МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 531.01

 А. В. МОИСЕЕВ, А. И. НЕЙШТАДТ

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЭЛЕЯ

Известная система Лоренца в пределе больших чисел Рэлея является возмущением интегрируемой системы с одной вращающейся фазой, и ее динамика может быть описана с помощью метода усреднения. Построены фазовые портреты соответствующей усредненной системы и описаны их бифуркации.

Система Лоренца возникает как галеркинская аппроксимация в задаче Рэлея — Бенара о конвекции в подогреваемом слое жидкости [1]. Точно такая же система возникает в некоторых модельных задачах физики лазеров [2], гидродинамики [3], динамики гироскопов [4]. Обзор некоторых работ, посвященных системе Лоренца, содержится в [5].

В. И. Юдовичем [1] показано, что при больших значениях одного из параметров системы (который в соответствии с первоначальной гидродинамической интерпретацией называется числом Рэлея) система Лоренца может рассматриваться как малое возмущение интегрируемой системы с одной вращающейся фазой и, следовательно, может исследоваться с помощью метода усреднения [6]. Найдены все положения равновесия усредненной системы. Случай больших чисел Рэлея рассматривался также в [5], [7—9].

Усредненная система — это система двух дифференциальных уравнений. Основная подготовительная информация, необходимая для полного исследования этой системы, содержится в цитируемой выше работе В. И. Юдовича; в [10] фазовые портреты строились численно для некоторых значений параметров.

В публикуемой работе указаны все возможные типы фазовых портретов усредненной системы и описаны их бифуркации при изменении параметров. Рассматривается также вопрос о связи решений точной и усредненной систем.

1. Система Лоренца. Наиболее известен следующий вид системы Лоренца:

$$\dot{\xi} = -\sigma(\xi - \eta), \quad \dot{\eta} = -\xi\zeta + r\xi - \eta, \quad \dot{\zeta} = \xi\eta - b\zeta \tag{1.1}$$

где σ, b, r — положительные параметры, r — число Рэлея.

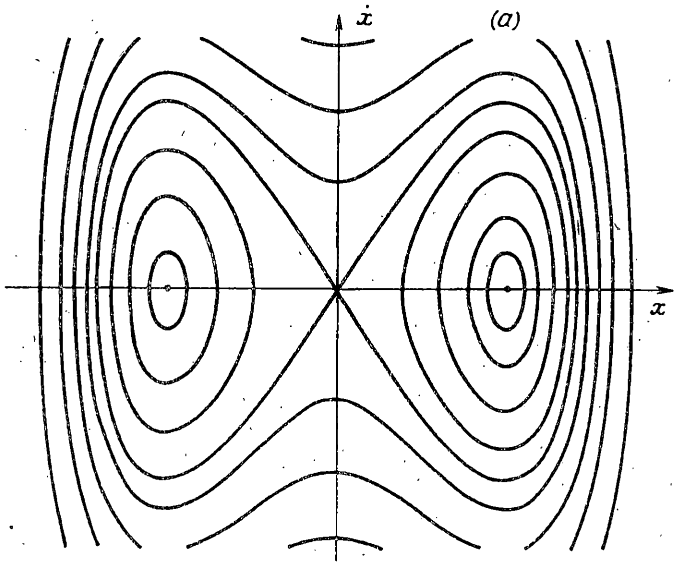
Замена переменных $x = (\mu/\sqrt{2\sigma})\,\xi$, $y = \dot{x}$, $q = \mu^2(\sigma\zeta - \tfrac{1}{2}\xi^2)/\sigma$, $t = \mu t_r/\sqrt{\sigma}$ приводит систему Лоренца к следующему виду, впервые указанному в работе В. И. Юдовича:

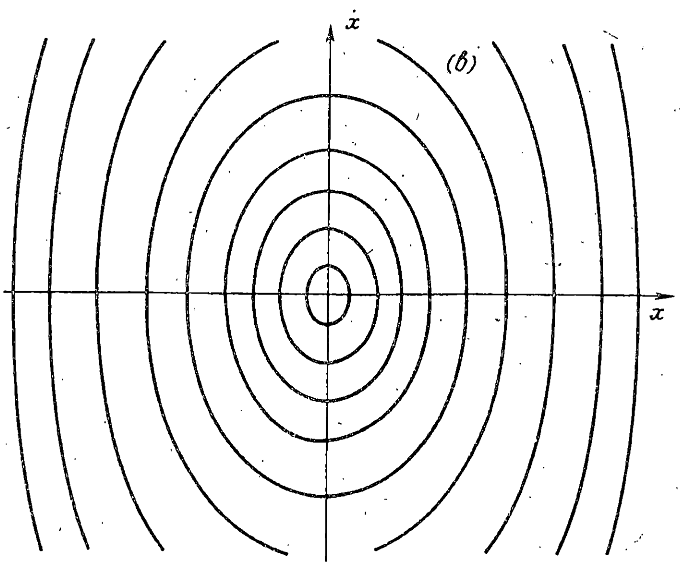
$$\ddot{x} = (1 - q)x - x^3 - \mu\gamma\dot{x} \tag{1.2}$$

$$\dot{q} = \mu(-\alpha q + \beta x^2)$$

Здесь $\mu = 1/\sqrt{r-1}$, $\gamma = (\sigma+1)/\sqrt{\sigma}$, $\alpha = b/\sqrt{\sigma}$, $\beta = (2\sigma - b)/\sqrt{\sigma}$, точка обозначает теперь производную по новому времени t_r (индекс у времени в дальнейшем опускается). Ниже рассматривается случай больших r, т. е. малых μ; тогда члены порядка μ в (1.2) можно рассматривать, как малое возмущение.

[1] См.: *Юдович В. И.* Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Рэлея. Ростов н/Д, 1978. 49 с.— Деп. в ВИНИТИ 18.05.78, N2611-78.





Фиг. 1

2. Невозмущенная и усредненная системы. Положив в (1.2) $\mu = 0$, получим невозмущенную систему

$$\ddot{x} = (1 - q)\,x - x^3, \qquad q = \text{const} \tag{2.1}$$

Уравнение для x описывает движение в потенциале $U = (q - 1)\,x^2/2 + x^4/4$, полная энергия $H = \dot{x}^2/2 + U$. Фазовый портрет системы (2.1) приведен на фиг. 1, a для $q < 1$ и на фиг. 1, b для $q \geq 1$. Система имеет следующие решения: для $H > 0$:

$$x = x_1 \operatorname{cn}\left(\left(\tfrac{1}{2}\,(x_1^2 - x_2^2)\right)^{1/2} t,\, k\right), \qquad k^2 = \frac{x_1^2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{(1 - q) + p}{2p}$$

для $H < 0$:

$$x = x_1 \operatorname{dn}(1/2\, x_1 t, k), \qquad k^2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2} = \frac{2p}{(1-q)+p}$$

где $x_{1,2}^2 = (1-q) \pm p$, $p = ((1-q)^2 + 4H)^{1/2}$

В системе Лоренца переменные H, q меняются медленно:

$$\dot H = -\mu\gamma \dot x^2 + 1/2\, x^2 \dot q, \quad \dot q = \mu(-\alpha q + \beta x^2) \tag{2.2}$$

Для приближенного описания изменения H, q метод усреднения [7] предписывает усреднить правые части соотношений (2.2) по фазе невозмущенного движения

$$\dot h = \frac{1}{T}\int_0^T \left[-\mu\gamma\dot x^2 + \frac{x^2}{2}\mu(-\alpha q + \beta x^2)\right] dt$$

$$\dot q = \frac{1}{T}\int_0^T \mu(-\alpha q + \beta x^2)\, dt$$

где x — решение невозмущенной системы (2.1) с энергией $H = h$, а T — период этого решения (при $h < 0$ есть два таких решения, соответствующие двум ямам потенциала U, но из-за симметрии задачи усредненная система одна и та же для обеих ям). Вычисления дают следующий явный вид усредненной системы (см. работу, цитированную на стр. 23):

при $h > 0$:

$$\dot h = \mu\frac{1-q}{2k^2-1}\Big\{ -\alpha q\,[z + k^2 - 1] + \frac{2}{3}(1-q)\,[z + k^2 - 1]\,[2\beta - \gamma] + \frac{2}{3}(1-q)\frac{k^2(1-k^2)}{2k^2-1}[\beta - 2\gamma]\Big\} \tag{2.3}$$

$$\dot q = \mu\Big\{ -\alpha q + 2\beta\frac{1-q}{2k^2-1}[z + k^2 - 1]\Big\}$$

при $h < 0$:

$$\dot h = \mu\frac{1-q}{2-k^2}\Big\{ -\alpha q z + \frac{2}{3}(1-q)[2\beta - \gamma]z - \frac{2}{3}(1-q)\frac{1-k^2}{2-k^2}[\beta - 2\gamma]\Big\} \tag{2.4}$$

$$\dot q = \mu\Big\{ -\alpha q + 2\beta\frac{1-q}{2-k^2}z\Big\}$$

где $z = E/K$, а K и E — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода с модулем k.

При $h = 0$ (на сепаратрисе) правые части усредненной системы доопределяются по непрерывности $\dot h = 0$, $\dot q = -\mu\alpha q$.

Фазовое пространство усредненной системы склеено из полуплоскости $h > 0$, прямой $h = 0$ (сепаратрисы) и области $q < 1$, $-(q-1)^2/4 < h < 0$. Решение усредненной системы с заданными начальными условиями в рассматриваемом фазовом пространстве не единственно, так как решения систем (2.3) и (2.4) выходят на сепаратрису ($h = 0$) и сходят с нее за конечное время (см. ниже *п.* 5), а линия $h = 0$ инвариантна. Будем отбрасывать решения, для которых $h = 0$ на открытом интервале по времени. При таком ограничении решение усредненной системы с заданными начальными условиями существует и единственно. Ниже исследуется усредненная система. Связь решений точной и усредненной систем обсуждается в *п.* 8.

3. Положения равновесия усредненной системы. В основополагающей работе, цитируемой на стр. 23, найдены все положения равновесия усредненной системы Лоренца и исследована их устойчивость. Показано, что на плоскости параметров (b, σ) в области $b > 3/2\,\sigma - 1/2$ существует устойчивое положение равновесия, соответствующее минимумам потенциала (оно лежит на границе области определения системы и выглядит на фазовом портрете как «половина» устойчивого узла). При $b = 3/2\,\sigma - 1/2$ происходит рождение двух положений равновесия в точке $q = 0$, $h = 0$. При $\sigma - 1 < b < 3/2\,\sigma - 1/2$ устойчивое положение равновесия типа фокус лежит в области $h > 0$, а неустойчивое положение равновесия типа седло лежит в области $h < 0$. При $b = \sigma - 1$ неустойчивое положение равновесия типа седло исчезает, сливаясь с положением равновесия, соответствующим минимумам потенциала. После этой бифуркации, при $b < \sigma - 1$, положение равновесия, соответствующее минимумам потенциала, становится неустойчивым (на портрете оно выглядит как половина седла).

4. Предельные циклы. Пусть $I = I(h, q)$, φ — переменные действие — угол невозмущенной системы. Обозначим $J = I$ для $h > 0$, $J = 2I$ для $h < 0$. Функцию J можно доопределить по непрерывности при $h = 0$. При этом величины $\dot J$, $\dot q$ тоже оказываются непрерывными (это видно из асимптотических формул (5.1), см. ниже *п.* 5). Якобиан преобразования $(x, y, q) \to (J, \varphi, q)$ равен 1 при $h > 0$ и равен 2 при $h < 0$.

Система Лоренца сжимает элемент фазового объема $dxdydq$, так как $\operatorname{div} \mathrm{u} = -\mu(\gamma + \alpha) < 0$, где $\mathrm{u} = (\dot x, \dot y, \dot q)$. Поэтому усредненная система сжимает элемент фазового объема $dJdq$. Действительно, исходная система в переменных J, q, φ имеет вид:

$$\dot J = \mu f_1(J, q, \varphi), \quad \dot q = \mu f_2(J, q, \varphi), \quad \dot\varphi = \omega(J, q) + \mu f_3(J, q, \varphi)$$

где $f_{1,2,3}$ имеют период 2π по φ. Тогда усредненная система выглядит следующим образом:

$$\dot J = \mu \frac{1}{2\pi} \oint f_1(J, q, \varphi)\, d\varphi, \quad \dot q = \mu \frac{1}{2\pi} \oint f_2(J, q, \varphi)\, d\varphi$$

Обозначим $\mathrm{w} = (\dot J, \dot q)$. Тогда

$$\operatorname{div} \mathrm{w} = \mu \frac{1}{2\pi} \oint \left(\frac{\partial f_1(J, q, \varphi)}{\partial J} + \frac{\partial f_2(J, q, \varphi)}{\partial q} \right) d\varphi =$$

$$= \mu \frac{1}{2\pi} \oint \left(\frac{\partial f_1(J, q, \varphi)}{\partial J} + \frac{\partial f_2(J, q, \varphi)}{\partial q} + \frac{\partial f_3(J, q, \varphi)}{\partial \varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \mu \frac{1}{2\pi} \oint \operatorname{div} \mathrm{u}\, d\varphi = -\mu(\gamma + \alpha) < 0$$

Таким образом, элемент фазового объема $dJdq = (dJ/\partial h)\, dhdq$ сжимается при $h \neq 0$. При переходе траекторий через линию $h = 0$ фазовый объем $dJdq$ мог бы измениться скачком, но этого не происходит ввиду непрерывности $\dot J$, $\dot q$. Поэтому усредненная система сжимает фазовый объем $dJdq$ всюду. Следовательно, усредненная система не имеет предельных циклов.

5. Поведение системы в окрестности сепаратрисы. В окрестности сепаратрисы системы (2.3) и (2.4) в главном приближении совпадают и имеют следующий вид (за исключением точки $q = 1$):

$$-\dot h \ln \varkappa = \mu(1 - q)(-2\alpha q + 4/3\,(1 - q)[2\beta - \gamma]) + \mu O(h \ln |h|) \tag{5.1}$$

$$\dot q = \mu(-\alpha q - 4\beta(1 - q)/\ln \varkappa) + \mu O(h), \quad \varkappa = \frac{|h|}{16(1 - q)^2}$$

Правая часть первого уравнения при $h=0$ обращается в ноль только в точке

$$q = q_0 = \frac{2\,[2\beta - \gamma]}{2\,[2\beta - \gamma] + 3\alpha}$$

Значит, траектории усредненной системы пересекают сепаратрису во всех точках, кроме q_0. Второе уравнение при $h=0$ имеет вид $\dot q = -\mu\alpha q$. Правая часть обращается в ноль при $q=0$. Поэтому, если $q_0 \neq 0$ (т. е. $2\beta \neq \gamma$), то траектории касаются сепаратрисы в точке q_0. Во всех точках сепаратрисы, кроме точки q_0, касание траектории и сепаратрисы логарифмическое, $dh/dq \sim 1/\ln|h|$, в точке $q_0 \neq 0$ касание близко к обычному квадратичному, $dh/dq \sim (q - q_0)/\ln|h|$. Траектории выходят на сепаратрису и сходят с нее за конечное время.

Рассмотрим особенность, возникающую на сепаратрисе при бифуркационном значении параметров $2\beta = \gamma$. В этом случае в окрестности особой точки $q=h=0$ система (2.3), (2.4) перепишется в виде

$$\dot h = \mu\left(\frac{2\alpha q}{\ln(|h|/16)} - 2\beta h\right) + \mu O\left(\frac{q^2}{|\ln|h||} + |hq| + h^2\right) \tag{5.2}$$

$$\dot q = \mu\left(-aq - \frac{4\beta}{\ln(|h|/16)}\right) + \mu O\left(|h| + \left|\frac{q}{\ln|h|}\right|\right)$$

Фазовый портрет системы (5.2) в окрестности особой точки $q=0$, $h=0$ имеет вид, показанный на фиг. 2, *b* (см. ниже *п.* 7). Это следует из анализа поля направлений (5.2) и оценок для этого поля. Проходящая через особую точку $q=h=0$ траектория на фиг. 2, *b* имеет уравнение $h = -\frac{1}{4}(\alpha/\beta)\,q^2 + o(q^2)$. Эта траектория входит в особую точку и выходит из нее за конечное время.

Точка $q=1$, $h=0$ не является особой, так как в ней $\dot q = -\mu\alpha$.

6. Поведение системы при больших h, q. В работе, цитированной на стр. 23, доказано, что для $\beta \leq 0$ все решения стремятся к положению равновесия. Покажем, что система не имеет решений, уходящих на бесконечность, и для $\beta > 0$.

Рассмотрим область $h>0$, $q>1$ $(0<k^2<\frac{1}{2})$. Выражая в первом уравнении (2.3) α, β, γ через первоначальные параметры σ, b, получим

$$\dot h = \mu\frac{-2}{3\sqrt{\sigma}}((1-q)^2 + 4h)^{1/2}\left\{3\sigma\,[z + k^2 - 1]\,(q-1) + \frac{3}{2}\,b\,[z + k^2 - 1]\right\} +$$

$$+ \mu\frac{-2}{3\sqrt{\sigma}}((1-q)^2 + 4h)^{1/2}\left\{\frac{(1-k^2)}{1-2k^2} - z\right\}(1 + b/2)\,(q-1)$$

Выражения в фигурных скобках больше 0, так как $z + k^2 - 1 > 0$ (доказано в работе, цитируемой на стр. 000) и $(1-k^2)/(1-2k^2) > 1 > z$ для $0<k^2<\frac{1}{2}$. Поэтому $\dot h < 0$. Поскольку при $h \ll q$ имеем $\dot q \approx -\mu\alpha q < 0$, то в области $h>0$, $q>0$ нет решений, уходящих на бесконечность.

Рассмотрим область $h>0$, $q<-1$. Из второго уравнения системы (2.3) получим

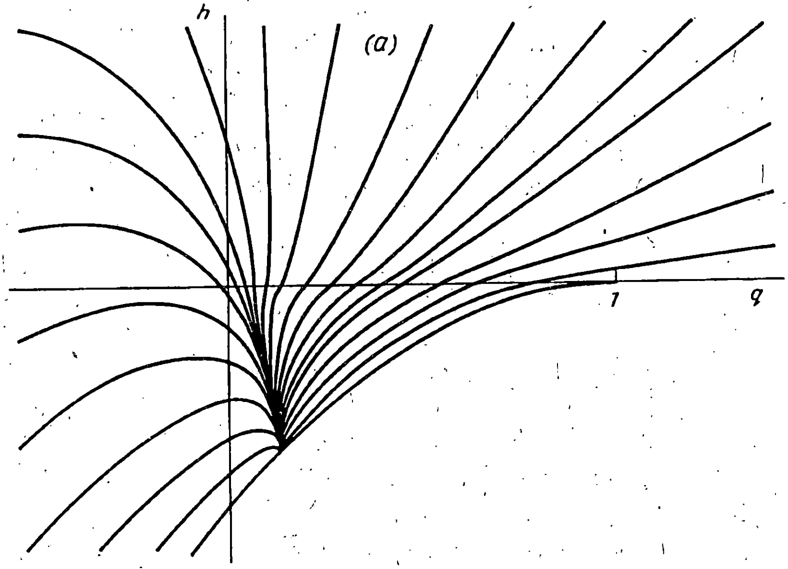
$$\dot q = \mu\,(-\alpha q + 2\beta\,((1-q)^2 + 4h)^{1/2}\,[z + k^2 - 1]) > \mu\alpha > 0$$

причем решение достигает $q=-1$ за конечное время.

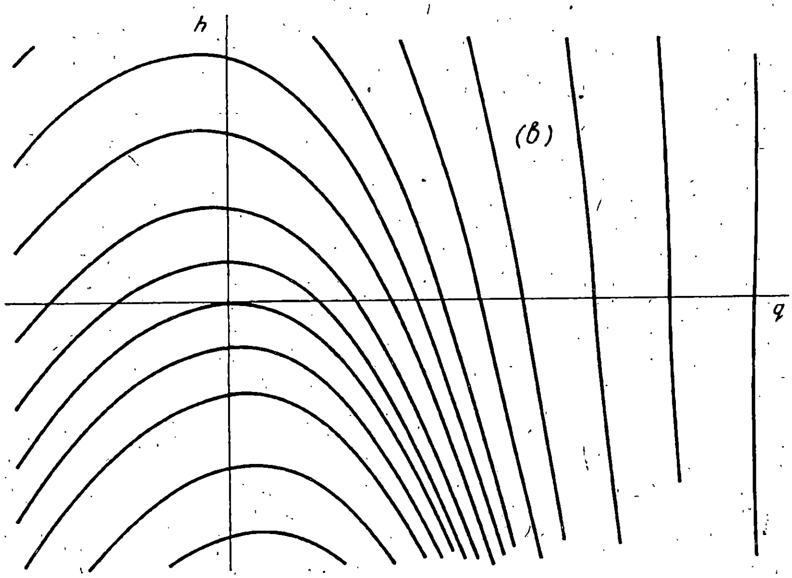
Рассмотрим $h > h_0 \gg 1 > |q|$. Здесь $\dot h = -\frac{2}{3}\mu\,[2\gamma - \beta]\,h + O(\sqrt{h}) < 0$, так как $2\gamma - \beta = (2+b)/\sqrt{\sigma} > 0$.

Рассмотрим область $h<0$, $q<-1$. Покажем, что всегда $\dot q > 0$:

$$\dot q = \mu\left(-\alpha q + 2\beta\frac{1-q}{2-k^2}\,z\right) > \mu\alpha > 0$$



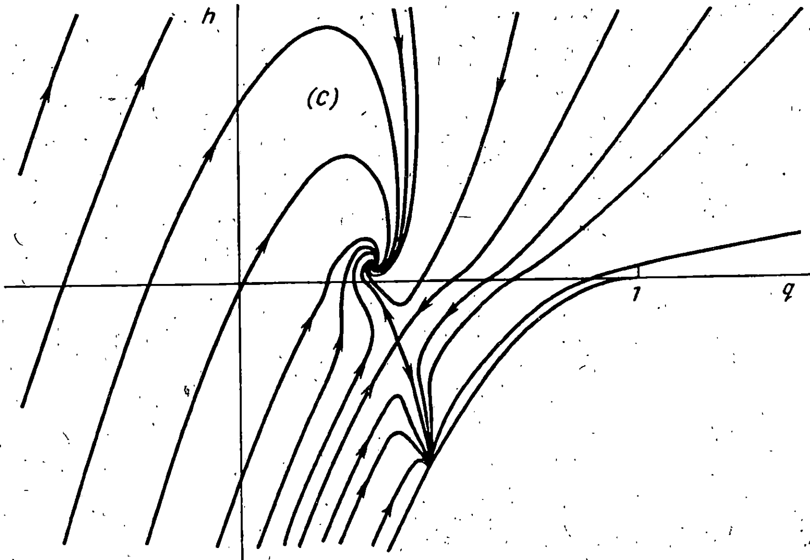
Фиг. 2(a)



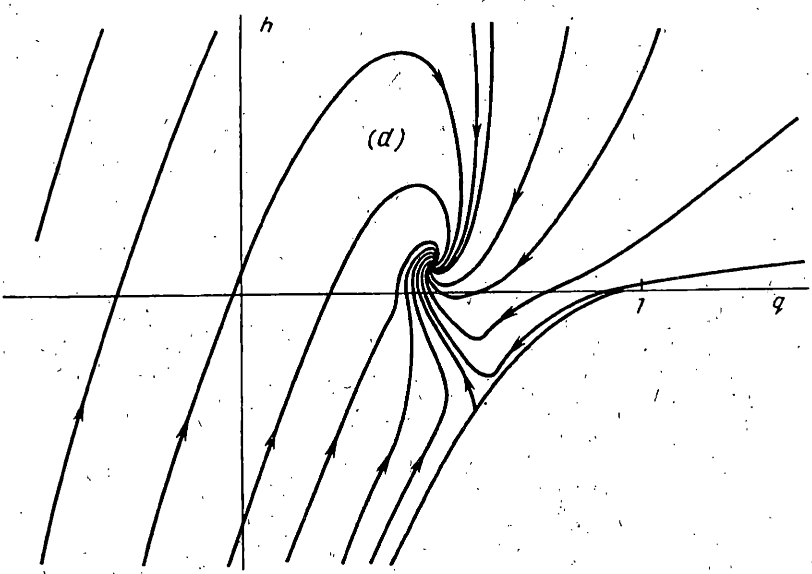
Фиг. 2(b)

Значит, решения достигают $q = -1$ за конечное время. Таким образом, все решения попадают в область $-1 < h < h_0$, $|q| < 1$ и, следовательно, стремятся к положениям равновесия.

7. Фазовые портреты. Приведенная информация об особых точках системы, об отсутствии предельных циклов и о поведении системы на бесконечности и на сепаратрисе позволяет построить фазовые портреты системы при всех значениях параметров. Они показаны на фиг. 2, *a* для $b > 3/2\,\sigma - 1/2$, на фиг. 2, *b* для $b = 3/2\,\sigma - 1/2$ в окрестности точки $h = q = 0$, на фиг. 2, *c* для $\sigma - 1 < b < 3/2\,\sigma - 1/2$, на фиг. 2, *d* для $b \leq \sigma - 1$.



Фиг. 2(c)



Фиг. 2(d)

8. Связь решений точной и усредненной систем. Исходя из поведения решений усредненной системы можно достаточно полно представить движение в исходной системе (1.2). Положениям равновесия усредненной системы соответствуют периодические решения или положения равновесия (для $h = -(1-q)^2/4$) исходной системы [6]. Вдали от сепаратрисы решения усредненной системы описывают движение в исходной системе с точностью $O(\mu)$ на временах $O(1/\mu)$. В рассматриваемой задаче многие решения пересекают сепаратрису. Решение усредненной системы, пересекающее сепаратрису общим образом (около сепаратрисы $|\dot{h}| > \mu C_1^{-1}/|\ln|h||$) описывает эволюцию медленных переменных в исходной системе при тех же начальных значениях с точностью не хуже, чем $C_2\mu\ |\ln\mu|$ на временах $O\ (l/\mu)$, если исключить множество начальных данных меры μ^r [11]. Здесь C_1, r — любые положительные постоянные, $C_2 = C_2\ (C_1, r)$. В рассматриваемой задаче эта оценка справедлива без ограничения по времени, при $0 < t < \infty$, для решений, проходящих не слишком близко (на расстоянии больше, чем $C_3^{-1} > 0$ — любая постоянная) от неустойчивых равновесий усредненной системы. Действительно, такие решения усредненной системы за время $\sim 1/\mu$, приближаются к ее устойчивым равновесиям, которые сами с точностью $O\,(\mu)$ приближают периодические решения исходной системы; требуемая оценка теперь вытекает из [6] (стр. 379).

При $h < 0$ паре h, q соответствуют две траектории невозмущенной системы, отвечающие двум ямам потенциала U (фиг. 1, a). Для исходной системы начальные условия, приводящие к попаданию в разные ямы после перехода через сепаратрису, перемешаны при малых μ. Согласно [11], при переходе через сепаратрису попадания в разные ямы равновероятны в том смысле, что в малом шаре начальных условий x, $\dot{x}$, q (вдали от сепаратрисы) отношение мер множеств начальных условий, приводящих к попаданию в разные ямы, стремится к 1 при $\mu \to 0$.

Авторы благодарят В. И. Юдовича за обсуждение работы. Работа частично поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований (93-013-16244, 94-01-00512).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow.//J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. № 2. P. 130—141.
2. *Басов Н. Г., Морозов В. Н., Ораевский А. Н.* К теории динамики одномодового квантового генератора//Квант. электроника. 1974. Т. 1. № 10. С. 2264—2274.
3. *Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А.* Нелинейные системы гидродинамического типа. М.: Наука. 1974. 160 с.
4. *Глуховский А. Б.* Нелинейные системы, являющиеся суперпозициями гиростатов.//Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 4. С. 816—820.
5. *Sparrow C.* The Lorenz equation. Berlin: Springer, 1982. 269 p.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
7. *Robbins K. A.* Periodic solutions and bifurcations structure at high R in the Lorenz model.//SIAM J. Appl. Math. 1979. V. 36. № 3. P. 457—472.
8. *Морозов А. Д.* Системы, близкие к нелинейным интегрируемым. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1983. 96 с.
9. *Покровский Л. А.* Решение системы Лоренца в асимптотическом пределе большого числа Рэлея.// Теорет. и мат. физика. 1985. Т. 62. № 2. С. 272—290.
10. *Петровская Н. В., Прокофьева О. В.* Качественное исследование осредненной системы Лоренца.// Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1983. № 4. С. 30—31.
11. *Neishtadt A. I.* Probability phenomena due to separatrix crossing.//Chaos. 1991. V. 1. № 1. P. 42—48.

Москва

Поступила в редакцию
29.XI.1993