системы (2.4)–(2.6) при различных начальных условиях приводит к интегральным кривым, характер которых полностью отвечает характеру устойчивости соответствующих участков кривой  $v = v_+(b_1)$  на фиг. 2. В областях неустойчивости движения точка фазового пространства с ростом  $t$  уходит в бесконечность вследствие почти монотонного возрастания функции  $|\dot{u}(t)|$ . Функция  $|\omega(t)|$  колебательно возрастающая, при этом знаки функций  $u(t)$  и  $\omega(t)$  противоположны. Поскольку  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то предельной конфигурацией двухзвенника есть прямолинейная. Срыв изображающей точки, о котором упоминалось в п. 1, происходит, в первую очередь, вследствие переменной  $u$ .

Таким образом, несмотря на то, что область  $v < v_+$  является претендентом на область асимптотической устойчивости (а для многих двухзвенников условие  $v < v_+$  действительно есть необходимое и достаточное условие асимптотической

устойчивости прямолинейного движения), проведенный выше нелинейный анализ показал, что не все точки этой области практически безопасны. С другой стороны, некоторые точки области неустойчивости  $v > v_*$  безопасны в смысле [3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. *Ляпунов А. М.* Собр. соч.: М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. 473 с.
3. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
4. *Неймарк Ю. И., Фурфеев Н. А.* Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967. 520 с.
5. *Лобас Л. Г., Вербицкий В. Г.* Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. Киев: Наук. думка, 1990. 229 с.
6. *Лобас Л. Г.* Курсовая устойчивость двухзвенных колесных машин//Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 4. С. 104—111.
7. *Troger H., Steindl A.* Nonlinear stability and bifurcation theory. Wien; New York: Springer—Verlag, 1991.—408 p.
8. *Фишман Л. З.* Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием в случае нулевого корня//Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1830—1832.
9. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
10. *Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г.* Бифуркации и устойчивость стационарных движений пневмоколесных машин в постоянных силовых полях//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 28—33.
11. *Hamel G.* Die Lagrange—Eulerschen Gleichungen der Mechanik//Z. angew. Math. und Phys. 1904. Bd. 50 N. 1/2. S. 1—57.

Киев

Поступила в редакцию  
30.XI.1993