МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. В. Д. ПОТАПОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЧТИ НАВЕРНОЕ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Вопросам устойчивости вязкоупругих конструкций, находящихся под действием сжимающих нагрузок, являющихся стационарными случайными процессами, посвящены работы [1—5]. Получены критерии устойчивости стержней в среднеквадратичном [1, 3—5] и почти наверное в [2] в том случае, когда стационарный процесс представляет собой гауссовский белый шум. Общие вопросы устойчивости стохастических систем обсуждаются в работах [11, 12], а упругих систем — в [13—16].

В настоящей работе исследуется устойчивость по вероятности прямолинейного положения равновесия вязкоупругого стержня при действии на него продольной силы в виде широкополосного случайного стационарного процесса.

Поперечные колебания такого стержня описываются уравнением

$$m\ddot{w} + k\dot{w} + EI(1 - \mathrm{R})\, w^{\mathrm{IV}} + [F_0 + F(t)]\, w'' = 0 \qquad (1)$$

Здесь F_0, $F(t)$ — постоянная во времени и случайная составляющие продольной силы, $\langle F(t)\rangle = 0$. Угловыми скобками обозначено усреднение по множеству реализаций

$$\mathrm{R}z = \int_0^t R(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau, \quad 0 \le \int_0^\infty R(\theta)\, d\theta < 1$$

Остальные обозначения общепринятые.

В дальнейшем будем считать функцию $F(t)$ стационарной, эргодической и интегрируемой.

Решение уравнения (1) должно удовлетворять начальным и краевым условиям.

Рассмотрим возмущение начальных условий в виде

$$w(0, x) = w_{0n} \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \dot{w}(0, x) = v_{0n} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

Тогда решение уравнения (1) ищется также в виде

$$w(t, x) = w_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x$$

Амплитуда прогиба стержня является решением стохастического интегродифференциального уравнения

$$\ddot{w}_n + 2\varepsilon^*\dot{w}_n + \omega_n^2\,[(1 - \mathrm{R}) - (\alpha_{0n} + \alpha_n)]\, w_n = 0 \qquad (2)$$

причем

$$\omega_n^2 = \frac{n^4\pi^4 EI}{ml^4}, \quad 2\varepsilon^* = \frac{k}{m}, \quad \alpha_{0n} = \frac{F_0 l^2}{n^2\pi^2 EI}, \quad \alpha_n = \frac{Fl^2}{n^2\pi^2 EI}$$

Допустим, что ядро релаксации материала $R(t-\tau)$ представимо суммой экспонент

$$R(t-\tau)=\sum_{l=1}^{k}\varkappa_l^* L_l \exp\left[-\varkappa_l^*(t-\tau)\right]$$

Используя обозначения

$$(x_{2+l})_n=\int_0^t \varkappa_l^* L_l \exp\left[-\varkappa_l^*(t-\tau)\right] w_n(\tau)\,d\tau$$

и вводя безразмерное время $\zeta=\omega t$ $(\omega=\omega_1)$ запишем уравнения (2) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathrm{x}_n'=\mathrm{A}_n\mathrm{x}_n+\alpha_n n^4\mathrm{B}\mathrm{x}_n \tag{3}$$

Здесь штрихом обозначена производная по ζ:

$$\mathrm{A}_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ -n^4(1-\alpha_{0n}) & -2\varepsilon & n^4 & \dots & n^4\\ \varkappa_1 L_1 & 0 & -\varkappa_1 & \dots & 0\\ \dots & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \varkappa_k L_k & 0 & 0 & \dots & -\varkappa_k \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\qquad \mathrm{x}_n=\begin{bmatrix} x_{1n}\\ x_{2n}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{2+kn} \end{bmatrix}$$

$$x_{1n}'=x_{2n},\quad \varepsilon=\varepsilon^*/\omega,\quad \varkappa_l=\varkappa_l^*/\omega$$

Корни характеристического уравнения

$$|\mathrm{A}_n-\lambda\mathrm{E}|=0 \tag{4}$$

могут быть комплексно сопряженными $\lambda_{2j-1}=\sigma_j+i\mu_j$, $\lambda_{2j}=\sigma_j-i\mu_j$ $(j=1,2,\dots,q)$ и действительными λ_l $(l=2q+1,\dots,k+2)$, где σ_j, μ_j, λ_l — действительные числа, $i=\sqrt{-1}$.

Если корни уравнения (4) являются простыми, а в дальнейшем ограничимся рассмотрением только такого случая, то соответствующие найденным характеристическим членам собственные векторы записываются следующим образом [6]: $\mathrm{v}_{2j-1}=\mathrm{x}_j+i\mathrm{z}_j$, $\mathrm{v}_{2j}=\mathrm{x}_j-i\mathrm{z}_j$, $\mathrm{v}_l=\mathrm{x}_l$. Составим из этих векторов матрицу $\mathrm{V}_n=[\mathrm{x}_1,\mathrm{z}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{z}_2,\dots,\mathrm{x}_q,\mathrm{z}_q,\mathrm{x}_{2q+1},\dots,\mathrm{x}_{2+k}]$, с помощью которой введем новые переменные в уравнении (3):

$$\mathrm{y}_n=\mathrm{V}_n^{-1}\mathrm{x}_n$$

Заметим, что такие переменные часто используются в теории устойчивости движения [7]. Тогда

$$\mathrm{y}_n'=\mathrm{L}_n\mathrm{y}_n+\alpha_n n^4\mathrm{V}_n^{-1}\mathrm{B}\mathrm{V}_n\mathrm{y}_n \tag{5}$$

причем

$$\mathrm{L}_n=\mathrm{V}_n^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{V}_n$$

Известно, что матрица L_n является квазидиагональной [6], на главной диагонали которой располагаются либо матрицы вида

$$L_{jn} = \begin{bmatrix} \sigma_j & \mu_j \\ -\mu_j & \sigma_j \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, q)$$

либо собственные значения λ_l, $l = 2q + 1, \ldots, k + 2$.

Определим норму вектора y_n таким образом

$$\|y_n\| = (y_n^T y_n)^{1/2}$$

Эта норма эквивалентна в прежних обозначениях неизвестных функции Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы $x_n^T (V_n^{-1})^T V_n^{-1} x_n$.

Найдем производную $\|y_n\|^2$ в силу уравнений возмущенного движения (5):

$$\frac{d}{d\zeta} \|y_n\|^2 = y_n^T \{(L_n + L_n^T) + \alpha_n n^4 [(V_n^{-1}) BV_n + V_n^T B^T (V_n^{-1})^T]\} y_n \tag{6}$$

Верхний индекс (T) обозначает транспонирование матрицы.

Поскольку

$$L_{jn} + L_{jn}^T = \begin{bmatrix} 2\sigma_j & 0 \\ 0 & 2\sigma_j \end{bmatrix}$$

то матрица $L + L^T$ является диагональной, элементы главной диагонали которой равны либо удвоенным действительным корням характеристического уравнения (4) $2\lambda_l$, либо удвоенным действительным частям комплексно сопряженных корней $2\sigma_j$.

Пусть $\lambda_{\max}(\zeta)$ является максимальным собственным значением матрицы, заключенной в фигурные скобки в равенстве (6). Тогда справедливо неравенство [6]:

$$\frac{d}{d\zeta} \|y_n\|^2 \leq \lambda_{\max}(\zeta) \|y_n\|^2 \tag{7}$$

откуда следует

$$\|y_n(\zeta)\|^2 \leq y_n(0)\|^2 \exp\left[\int_0^\zeta \lambda_{\max}(\zeta_1)\, d\zeta_1\right] \tag{8}$$

где $\|y_n(0)\|$ — значение нормы вектора y_n при $\zeta = 0$.

Если $\rho_{\max}$ равно максимальному значению среди всех λ_l и σ_j, а $\nu_{\max}, \nu_{\min}$ — максимальное и минимальное собственные значения симметричной матрицы $D_n = V_n^{-1} BV_n + V_n^T B^T (V_n^{-1})^T$, тогда вместо неравенства (7) можно записать ($\alpha_1 = \alpha$):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta} \|y_n\|^2 \leq \begin{cases} [\rho_{\max} + n^2 \alpha(\zeta) \nu_{\max}/2] \|y_n\|^2, & \text{если } \alpha(\zeta) \geq 0 \\ [\rho_{\max} + n^2 \alpha(\zeta) \nu_{\min}/2] \|y_n\|^2, & \text{если } \alpha(\zeta) \leq 0 \end{cases} \tag{9}$$

Из неравенства (9) имеем

$$\|y_n(\zeta)\|^2 \leq \|y_n(0)\|^2 \exp\left\{\left[2\rho_{\max} + \frac{n^2}{2\zeta}(\nu_{\max} - \nu_{\min}) \int_0^\zeta |\alpha(\zeta_1)|\, d\zeta_1\right] \zeta\right\}$$

С учетом эргодичности функции $\alpha(\zeta)$:

$$\lim_{\zeta\to\infty} \frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta} |\alpha(\zeta_1)|\, d\zeta_1 = \langle|\alpha|\rangle = \text{const}$$

при $\zeta \to \infty$ получим

$$\|y_n(\zeta)\|^2 \leq \|y_n(0)\|^2 \exp\{[2\rho_{\max} + n^2(\nu_{\max} - \nu_{\min})\langle|\alpha|\rangle/2]\,\zeta\} \qquad (10)$$

Дадим определение устойчивости нулевого решения уравнения (3).

Решение системы уравнений (3) называется устойчивым почти наверное при $\zeta > 0$, если [17, 9]:

$$P\{\lim_{\|x_{0n}\|\to 0} \sup_{\zeta\geq 0} \|x_n(\zeta, x_{0n})\| = 0\} = 1$$

Под $\|x_n(\zeta)\|$, $\|x_{0n}\|$ понимается норма решений в моменты времени ζ и $\zeta = 0$.

Решение почти наверное асимптотически устойчиво, если выполняется предыдущее условие и кроме того найдется $\delta > 0$, такое, что при $\|x_{0n}\| < \delta$ для любого малого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{\zeta_1\to\infty} P\{\sup_{\zeta>\zeta_1} \|x_n(\zeta, x_{0n})\| > \varepsilon\} = 0$$

В соответствии с этими определениями из неравенства (10) следует достаточное условие асимптотической устойчивости почти наверное вязкоупругого стержня

$$\rho_{\max} + n^2(\nu_{\max} - \nu_{\min})\langle|\alpha|\rangle/4 < 0$$

В результате вместо неравенства (10) получим

$$\rho_{\max} + n^2\nu_{\max}\langle|\alpha|\rangle/2 < 0 \qquad (11)$$

Пример 1. Рассмотрим упругий стержень ($R(t-\tau) \equiv 0$). Система уравнений (3) в этом случае является системой уравнений второго порядка и матрицы A_n и B записываются в виде

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -n^4(1-\alpha_{0n}) & -2\varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ограничимся рассмотрением практически наиболее важного случая, когда $n^4(1-\alpha_{0n}) - \varepsilon^2 > 0$.

Корни уравнения (4) равны $\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\mu$, где $\sigma = -\varepsilon$, $\mu = [n^4(1-\alpha_{0n}) - \varepsilon^2]^{1/2}$. Тогда

$$x_{1n} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad z_{1n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix}, \quad V_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \mu \end{bmatrix}, \quad D_n = \frac{1}{\mu}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{\max} = -\varepsilon, \quad \nu_{\max} = 1/\mu$$

Неравенства (10), (11) для упругого стержня приводят к одному и тому же соотношению

$$\langle|\alpha|\rangle < 2\varepsilon[n^4(1-\alpha_{0n}) - \varepsilon^2]^{1/2}/n^2$$

Опираясь на неравенство Коши — Буняковского—Шварца, можно записать

$$\langle\alpha^2\rangle < 4\varepsilon^2[1 - \alpha_{0n} - (\varepsilon/n^2)^2] \qquad (12)$$

При $\alpha_{0n} = 0$ это неравенство совпадает с аналогичным «оптимальным» неравенством Infante [8].

«Оптимальное» условие устойчивости для упругого стержня было получено также в работе [10] и оно при $n = 1$ принимает вид

$$\langle \alpha^2 \rangle < 4(1 - \alpha_0)\varepsilon^2, \quad \alpha_0 = \alpha_{01}.$$

Поскольку для реальных стержней, как правило, справедливо соотношение

$$\varepsilon^2 \ll 1 - \alpha_0 \tag{13}$$

можно считать, что неравенства (12) и (13) дают практически одинаковые результаты.

До сих пор предполагалось, что форма изгиба стержня совпадает с одной из синусоид. Если же допустить, что возмущения начальных условий являются произвольными

$$w(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{0n} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \dot{w}(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{0n} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

то прогиб стержня можно искать в виде

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Выполняя для каждого n подстановки, аналогичные рассмотренным ранее, норму бесконечного вектора $\mathbf{y}$ тогда можно определить выражением

$$\|\mathbf{y}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{y}_n\|^2 \right)^{1/2}$$

Условие устойчивости стержня (11) сохраняет свою силу и в этом случае. Принимая во внимание, что $\rho_{\max} = -\varepsilon$, $n^2 \nu_{\max} = (1 - \alpha_0 - \varepsilon^2)^{-1/2}$ (при $n = 1$) из неравенства (11) получим

$$\langle |\alpha| \rangle < 2\varepsilon (1 - \alpha_0 - \varepsilon^2]^{1/2}$$

или

$$\langle \alpha^2 \rangle < 4\varepsilon^2 (1 - \alpha_0 - \varepsilon^2)$$

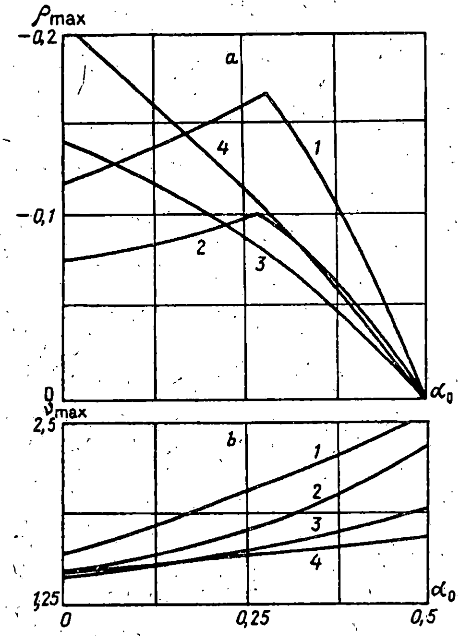
Отсюда следует, что если стержень устойчив при возмущении начальных условий, имеющих форму одной полуволны синусоиды, то он устойчив и при произвольных возмущениях начальных условий.

Пример 2. Рассмотрим вязкоупругий стержень, возмущение начальных условий которого имеет форму одной полуволны синусоиды. Ядро релаксации материала имеет вид

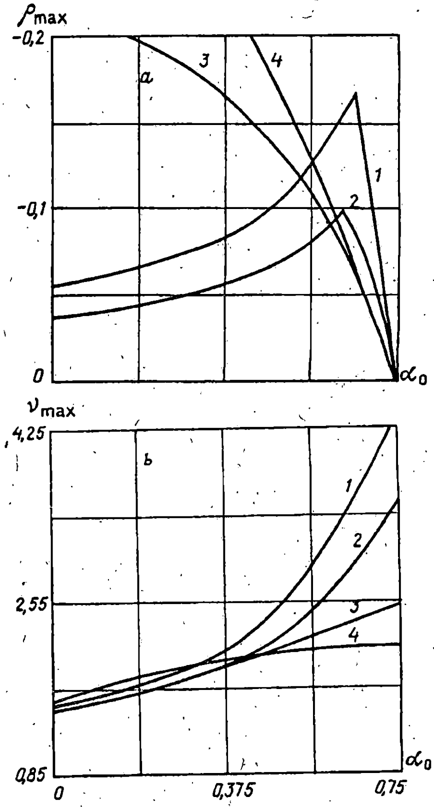
$$R(t - \tau) = \varkappa^* L \exp[-\varkappa^*(t - \tau)], \quad \varkappa^* = \omega\varkappa$$

В начале будем предполагать величину $\varkappa^*$ малой по сравнению с частотой собственных колебаний ω. В этом случае для определения корней характеристического уравнения (4) воспользуемся методом возмущений. Тогда в первом приближении найдем (при $1 - \alpha_0 > \varepsilon^2$):

$$\lambda_1 \approx -\varkappa(1 - L - \alpha_0)/(1 - \alpha_0), \quad \lambda_{2,3} \approx -a \pm ib \tag{14}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где

$$a = \varepsilon + \tfrac{1}{2}\varkappa L/(1-\alpha_0), \quad b = d + \tfrac{1}{2}\varepsilon\varkappa L/[(1-\alpha_0)\,d]$$

$$d = (1-\alpha_0-\varepsilon^2)^{1/2}$$

Матрица преобразования $\mathbf{V}_1$ имеет вид

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & -a & b \\ 1-\alpha_0 & -g & -h \end{bmatrix}$$

$$g = \varkappa\varepsilon L/(1-\alpha_0+2\varepsilon\lambda_1) \approx \varkappa\varepsilon L/(1-\alpha_0)$$

$$h = \varkappa Ld/(1-\alpha_0+2\varepsilon\lambda_1) \approx \varkappa Ld/(1-\alpha_0)$$

Матрица $\mathbf{D}_1$ записывается так

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 2c_{12} & 0 & c_{32} \\ 0 & -2c_{12} & c_{32} \\ c_{32} & c_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

где c_{12}, c_{32} — соответствующие элементы обратной матрицы $\mathbf{V}_1^{-1}$.

Максимальное собственное значение матрицы $\mathbf{D}_1$ равно

$$\nu_{max} = (4c_{12}^2 + 2c_{32}^2)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{d}\left\{1 - \frac{\varkappa\varepsilon L\,[(1-\alpha_0) - 2d^2]}{2(1-\alpha_0)^2\,d^2}\right\},$$

На основании неравенства (11) в итоге имеем

$$\langle|\alpha|\rangle < \begin{cases} \sqrt{2}\,\dfrac{\varkappa(1-L-\alpha_0)}{\sqrt{1-\alpha_0}}, & \text{если } \rho_{\max}=\lambda_1 \\ \sqrt{2}\left[\varepsilon + \dfrac{\varkappa L}{2(1-\alpha_0)}\right]\sqrt{1-\alpha_0}, & \text{если } \rho_{\max}=a \end{cases} \qquad (15)$$

На основании неравенства Коши — Буняковского — Шварца нетрудно получить ограничение на дисперсию случайной составляющей продольной силы, аналогичное (12).

Далее можно показать, что в случае вязкоупругого стержня, при малых значениях параметра $\varkappa$ по сравнению с единицей, как и в случае упругого стержня имеет место совпадение условия устойчивости при произвольных возмущениях начальных условий с условием устойчивости при возмущении начальных условий в форме одной полуволны синусоиды.

Соотношения (15) дают возможность анализа влияния различных параметров материала стержня и характеристик продольной силы на устойчивость вязкоупругого стержня по вероятности. Однако, как уже отмечалось, неравенства (15) справедливы при малых значениях параметра $\varkappa$. Если это предположение не соблюдается, тогда решение задачи может быть найдено численно. Результаты таких расчетов представлены на фиг. 1 и 2 для двух значений характеристики релаксации материала $L=0{,}5$ (фиг. 1) и $L=0{,}25$ (фиг. 2). Кривые *1* соответствуют значениям параметров $\varepsilon=0$, $\varkappa=0{,}5$; кривые *2* — $\varepsilon=0$, $\varkappa=0{,}3$; кривые *3* — $\varepsilon=0{,}3$, $\varkappa=0{,}3$; кривые *4* — $\varepsilon=0{,}5$, $\varkappa=0{,}5$.

Появление переломов в графиках *1*, *2*, на фиг. 1,*а* и 2,*а* объясняется следующим. Обозначим через α_0^* то значение параметра α_0, которое соответствует точке перелома на указанных графиках. При $\alpha_0<\alpha_0^*$ максимальное собственное значение $\rho_{\max}$ равно действительной части комплексного корня характеристического уравнения (4), а при $\alpha_0>\alpha_0^*$ — $\rho_{\max}$ равно действительному корню того же уравнения.

Представленные результаты свидетельствуют о значительном влиянии характеристик вязкоупругости материала и внешнего сопротивления на значение дисперсии случайных флуктуаций продольной силы или математического ожидания их абсолютных значений, при которых движение стержня остается устойчивым почти наверное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Potapov V. D.* On the stability of viscoelastic beams under a stochastic excitation//Creep in Structures. IUTAM Symposium. Cracow (Poland), 1990. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 1991. P. 609—614.
2. *Tylikowski A.* Stability and bounds on motion of viscoelastic columns with imperfections and time-dependent forces//Creep in Structures. IUTAM Symposium. Cracow (Poland), 1990. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 1991. P. 653—658.
3. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б.* Устойчивость вязкоупругих стержней при случайной продольной нагрузке//ПМТФ. 1991. № 5. С. 124—131.
4. *Потапов В. Д.* Устойчивость вязкоупругого стержня, находящегося под действием случайной стационарной продольной силы//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 105—110.
5. *Potapov V. D.*, Marasanov A. I. Buckling and stability of polymeric composite beams under stochastic excitation//ZAMM. 1992. V. 72. № 4. P. 97—100.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
7. *Абгарян К. А.* Введение в теорию устойчивости движения на конечном интервале времени. М.: Наука, 1992. 160 с.
8. *Infante E. F.* On the stability of some linear nonautonomous random systems//Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1968. V. 35. No. 1. P. 7—12.

9. *Kozin F.* Some results on stability of stochastic dynamical systems//Random Vibrations-Status and Recent Developments. Amsterdam. 1986. P. 163—191.
10. *Kozin F., Wu C.-M.* On the stability of linear stochastic differential equations//Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. No. 1. P. 87—92.
11. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.
12. *Кушнер Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969. 200 с.
13. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
14. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
15. *Диментберг М. Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 176 с.
16. *Макаров Б. П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. М.: Машиностроение, 1983. 264 с.
17. *Bogdanoff T. L., Kozin F.* Moments of the output of linear random systems//J. Acoust. Soc. America. 1962. V. 34. No. 8. C. 1063—1066.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1992