

УДК 531.383

© 1995 г. С. И. ГУБАРЕНКО, В. Г. КУЗЬМЕНКО

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ УХОДОВ НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ СТЕНДОВЫХ ИСПЫТАНИЙ

Рассматривается неконтактный гироскоп (НГ), помещенный в двухстепенный гиростабилизатор (ГС), основание которого ориентировано определенным образом по отношению к Земле. Следящие системы ГС поддерживают неизменной ориентацию ротора гироскопа в кожухе. Модель ухода НГ определяется консервативными [1], неконсервативными [2] и корпусными [3] возмущающими моментами.

Показано, что неточные данные об установке основания ГС относительно Земли и о расположении ротора в кожухе приводят к существенным погрешностям при идентификации модели дрейфа гироскопа. Предлагается в число идентифицируемых параметров включить погрешности установки гироскопа в процессе стендовых испытаний. Такой подход позволяет существенно повысить точность прогнозирования дрейфа НГ. Изложен способ идентификации нестационарных дрейфов НГ методами оптимальной фильтрации.

**1. Системы координат и схемы установки основания ГС.** Точками  $O$ ,  $C$  обозначим центр Земли и центр масс гироскопа. Обозначим широту места испытания гироскопа через  $\varphi$ . Введем следующие системы координат:  $O\xi^0$  — инерциальная (ось  $O\xi_3^0$  направлена по Оси Мира);  $O\xi$  — связанная с Землей (ось  $O\xi_3$  совпадает с  $O\xi_3^0$ ,  $O\xi_1$  проходит через меридиан места испытаний);  $C\eta$  — географическая ( $C\eta_3$  направлена по географической вертикали вверх,  $C\eta_2$  — по касательной к меридиану на Север,  $C\eta_1$  — по касательной к параллели на Восток);  $C\zeta$  — система координат, жестко связанная с основанием ГС ( $C\zeta_1$  направлена по оси вращения внешней рамки ГС,  $C\zeta_2$  — по оси внутренней рамки ГС);  $Cx$  — система координат, жестко связанная с платформой ГС;  $Cz$  — полу-связанная с ротором система координат ( $Cz_3$  — ось динамической симметрии ротора). Система координат  $Cx$  получается из  $C\zeta$  поворотом на угол  $\alpha_1$  вокруг оси  $C\zeta_1$ , а затем поворотом на угол  $\alpha_2$  вокруг второй оси промежуточного трехгранника.

Установку основания ГС относительно географической системы координат  $C\eta$  определим с помощью трех углов  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ . В работе рассматриваются четыре схемы установки основания ГС в процессе испытаний: полярная (I), экваториальная (II), горизонтальная (III) и вертикальная (IV). Соответствующие этим схемам №№ I—IV комбинации углов  $\chi$  приведены в табл. 1.

**2. Структура возмущающего момента.** Для построения уравнений движения гироскопа используется следующее представление возмущающего момента сил в нормализованном виде ( $m = M/(I\Omega U)$ ):

$$m = (m_{11} \sin \gamma - m_{12} \sin 2\gamma) e_1 + (m_{21} \sin \gamma - m_{22} \sin 2\gamma) e_2 + m_{c1} x_1 + m_{c2} x_2 \quad (2.1)$$

Здесь  $M$  — размерный возмущающий момент,  $I$  — момент инерции ротора вокруг своей оси динамической симметрии,  $\Omega$  — угловая скорость вращения ротора,  $U$  — угловая скорость вращения Земли.  $x_1, x_2$  — единичные векторы,

Таблица 1

|          | I                 | II         | III      | IV |
|----------|-------------------|------------|----------|----|
| $\chi_1$ | 0                 | 0          | 0        | 0  |
| $\chi_2$ | $\varphi - \pi/2$ | $-\varphi$ | $-\pi/2$ | 0  |
| $\chi_3$ | $-\pi/2$          | $\pi/2$    | $-\pi/2$ | 0  |

направленные по осям  $Cx_1$ ,  $Cx_2$  платформы ГС; единичные векторы  $e_1$ ,  $e_2$  введены равенствами

$$e_1 = [e_3, g]/\sin \gamma, \quad e_2 = [e_3, e_1] \quad (2.2)$$

где  $e_3$ ,  $g$  — единичные векторы, направленные соответственно по оси симметрии ротора и по вектору силы тяжести;  $\gamma$  — угол между векторами  $-g$  и  $e_3$ .

Первое и второе слагаемые в (2.1) представляют собой консервативный и неконсервативный возмущающие моменты [1, 2], последние два слагаемые — корпусной возмущающий момент [3].

**3. Уравнения движения НГ.** При выводе уравнений движения НГ дополнительно к параметрам дрейфа  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{21}$ ,  $m_{22}$ ,  $m_{c1}$ ,  $m_{c2}$  учтем неточность установки основания ГС относительно географической системы координат  $C\eta$  и неортогональность оси симметрии ротора платформе ГС. Последняя ошибка вызвана, например, смещением нуля датчика угла НГ и неточностью установки кожуха гироскопа на платформе ГС.

Введем вектор малого поворота  $\Delta\chi = (\Delta\chi_1, \Delta\chi_2, \Delta\chi_3)^T$ , который характеризует неточность установки основания ГС:  $\chi_i = \chi_i^* + \Delta\chi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Аналогично, введем вектор малого поворота  $\theta = (\theta_1, \theta_2, 0)^T$ , который характеризует неортогональность оси симметрии ротора платформе ГС. Параметры  $\Delta\chi_1$ ,  $\Delta\chi_2$ ,  $\Delta\chi_3$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  назовем погрешностями установки.

Задача о движении НГ решается в прецессионной постановке на основании теоремы об изменении кинетического момента ротора относительно его центра масс. Дифференциальные уравнения для углов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  поворота внешней и внутренней рамок ГС, полученные с помощью системы аналитических вычислений REDUCE [4] с точностью  $O(\Delta\chi^2)$ ,  $O(\theta^2)$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1' \cos \alpha_2 = & -(1 + \theta_2 \operatorname{tg} \alpha_2) u_{1x} + \theta_2 u_{3x} - m_{c2} (1 + \theta_2 \operatorname{tg} \alpha_2) - m_{11} (1 + \theta_2 \operatorname{tg} \alpha_2) g_{1x} + \\ & + m_{21} (1 + \theta_2 \operatorname{tg} \alpha_2) g_{2x} + (m_{11} \theta_2 + m_{21} \theta_1) g_{3x} - 2m_{12} \theta_2 g_{1x}^2 - 2m_{22} \theta_1 g_{2x}^2 + \\ & + 2(m_{12} \theta_2 + m_{22} \theta_1) g_{3x}^2 + 2(m_{12} \theta_1 + m_{22} \theta_2) g_{1x} g_{2x} - 2m_{12} (1 + \theta_2 \operatorname{tg} \alpha_2) g_{1x} g_{3x} + \\ & + 2m_{22} (1 + \theta_2 \operatorname{tg} \alpha_2) g_{2x} g_{3x} - \Delta u_{1x} \\ \Delta u_{1x} = & \Delta\chi_1 (u_{2z} \cos \alpha_1 + u_{3z} \sin \alpha_1) \sin \alpha_2 - \Delta\chi_2 (u_{1z} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + u_{3z} \cos \alpha_2) - \\ & - \Delta\chi_3 (u_{1z} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - u_{2z} \cos \alpha_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2' = & \theta_1 \operatorname{tg} \alpha_2 u_{1x} - u_{2x} - \theta_1 u_{3x} + m_{c1} + m_{c2} \theta_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - (m_{21} - m_{11} \theta_1 \operatorname{tg} \alpha_2) g_{1x} - \\ & - (m_{11} + m_{21} \theta_1 \operatorname{tg} \alpha_2) g_{2x} - (m_{11} \theta_1 - m_{21} \theta_2) g_{3x} - 2m_{22} \theta_2 g_{1x}^2 + 2m_{12} \theta_1 g_{2x}^2 + \\ & + 2(m_{22} \theta_2 - m_{12} \theta_1) g_{3x}^2 + 2(m_{22} \theta_1 - m_{12} \theta_2) g_{1x} g_{2x} - 2(m_{22} - m_{12} \theta_1 \operatorname{tg} \alpha_2) g_{1x} g_{3x} - \\ & - 2(m_{12} + m_{22} \theta_1 \operatorname{tg} \alpha_2) g_{2x} g_{3x} - \Delta u_{2x} \end{aligned}$$

$$\Delta u_{2x} = -\Delta\chi_1 (u_{2z} \sin \alpha_1 - u_{3z} \cos \alpha_1) + \Delta\chi_2 u_{1z} \sin \alpha_1 - \Delta\chi_3 u_{1z} \cos \alpha_1$$

Здесь  $u_{ix}, g_{ix}$  — проекции единичных векторов  $u, g$  на оси  $x$  платформы ГС;  $u_{i\zeta}$  — проекции  $u$  на оси  $\zeta$  основания ГС ( $i = 1, 2, 3$ ); штрихом обозначено дифференцированное по безразмерному времени  $\tau = Ut$  (вектор  $u$  направлен по оси вращения Земли).

Для малых углов  $\alpha_1, \alpha_2$  уравнения (3.1) с точностью до обозначений совпадают с математической моделью дрейфа гироскопа с двумя степенями свободы, представленной в [5]. При этом модель уходов НГ в виде (3.1) позволяет установить причину появления различных составляющих уходов, представленных в виде разложений по компонентам единичного вектора  $g$ .

4. Движение «Полярного» гироскопа. Рассмотрим НГ в составе ГС, основание которого установлено по полярной схеме (см. табл. 1). Предположим, что погрешности установки  $\Delta\chi, \theta$  отсутствуют. Рассмотрим движение НГ вблизи направления на Полярную звезду. В этом случае углы  $\alpha_1, \alpha_2$  будут малыми и линеаризованные по  $\alpha_1, \alpha_2$  уравнения (3.1) примут вид

$$\alpha_1' = -\alpha_1 (m_{21} \sin \varphi - 2m_{22} \sin^2 \varphi) + \alpha_2 (1 - m_{11} \sin \varphi - 2m_{12} \cos 2\varphi) - m_{c2} + m_{11} \cos \varphi - m_{12} \sin 2\varphi \quad (4.1)$$

$$\alpha_2' = -\alpha_1 (1 - m_{11} \sin \varphi + 2m_{12} \sin^2 \varphi) - \alpha_2 (m_{21} \sin \varphi + 2m_{22} \cos 2\varphi) + m_{c1} + m_{21} \cos \varphi - m_{22} \sin 2\varphi$$

Система линейных дифференциальных уравнений (4.1) с постоянными коэффициентами имеет следующее решение:

$$\alpha_1(\tau) = \alpha_{c1} + \exp(-\lambda\tau)(r_1 \cos v\tau + r_2 \sin v\tau) \quad (4.2)$$

$$\alpha_2(\tau) = \alpha_{c2} - \exp(-\lambda\tau)(-r_2 \cos v\tau + r_1 \sin v\tau)$$

$$\alpha_{c1} = m_{c1} + m_{21} \cos \varphi - m_{22} \sin 2\varphi, \quad \alpha_{c2} = m_{c2} - m_{11} \cos \varphi + m_{12} \sin 2\varphi$$

$$\lambda = m_{21} \sin \varphi + m_{22} (1 - 3 \sin^2 \varphi), \quad v = 1 - m_{11} \sin \varphi - m_{12} (1 - 3 \sin^2 \varphi)$$

$$r_i = \alpha_{i0} - \alpha_{ci}, \quad \alpha_{i0} = \alpha_i(0) \quad (i = 1, 2) \quad (4.3)$$

Уравнения (4.2) на картинной плоскости  $\alpha_1, \alpha_2$  задают логарифмическую спираль

$$\alpha_1(\tau) = \alpha_{c1} + r \exp(-\lambda\tau) \cos(v\tau + \psi) \quad (4.4)$$

$$\alpha_2(\tau) = \alpha_{c2} - r \exp(-\lambda\tau) \sin(v\tau + \psi)$$

Сравнение (4.2), (4.3) с (4.4) позволяет установить связь между параметрами спирали  $\alpha_{c1}, \alpha_{c2}, r, \lambda, v, \psi$  и параметрами дрейфа  $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, m_{c1}, m_{c2}$  и начальными условиями  $\alpha_{10}, \alpha_{20}$ . Если, например, параметры корпусных дрейфов  $m_{c1}, m_{c2}$  известны, то эту связь можно представить в виде

$$m_{12} = [(1 - v) \cos \varphi + (\alpha_{c2} - m_{c2}) \sin \varphi] / \cos^3 \varphi$$

$$m_{11} = (-\alpha_{c2} + m_{c2} + m_{12} \sin 2\varphi) / \cos \varphi \quad (4.5)$$

$$m_{22} = [(m_{c1} - \alpha_{c1}) \sin \varphi + \lambda \cos \varphi] / \cos^3 \varphi$$

$$m_{21} = (\alpha_{c1} - m_{c1} + m_{22} \sin 2\varphi) / \cos \varphi \quad \alpha_{10} = \alpha_{c1} + r \cos \psi, \quad \alpha_{20} = \alpha_{c2} - r \sin \psi$$

Аналогичные формулы могут быть получены и для случаев, когда известны пары  $(m_{11}, m_{21})$  или  $(m_{12}, m_{22})$ . Из этого, в частности, следует, что по результатам испытаний «Полярного» гироскопа не удастся определить все шесть параметров дрейфа.

Формулы типа (4.5) были получены в [6] без учета неконсервативных и корпусных параметров дрейфа.

Предположим, что известны результаты испытаний Полярного гироскопа в виде двух массивов углов  $\alpha_{1j}^*, \alpha_{2j}^*$ , полученных в моменты времени  $\tau_j$  ( $j = 0, 1, \dots; n$ ). Обозначим значения углов  $\alpha_1, \alpha_2$ , посчитанные по формулам (4.4) в моменты времени  $\tau_j$ , через  $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}$ . Тогда параметры спирали могут быть найдены путем минимизации следующей функции шести переменных:

$$G_n(\alpha_{c1}, \alpha_{c2}, r, \lambda, v, \psi) = \sum_{j=0}^n [(\alpha_{1j}^* - \alpha_{1j})^2 + (\alpha_{2j}^* - \alpha_{2j})^2] \quad (4.6)$$

5. Влияние погрешностей установки на точность НГ. Пусть  $\alpha_i(\tau)$  ( $i = 1, 2$ ) представляют собой решения уравнений (3.1); через  $\bar{\alpha}_i(\tau)$  обозначим решения этих же уравнений для нулевых погрешностей установки ( $\Delta\chi = \theta = 0$ ). Введем ошибки  $\Delta\alpha_i = \alpha_i(\tau) - \bar{\alpha}_i(\tau)$ . Согласно (3.1), уравнения для ошибок  $\Delta\alpha_i$  с точностью  $O(m\Delta\chi)$ ,  $O(m\theta)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1' \cos \alpha_2 &= -\Delta u_{1x} + \theta_2 (-u_{1x} \operatorname{tg} \alpha_2 + u_{3x}) - \Delta\alpha_2 u_{1x} \operatorname{tg} \alpha_2 \\ \Delta\alpha_2' &= -\Delta u_{2x} + \theta_1 (u_{1x} \operatorname{tg} \alpha_2 - u_{3x}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Проведем некоторые числовые оценки. Для параметров дрейфа  $m \sim 0,01$  ( $\sim 0,15$  град/час) и погрешностей установки  $\Delta\chi \sim 1'$ ,  $\theta \sim 10'$  отброшенные в уравнениях (5.1) члены  $O(m\Delta\chi)$ ,  $O(m\theta)$  имеют порядок 0,0005 град/час. При этом правые части в (5.1) имеют порядок 0,05 град/час.

Из уравнений (5.1) следует, что погрешности установки не влияют на точность гироскопа, если выполнены соотношения

$$\Delta u_{1x} = \Delta u_{2x} = 0 \quad (5.2)$$

$$u_{1x} \operatorname{tg} \alpha_2 - u_{3x} = 0 \quad (5.3)$$

Условия (5.2), (5.3) можно назвать условиями невозмущаемости НГ из-за погрешностей установки.

Для примера рассмотрим НГ в составе ГС, основание которого установлено по экваториальной схеме (см. табл. 1). В этом случае уравнение (5.3) выполнено тождественно. Предположим, что угол  $\alpha_2$  остается малым во время движения НГ (это достигается установкой малого начального угла  $\alpha_2$ ). При этом  $\Delta u_{1x} \sim 0$ ,  $\Delta u_{2x} \approx \Delta\chi_2 \sin \alpha_1 - \Delta\chi_3 \cos \alpha_1$ . Таким образом, погрешности  $\Delta\chi_1, \theta_1, \theta_2$  не влияют на точность гироскопа, установленного по экваториальной схеме.

Влияние погрешностей установки на точность гироскопа было оценено и с помощью программ моделирования, разработанных для персональных компьютеров серии IBM PC. В качестве базовых значений погрешностей были выбраны:  $\Delta\chi_1 = \Delta\chi_2 = \Delta\chi_3 = 1'$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 10'$ ; начальные значения углов  $\alpha_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ) задавались нулевыми. Максимальные значения ошибок для времени моделирования 24 часа и различных схем ориентации основания ГС приведены в табл. 2. Анализ таблицы позволяет заключить, что погрешности установки  $\Delta\chi, \theta$  оказывают наименьшее влияние на гироскоп, для которого основание ГС установлено по экваториальной схеме.

6. Идентификация модели дрейфа НГ методами линейного регрессионного анализа. Рассмотрим динамическую систему вида

$$d\alpha/d\tau = c(\tau, \alpha) + F(\tau, \alpha) p \quad (6.1)$$

где  $\alpha, c(\tau, \alpha)$  — векторы размерности  $(l \times 1)$ ,  $F(\tau, \alpha)$  — матрица размерности  $(l \times k)$ ,  $p$  — вектор идентифицируемых параметров размерности  $(k \times 1)$ . Особенностью системы (6.1) является ее линейность по вектору параметров  $p$ , который подлежит определению.

Сформулируем следующую задачу [7]. Пусть имеется информация о векторе  $\alpha$  в дискретные моменты времени  $\tau_j = j\Delta\tau$ .

$$\alpha^{(j)} = \alpha(\tau_j) \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (6.2)$$

Необходимо по измерениям (6.2) получить оценку  $p^V$  вектора  $p$  системы (6.1). Введем целочисленные параметры  $s \geq 1$  и  $r$ , где  $r$  — целое от деления  $n$  на  $s$ , т. е. количество отрезков длины  $s\Delta\tau$  на интервале длины  $n\Delta\tau$ . Введем также шаг  $\Delta T = s\Delta\tau$  и дискретное время  $T_q = q\Delta T$ . Проинтегрировав систему дифференциальных уравнений (6.1) на отрезке  $[T_{q-1}, T_q]$ , заменим ее системой интегральных уравнений

$$A^{(q)}p = b^{(q)}, \quad A^{(q)} = \int_{T_{q-1}}^{T_q} F(\tau, \alpha) d\tau \quad (6.3)$$

$$b^{(q)} = \alpha^{(qs)} - \alpha^{(qs-s)} - c^{(q)}, \quad c^{(q)} = \int_{T_{q-1}}^{T_q} c(\tau, \alpha) d\tau$$

Для вычисления интегралов в формулах (6.3) используется информация (6.2) о векторе  $\alpha$  в дискретные моменты времени  $\tau_j$ . Составляя блочные матрицы

$$A = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)})^T, \quad b = (b^{(1)}, \dots, b^{(n)})^T$$

приходим к задаче линейной регрессии

$$Ap = b \quad (6.4)$$

Оценка  $p^V$  вектора  $p$  может быть найдена по известной формуле метода наименьших квадратов

$$p^V = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (6.5)$$

Преобразуем уравнения движения НГ (3.1) к виду (6.1). В число идентифицируемых параметров помимо составляющих дрейфа  $m$  включим и погрешности установки  $\Delta\chi, \theta$ ; при этом вектор  $p$  будет иметь вид

$$p = (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, m_{c1}, m_{c2}, \theta_1, \theta_2, \Delta\chi_1, \Delta\chi_2, \Delta\chi_3)^T \quad (6.6)$$

Таким образом  $l = 2, k = 11$ ;  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ ; вектор  $c$  и элементы матрицы  $F$  определяются формулами

$$c(\tau, \alpha) = (-u_{1x}/\cos \alpha_2, -u_{2x})^T \quad (6.7)$$

$$f_{11} = -g_{1x}/\cos \alpha_2, \quad f_{12} = -2g_{1x}g_{3x}/\cos \alpha_2, \quad f_{13} = g_{2x}/\cos \alpha_2$$

$$f_{14} = 2g_{2x}g_{3x}/\cos \alpha_2, \quad f_{15} = 0, \quad f_{16} = -1/\cos \alpha_2, \quad f_{17} = 0$$

$$f_{18} = (u_{3x} - u_{1x} \operatorname{tg} \alpha_2) \cos \alpha_2, \quad f_{19} = -(u_{2z} \cos \alpha_1 + u_{3z} \sin \alpha_1) \operatorname{tg} \alpha_2$$

$$f_{1,10} = u_{1z} \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 + u_{3z}, \quad f_{1,11} = u_{1z} \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - u_{2z}$$

$$f_{21} = -g_{2x}, \quad f_{22} = -2g_{2x}g_{3x}, \quad f_{23} = -g_{1x}, \quad f_{24} = -2g_{1x}g_{3x}, \quad f_{25} = 1, \quad f_{26} = 0$$

$$f_{27} = -u_{3x} + u_{1x} \operatorname{tg} \alpha_2, \quad f_{28} = 0, \quad f_{29} = u_{2z} \sin \alpha_1 - u_{3z} \cos \alpha_1$$

$$f_{2,10} = -u_{1z} \sin \alpha_1, \quad f_{2,11} = u_{1z} \cos \alpha_1$$

Члены порядка  $O(m\Delta\chi), O(m\theta)$  были опущены согласно оценкам, приведенным в п. 5.

Таблица 2

| $\Delta\alpha$ (") | $\Delta\chi \sim 1'$ | $\theta \sim 10'$ |
|--------------------|----------------------|-------------------|
| I                  | 200                  | 1500              |
| II                 | 125                  | 45                |
| III                | 291                  | 1000              |
| IV                 | 120                  | 1700              |

Таблица 3

| $\Delta m$ | $\Delta\chi \sim 1'$ | $\theta \sim 10'$ |
|------------|----------------------|-------------------|
| I          | 0,0069               | 0,044             |
| II         | 0,0079               | 0,0014            |
| III        | 0,014                | 0,14              |
| IV         | 0,004                | 0,046             |

В п. 5 было изучено влияние погрешностей установки  $\Delta\chi$ ,  $\theta$  на точность НГ (см. табл. 2). Изучим теперь влияние погрешностей установки на точность идентификации параметров дрейфа  $m$ . С помощью разработанного программного обеспечения проводилось моделирование уравнений НГ в виде (3.1) с ненулевыми погрешностями установки. Затем осуществлялась идентификация параметров дрейфа  $m$  с помощью формулы (6.5); при этом вектор идентифицируемых параметров  $p$  включал только первые шесть компонент из (6.6). Исходные и вычисленные параметры дрейфа сравнивались и рассчитывались погрешности идентификации  $\Delta m$ . Максимальные значения этих погрешностей для различных схем установки основания ГС приведены в табл. 3 (размерность  $\Delta m$  [град/час]).

Анализ табл. 3 позволяет заключить о существенном влиянии на точность определения параметров уходов НГ погрешностей установки. Для сравнения отметим, что требуемая точность идентификации параметров дрейфа для современных систем ориентации и навигации составляет  $10^{-4}$ – $10^{-5}$  град/час. Кроме того, из табл. 3 следует, что для идентификации параметров дрейфа  $m$  целесообразно проводить испытания гироскопа, у которого основание ГС установлено по экваториальной схеме.

Перейдем к исследованию наблюдаемости параметров дрейфа  $m$  и погрешностей установки  $\Delta\chi$ ,  $\theta$  по результатам испытаний НГ (6.2). Прежде всего отметим, что линейная зависимость столбцов матрицы  $F$  в (6.1) влечет за собой линейную зависимость соответствующих столбцов матрицы  $A$  в (6.4). При этом компоненты вектора  $p$ , для которых соответствующие столбцы матрицы  $A$  линейно зависимы, могут быть определены только в виде некоторой линейной комбинации.

Анализируя элементы матрицы  $F$  в (6.7), приходим к выводу, что последние три столбца этой матрицы, соответствующие погрешностям установки  $\Delta\chi$ , линейно зависимы с коэффициентами  $u_{1\zeta}$ ,  $u_{2\zeta}$ ,  $u_{3\zeta}$ , одновременно не равными нулю ( $|u| = 1$ ):

$$u_{1\zeta}f_{i9} + u_{2\zeta}f_{i10} + u_{3\zeta}f_{i11} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (6.8)$$

Вследствие этого введем новый вектор  $\varepsilon = [u, \Delta\chi]$ , компоненты которого включим в вектор идентифицируемых параметров  $p$  вместо компонент вектора  $\Delta\chi$ :

$$p = (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, m_{c1}, m_{c2}, \theta_1, \theta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T \quad (6.9)$$

При этом соответствующие элементы матрицы  $F$  принимают вид

$$f_{19} = -1, \quad f_{1,10} = -\sin \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2, \quad f_{1,11} = \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (6.10)$$

$$f_{29} = 0, \quad f_{2,10} = -\cos \alpha_1, \quad f_{2,11} = -\sin \alpha_1$$

Согласно определению вектора  $\varepsilon$ , компоненты малого поворота  $\Delta\chi$  могут быть определены только в плоскости, ортогональной вектору угловой скорости Земли  $u$ . Для полярной установки основания ГС  $u_{1\zeta} = u_{2\zeta} = 0$  и могут быть определены только  $\Delta\chi_1 = \varepsilon_2$ ,  $\Delta\chi_2 = -\varepsilon_1$ ; аналогично, для экваториальной установки  $u_{2\zeta} = u_{3\zeta} = 0$ ,  $\Delta\chi_2 = \varepsilon_3$ ,  $\Delta\chi_3 = -\varepsilon_2$ .

Исследуем наблюдаемость параметров дрейфа и погрешностей установки для двух важных случаев ориентации основания ГС — полярной и экваториальной. Именно такие установки используются в системах ориентации и навигации при

построении навигационного трехгранника. В каждой из двух схем установки рассмотрим случаи малых и произвольных углов  $\alpha_1, \alpha_2$ , в результате получаем четыре варианта.

*Вариант 1. Полярная установка основания ГС ( $|\alpha_1|, |\alpha_2| \ll 1$ ).* Наблюдаемы  $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, \varepsilon_3$ ; вместо  $m_{c1}, m_{c2}$  определяются следующие линейные комбинации:

$$m_{c1}' = m_{c1} - \theta_1 - \varepsilon_2, \quad m_{c2}' = m_{c2} - \theta_2 + \varepsilon_1 \quad (6.11)$$

*Вариант 2. Полярная установка основания ГС ( $\alpha_1, \alpha_2$  произвольны).* Наблюдаемы все компоненты вектора  $P$  в (6.9).

*Вариант 3. Экваториальная установка основания ГС ( $|\alpha_2| \ll 1$ ).* Наблюдаемы  $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, m_{c1}, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ; вместо  $m_{c2}$  определяется следующая линейная комбинация:

$$m_{c2}' = m_{c2} + \varepsilon_1 \quad (6.12)$$

*Вариант 4. Экваториальная установка основания ГС ( $\alpha_2$  произволен).* Наблюдаемы все компоненты вектора  $p$  в (6.9) за исключением  $\theta_1, \theta_2$ .

7. Идентификация модели дрейфа НГ с помощью оптимального фильтра Калмана. Анализ результатов испытаний показывает, что неконтактные гироскопы могут иметь нестабильные параметры дрейфа на начальных участках траектории движения. При обработке таких участков методами линейного регрессионного анализа оценки параметров дрейфа получаются с большими погрешностями. В связи с этим рассмотрим алгоритмы идентификации модели уходов НГ с использованием методов оптимальной фильтрации. Применение методов фильтрации имеет и другие преимущества, в частности, возможность уточнения параметров дрейфа по мере поступления экспериментальных данных. Это позволяет использовать оптимальные фильтры в системах обработки информации на борту движущихся объектов в реальном масштабе времени.

Динамическую систему (3.10), моделирующую движение НГ, приведем к виду, удобному для применения фильтра Калмана. Для этого вектор параметров  $p$  в (6.9) расширим добавлением к нему фазовых координат  $\alpha_1, \alpha_2$ . Новый фазовый вектор обозначим через  $X$ :

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, m_{c1}, m_{c2}, \theta_1, \theta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad (7.1)$$

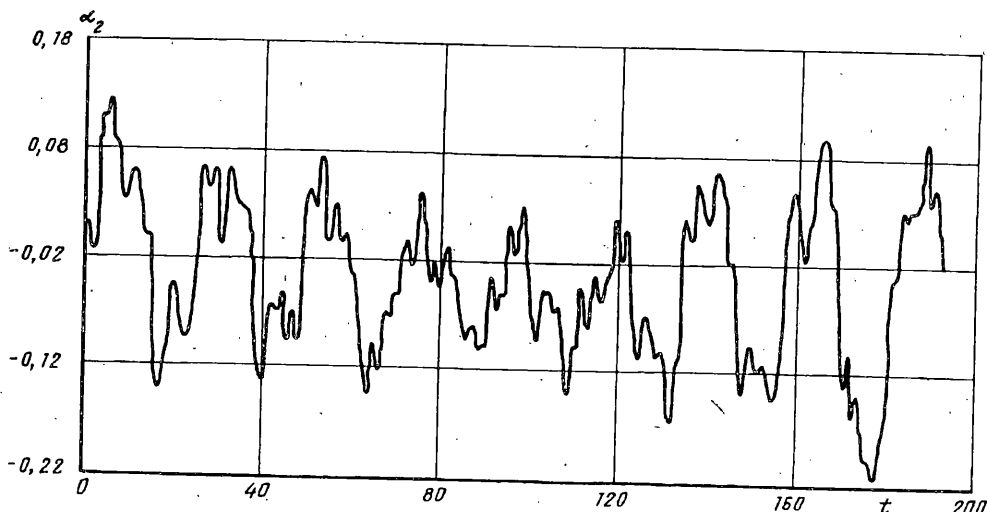
Динамическая система (3.1) примет вид

$$dX/d\tau = \Phi(\tau, \alpha) X + Z(\tau, \alpha), \quad Y = HX + v \quad (7.2)$$

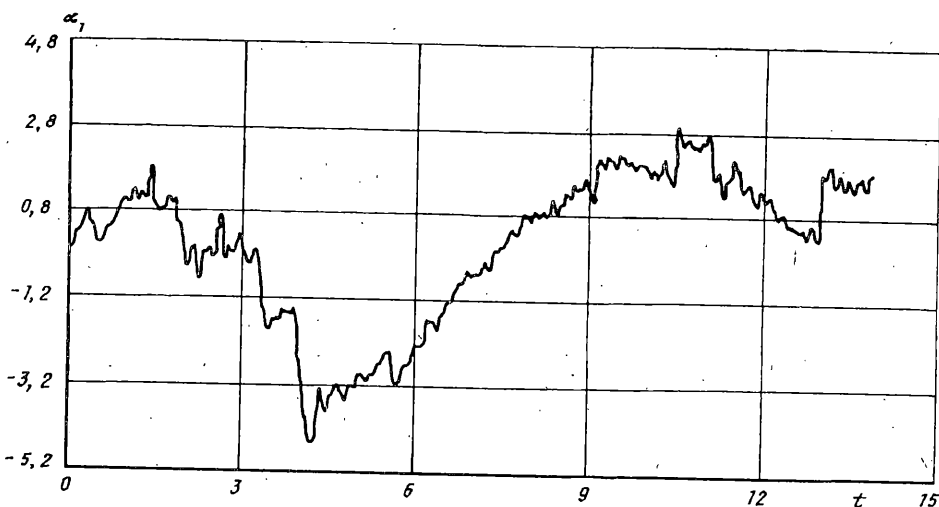
$$\Phi(\tau, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & F(\tau, \alpha) \\ 0 & 0 & | & \\ \hline 0 & 0 & | & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & | & \dots \dots 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \quad Z(\tau, \alpha) = \left( -\frac{u_{1x}}{\cos \alpha_2}, -u_{2x}, 0, \dots, 0 \right)^T \quad (7.3)$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad v = (v_1, v_2)^T, \quad \text{cov}(v, v) = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}$$

Матрица  $F$  задается формулами (6.7), (6.10);  $Y$  — вектор измерений;  $v_1, v_2$  — некоррелированные белые шумы с нулевыми средними значениями и дисперсией  $\sigma_v^2$ ; средноквадратическое отклонение  $\sigma_v$  характеризует шумы системы сема информации об углах  $\alpha_1, \alpha_2$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Динамическая система (7.2) в строгом смысле слова не является линейной, поскольку матрица  $\Phi$  и вектор  $Z$  зависят нелинейным образом от части компонент вектора  $X$  (вектора  $\alpha$ ). Однако для их вычисления можно воспользоваться экспериментальными данными (6.2). В этом случае матрицу  $\Phi$  и вектор  $Z$  можно считать заданными функциями времени, и мы приходим к линейной задаче оценивания. Программная реализация оптимального фильтра Калмана выполнена с помощью корня квадратного из матрицы.

Для сравнения алгоритмов и программ, разработанных с помощью двух приведенных в данной работе методов идентификации, было выполнено моделирование алгоритмов оценивания с постоянными параметрами дрейфа и параметрами, которые на начальном участке изменялись по закону

$$m(\tau) = m_0 e^{-k\tau} + m_* (1 - e^{-k\tau}) \quad (7.4)$$

Здесь  $k$  — параметр, характеризующий время затухания переходных процессов;  $m_0, m_*$  — начальное и установившееся значения систематического дрейфа. Мо-



делирование показало, что при стабильных параметрах дрейфа оба используемых метода идентификации имеют потенциальную точность на уровне машинной точности используемой ЦВМ ( $\sim 10^{-6}$  град/час). Если же параметры дрейфа нестабильны, алгоритмы фильтрации существенно превосходят по точности алгоритмы регрессионного анализа. При этом алгоритмы линейной регрессии имеют ошибки в определении параметров дрейфа порядка единиц и десятков градусов в час (в зависимости от параметра  $k$ ). Алгоритмы оптимальной фильтрации позволяют оценить установившиеся параметры дрейфа  $m_*$  с точностью порядка  $10^{-4} - 10^{-5}$  град/час.

8. Примеры обработки результатов стендовых испытаний НГ. На фиг. 1, 2 показаны графики ошибок  $\Delta\alpha$ , представляющих собой отклонение расчетной траектории движения НГ от экспериментальной. Расчетные траектории были построены путем моделирования уравнений (3.1), при этом параметры дрейфа находились по экспериментальным данным с помощью методов и алгоритмов, описанных в данной работе. По оси абсцисс задано время в часах, по оси ординат — отклонения  $\Delta\alpha$  в угловых минутах. На фиг. 1 приведены результаты по обработке испытаний электростатического гироскопа, установленного по экваториальной схеме; на фиг. 2 — электромагнитного гироскопа, установленного по полярной схеме.

Авторы признательны научным группам Б. Е. Ландау (С.-Петербург), В. И. Галкина (Москва), В. И. Гришина (Ижевск), любезно предоставивших экспериментальные данные по испытаниям неконтактных гироскопов для отладки и опытной эксплуатации разработанного программного обеспечения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
2. Денисов Г. Г., Комаров В. Н. Неконсервативные моменты и их влияние на прецессию неконтактного гироскопа//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 15—23.
3. Лукьянов Д. П., Мочалов А. В., Одинцов А. А., Вайсгант Н. Б. Инерциальные навигационные системы морских объектов. Л.: Судостроение, 1989. 183 с.
4. Климов Д. М., Руденко В. М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 214 с.
5. Shengcai L., Guangyu W., Hengzhang H., Guangxiang W. Development and prospect of inertial test turntable//1<sup>st</sup> Intern. Sympos. on Inertial Technology. China, Beijing, 1989. P. 303—313.
6. Линьков Р. В., Урман Ю. М. Уход неконтактного гироскопа в окрестности оси мира//Изв. вузов. Приборостроение. 1982. Т. 25. № 4. С. 56—59.
7. Губаренко С. И., Кузьменко В. Г. Восстановление модели дрейфа гироскопа с неконтактным подвесом по результатам испытаний.//Сб. науч. тр. Моск. энерг. ин-та. 1989. № 217. С. 62—69.

Москва

Поступила в редакцию  
19.V.1993