

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. В. Ю. БРОТСКАЯ, О. А. МИЛАНОВИЧ, Н. И. МИНАКОВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ДВОЙКОЙ КРИВИЗНЫ

Исследуется устойчивость эллипсоидальной оболочки, выполненной из вязкоупругого материала, на основе критерия обращения скорости деформирования в бесконечность [1]. Оболочка жестко закреплена по контуру и испытывает действие нагрузки, изменяющейся во времени. Выясняются условия появления и развития несимметричных форм равновесия. Делаются выводы о влиянии условий закрепления и способов нагружения вязкоупругих систем на их устойчивость. Сравниваются результаты исследования с результатами [2]. В качестве основных геометрических параметров системы приняты безразмерные кривизны, эксцентриситет опорного эллипса.

1. Рассматривается вязкоупругая эллипсоидальная оболочка, материал которой описывается соотношением:

$$[a_0 \frac{\partial}{\partial t} + a_1] \sigma = [b_0 \frac{\partial}{\partial t} + b_1] \varepsilon \quad (1.1)$$

Предполагается отсутствие объемной ползучести. Соотношение (1.1) запишем в виде

$$(p + 1) \sigma = E_0 (p + \beta) \varepsilon \quad (1.2)$$

где p — оператор дифференцирования по безразмерному времени τ , E_0 , β — некоторые константы. Из (1.1), (1.2) имеем

$$\tau = a_1 t / a_0, E_0 = b_0 / a_0, \beta = a_0 b_1 / (a_1 b_0).$$

В частности для оргстекла $E_0 = 0,4516 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_0 = 0,341$, $a_1 / a_0 = 9,76$ с⁻¹, $\beta = 0,85$.

Для исследования напряженно-деформированного состояния эллипсоидальной оболочки была сформулирована следующая математическая модель:

$$\begin{aligned} & \times (\tau) \left[2\gamma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (1 - \nu) \gamma^4 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 2k_1 (1 + \nu \gamma^2) \frac{\partial W}{\partial \xi} + \gamma^2 (1 + \nu) \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\ & \left. + \gamma^2 (1 + \nu) \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \left(2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \gamma^2 (1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) \right] = 0 \\ & \times (\tau) \left[(1 - \nu) \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + 2\gamma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + (1 + \nu) \gamma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + (1 + \nu) \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial W}{\partial \eta} \left(2\gamma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) - 2k_1 (\gamma^2 + \nu) \frac{\partial W}{\partial \eta} \right] = 0 \\ & \times (\tau) \left[\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\gamma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \gamma^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} \right] = 12 \times (\tau) \left\{ \left[\gamma^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \right. \right. \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
& + \nu \gamma^2 \frac{\partial V}{\partial \eta} - k_1 (1 + \nu \gamma^2) W + 0,5 \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + \gamma^2 \nu \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 \right) \left(k_1 + \right. \\
& + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \left. + \left[\left(\gamma^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 \right) 0,5 - k_1 (\nu + \gamma^2) W + \nu \gamma^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \gamma^2 \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] (k_1 \gamma^2 + \gamma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}) + (1 - \nu) \gamma^2 \left(\gamma^2 \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \\
& + 12 (1 - \nu^2) q_0 (\tau)
\end{aligned}$$

$$\xi = x/a, \eta = y/b, \gamma = a/b, k_1 = \kappa_1 a^2/h, k_2 = \kappa_2 a^2/h$$

$$(k_2 = \gamma^2 k_1), W = W_1/h, V = V_1 b/h^2, U = U_1 b^2/(ah^2)$$

$$q_0 = q(\tau) a^4/(E_0 h^4), \kappa(\tau) = (E(\tau)/E_0) = (p + \beta)/(p + 1), p = \partial/\partial \tau$$

где a, b — полуоси опорного эллипса (фиг. 1); κ_1, κ_2 — кривизны срединной поверхности оболочки; h — толщина оболочки; W_1, U_1, V_1 — функции перемещения; $q(\tau)$ — нагрузка.

Вязкоупругие свойства материала описаны оператором $\kappa(\tau)$, характеризующим вязкоупругий модуль Юнга. Постоянная E_0 — мгновенное значение оператора модуля Юнга при $\tau = 0$.

Оболочка жестко закреплена по краю и, следовательно

$$U = 0, V = 0, W = 0, \partial W/\partial \xi = 0, \partial W/\partial \eta = 0 \quad (1.4)$$

Интегрирование системы (1.1) — (1.4) требует некоторых начальных данных. В принципе их можно принять в виде

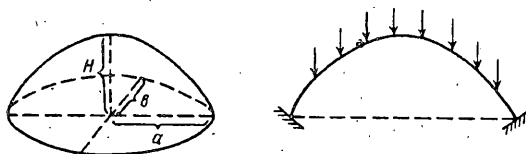
$$U|_{\tau=0} = U_0(x, y), V|_{\tau=0} = V_0(x, y), W|_{\tau=0} = W_0(x, y) \quad (1.5)$$

U_0, V_0, W_0 — любые достаточно гладкие функции, удовлетворяющие (1.4). Однако более рационально выбрать U_0, V_0, W_0 как решение краевой задачи, полученной из (1.1) — (1.4) при условии $\kappa(\tau) \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow 0$ и описывающей мгновенное равновесие вязкоупругого эллипсоидального сегмента. Состояние длительного равновесия механической системы может быть исследовано с помощью уравнений (1.1) — (1.4) с учетом $\kappa(\tau) \rightarrow \beta$ при $\tau \rightarrow \infty$. Критическое время τ_* будем определять из условия

$$dW/d\tau|_{\tau=\tau_*} = \infty \quad (1.6)$$

Истинный смысл этого критерия, как показано в [1], заключается в том, что для малоинерционных систем в районе $t = t_*$ имеют место весьма большие скорости и ускорения, что и воспринимается в эксперименте как хлопок оболочки.

2. Будем решать начально-краевую задачу (1.3), (1.4) методом сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого используем



Фиг. 1

метод Бубнова — Галеркина в высоком приближении. Выберем U, V, W в следующем виде

$$W = (1 - \xi^2 - \eta^2)^2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^l A_{i-j,j}(t) \xi^{i-j} \eta^j$$

$$U = (1 - \xi^2 - \eta^2) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^l B_{i-j,j}(t) \xi^{i-j} \eta^j, \quad V = (1 - \xi^2 - \eta^2) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^l C_{i-j,j}(t) \xi^{i-j} \eta^j \quad (2.1)$$

где $A_{i-j,j}, B_{i-j,j}, C_{i-j,j}$ — некоторые функции безразмерного времени. Очевидно, выбор U, V, W обеспечивает удовлетворение граничных условий (1.4). При этом симметричным формам равновесия соответствует решение задачи, в аппроксимациях которого (2.1) стоят четные относительно ξ и η члены. Появление же несимметричных форм связано с тем, что в аппроксимациях вида (2.1) появляются члены с нечетными степенями ξ или η .

Появление таких членов всегда связано с ветвлением решения. Установлено, что в случае тонких оболочек ветвление решения возможно лишь в одном направлении. Подстановка (2.1) в (1.3) и применение процедуры Бубнова — Галеркина позволили разработать алгоритм построения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по времени относительно $A_{i-j,j}, B_{i-j,j}, C_{i-j,j}$, описывающей вязкоупругое поведение оболочки

$$\begin{aligned} & \times (\tau) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^l (A1_{ijkl} A_{i-j,j} + B1_{ijkl} B_{i-j,j} + C1_{ijkl} C_{i-j,j} + \\ & + A_{i-j,j} \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m A1_{ijnmkl} A_{m-n,n}) = 0 \\ & \times (\tau) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^l (A2_{ijkl} A_{i-j,j} + B2_{ijkl} B_{i-j,j} + C2_{ijkl} C_{i-j,j} + \\ & + A_{i-j,j} \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m A2_{ijnmkl} A_{m-n,n}) = 0 \quad (2.2) \\ & \times (\tau) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^l [A3_{ijkl} A_{i-j,j} + B3_{ijkl} B_{i-j,j} + C3_{ijkl} C_{i-j,j} + \\ & + A_{i-j,j} \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m (A3_{ijnmkl} A_{m-n,n} + AB_{ijnmkl} B_{m-n,n} + \\ & + AC_{ijnmkl} C_{m-n,n} + A_{m-n,n} \sum_{f=0}^N \sum_{g=0}^l AA_{ijnmfgkl} A_{f-g,g})] + \\ & + K_k q_0(\tau) = 0 \quad (k = 0, \dots, N, l = 0, \dots, k) \end{aligned}$$

Процесс составления системы дифференциальных уравнений (2.2) автоматизирован, алгоритм реализуется в любом приближении с помощью пакета программ на Turbo Pascal (v. 6. 0).

Если в (2.2) i, j, k, l, n, m, f, g принимает четные значения, то будем иметь систему уравнений, описывающих дважды симметричную форму равновесия относительно осей ξ и η . Несимметричные составляющие форм равновесия возникают в том случае, когда i, j, k, l, n, m, f, g принимают наряду с четными нечетные значения.

3. Рассмотрим более детально вопрос о выборе начальных данных (1.5). Уравнения (2.2) при $\kappa(\tau) = 1$ определяют мгновенную деформацию вязкоупругого эллипсоидального сегмента. Уравнения, определяющие $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ соответствующие длительному состоянию оболочки, получаются из (2.2) при $\kappa(\tau) = \beta$.

Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений, определяющих мгновенное и длительное состояние оболочки, использовался метод продолжения по параметру q_0 в сочетании с методом нелинейной релаксации и методом Гаусса.

Аналитическое и численное исследования показали, что как и в случае защемленного скользящего края [2] ветвление решений возможно только на немонотонной кривой нагружения, т. е. при наличии точек соответствующих верхнему и нижнему критическим значениям. Необходимым и достаточным условием существования точек бифуркации на немонотонной кривой в случае жестко защемленного края является условие: $k_1 > 1$; $k_2 > \gamma^2$.

Анализ матрицы системы уравнений, полученной в результате линеаризации системы уравнений (2.2) при $\kappa(\tau) = 1$, позволяет находить точки бифуркации, в которых решение ветвится. Если при некотором значении нагрузки q_0 указанная матрица необратима, то возможно явление ветвления.

Найденную точку бифуркации используем в качестве начальной для получения несимметричных составляющих кривой нагружения. В общем случае необходимо предварительно определить число ответвляющихся решений и установить их направления. Однако, как указывалось выше, в случае тонких оболочек возможна лишь одна несимметричная составляющая. При этом, если несимметричные составляющие разветвляются в направлении оси ξ , то составляющая перемещения $V \equiv 0$, если же развитие несимметричных форм равновесия осуществляется в направлении η , то $U \equiv 0$. Отсюда следует, что порядок исследуемой системы уравнений (2.2) равен $2n + 2$.

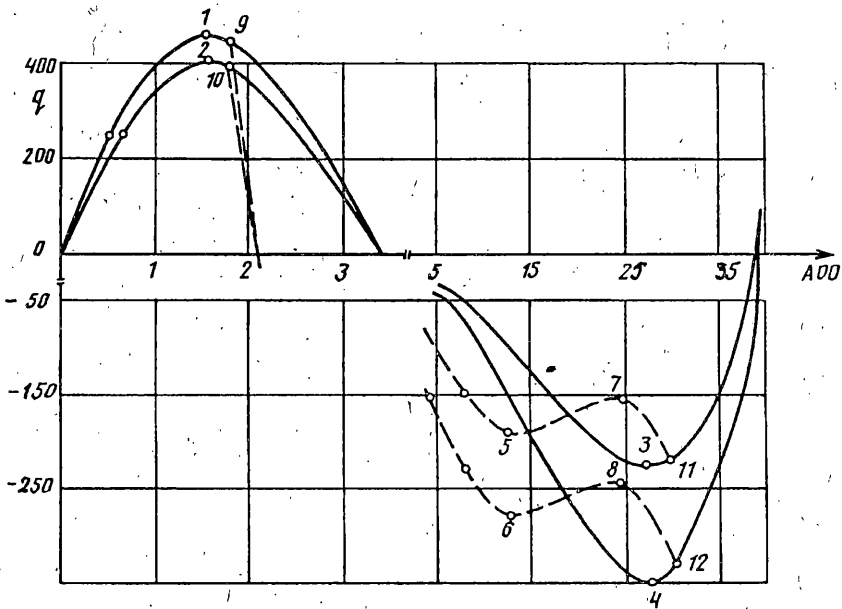
Для того чтобы проследить развитие со временем как симметричных, так и несимметричных деформаций, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2), где $\kappa(\tau) = (p + \beta)/(p + 1)$ ($p = \partial/\partial\tau$) с начальными данными, выбранными в результате исследования мгновенного состояния оболочки. Интегрирование задачи Коши выполнялось методом Рунге — Кутты. Поскольку система уравнений (2.2) неразрешена относительно производных, то на каждом шаге интегрирования они определялись методом Гаусса.

Численное исследование проблемы производилось для нагрузок вида $q(\tau) = q_0$, $q(\tau) = A\tau$, $q(\tau) = A\tau \exp(-\tau/\tau_m)$.

Была проведена большая серия расчетов при различных значениях параметров q_0 , A , τ_m для оболочек с различными значениями эксцентриситета $\gamma = a/b$ и комбинациями кривизн k_1 и k_2 ($k_2 = \gamma^2 k_1$). Численные расчеты показали, что погрешность решения на базе четвертого приближения составляет $\approx 6\%$.

4. По описанной выше методике была проведена серия расчетов, которая позволила подтвердить некоторые закономерности потери устойчивости нелинейных вязкоупругих систем с учетом несимметричных деформаций, которые были установлены для случая защемленного скользящего края оболочки [2].

В случае воздействия на оболочку постоянного равномерного внешнего давления характерные кривые нагружения $q_0 - W_0(0, \tau)$ для начально-упругих характеристик материала ($\tau = 0$) и для предельно-упругого состояния оболочки ($\tau \rightarrow \infty$) при $\gamma = 3$, $k_1 = 10$, $k_2 = 90$ в четвертом приближении изображены на фиг. 2 соответственно верхней и нижней кривыми. Штриховой линией изображены ветви, соответствующие несимметричным формам равновесия. Кривые мгновенных и предельных состояний оболочки фиксировали явление хлопка и наличие несимметричных форм равновесия. Точки 1—4 соответствуют верхним и нижним критическим нагрузкам q^+ , q_0^+ , q^- , q_0^- мгновенно упругого и предельного состояния оболочки. В точках 1—8 состояния равновесия оболочки являются критическими;



Фиг. 2

но ветвление решения не имеет места. В точках 9—12 возможно ветвление решения системы (2.2).

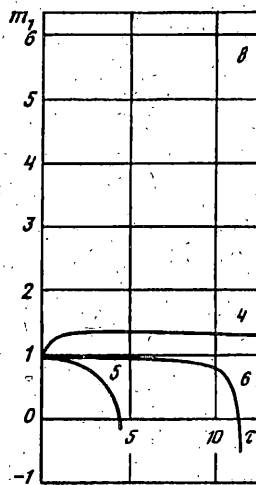
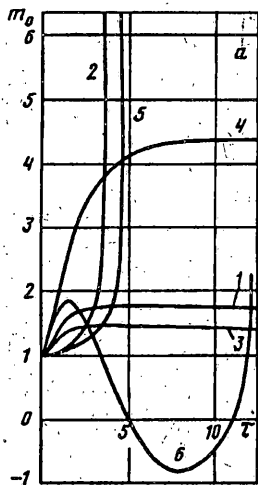
Графики зависимостей симметричных составляющих $m_0(\tau) = A_{00}(\tau)/A_{00}$ и несимметричных составляющих $m_1(\tau) = A_{10}(\tau)/A_{10}$ прогиба от времени при различных величинах давления приведены на фиг. 3.

Важно отметить, что выводы об определении верхних критических значений нагрузки, при симметричном деформировании вязкоупругих систем, подтверждаются и при несимметричном деформировании. Верхнюю критическую нагрузку необходимо рассчитывать по предельному состоянию, если оболочка должна работать существенно длительное время.

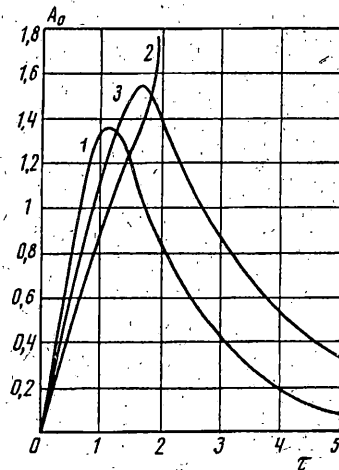
Из графиков фиг. 2, 3 видно, что при нагрузках, меньших предельной критической $0 < q_0 < q_2$ оболочка принимает одну из устойчивых симметричных форм равновесия. В последующие моменты времени происходит ее вязкоупругая деформация и при $\tau \rightarrow \infty$ оболочка переходит в симметричную форму равновесия, соответствующую предельному состоянию (фиг. 3, а, кривая 1). При $q_2 < q_0 < q_1$ мгновенные симметричные прогибы оболочки в течение конечного времени изменяются с возрастающей скоростью. В этом случае существует критическое время, наблюдается хлопок с вязкоупругим механизмом (фиг. 3, а, кривая 2).

При $q_0 > q_1$ уже в начальный момент времени имеет место хлопок оболочки, перескок ее в симметричную закритическую форму равновесия, и вследствие вязкоупругости материала, переход со временем в форму равновесия, соответствующего предельным характеристикам материала (фиг. 3, а, кривая 3).

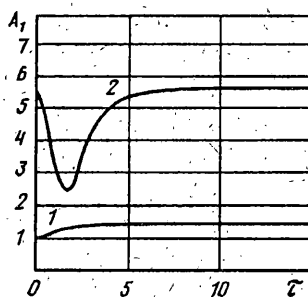
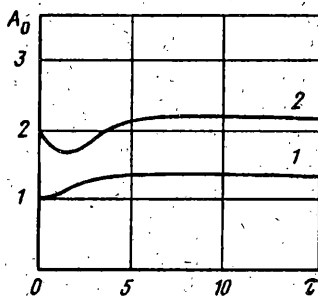
Интересен случай, когда в начальный момент времени оболочка под действием нагрузки $q_5 < q_0 < q_2$ принимает одну из устойчивых несимметричных форм равновесия. В последующие моменты времени происходит развитие несимметричной формы равновесия и предельный переход в соответствующую несимметричную форму (фиг. 3, а, б, кривые 4). При $q_6 < q_0 < q_5$ в начальный момент оболочка принимает несимметричную форму равновесия и дальнейшее развитие деформации происходит плавно в течение конечного времени τ_* , которое можно назвать критическим. По истечении этого времени имеет место вязкоупругий хлопок оболочки (фиг. 3, а, б, кривые 5).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Если вязкоупругая эллипсоидальная оболочка подвержена воздействию нагрузки вида $q(\tau) = A\tau$, то деформации оболочки развиваются симметричным образом в течение конечного времени τ_* , которое является критическим. Имеет место обратно пропорциональная зависимость критического времени от параметра A . Заметим, что при воздействии указанной нагрузки на несимметрично деформированную поверхность, со временем происходит угасание несимметричных составляющих прогиба до нуля при развитии симметричных с последующим хлопком оболочки при $t \approx t_*$, что соответствует резкому росту скоростей деформирования (фиг. 3, а, б, кривые б).

Практический интерес представляет случай немонотонной нагрузки, когда в системе идет соревнование времени нарастания нагрузки и времени ее деформации: $q(\tau) = q_m (e/\tau_m) \tau \exp(-\tau/\tau_m)$, где q_m — максимальное значение нагрузки, τ_m — время ее достижения.

В данном случае при назначении параметров нагрузки q_m также остается справедливым правило отделения приемлемых ситуаций от неприемлемых в смысле устойчивости конструкции по предельному состоянию.

Если $q_m < q_2$, с ростом нагрузки от 0 до $q_m = 4344$ со временем происходит вязкоупругая симметричная деформация оболочки. Далее, с уменьшением нагрузки значения прогибов убывают. Хлопок отсутствует (фиг. 4, кривая 1). При $q_m > q_2$ имеет место хлопок оболочки с вязкоупругим механизмом (фиг. 4, кривая 2).

Развитие деформации мгновенно недеформированной поверхности оболочки осуществляется симметричным образом, ветвление решения не обнаружено. Заметим, что увеличивая скорость достижения максимальной по значению нагрузки q_m (соответственно уменьшая τ_m) можно обеспечить большую устойчивость системы, т. е. рост критического времени τ_* (фиг. 4, кривые 2, 3). Так, если $q_m = q_1$ при $\tau_m = 2$ является критической нагрузкой, то при $\tau_m \leq 1,5$, $q_m = q_1$ хлопок оболочки отсутствует. В случае воздействия на мгновенно деформированную оболочку немонотонной нагрузки, отмечено следующее: при $q_m < q_2$ наблюдалось дальнейшее развитие несимметричных деформаций с выходом на предельное несимметричное состояние (фиг. 5, *a, b*, кривые 1). При $q_m > q_2$ в зависимости от значения τ_m либо фиксировался вязкоупругий хлопок оболочки при $\tau = \tau_*$, либо отмечалось развитие деформаций при увеличении нагрузки с последующим их уменьшением. Далее, при уменьшении нагрузки оболочка выходила на первоначальное состояние (фиг. 5, *a, b*, кривые 2).

При других значениях γ были получены аналогичные результаты. При этом установлено, что с уменьшением γ , при фиксированной кривизне, хлопок оболочки с вязкоупругим механизмом наступает при меньших нагрузках. При фиксированном значении эксцентриситета γ , с увеличением кривизны, конструкция становится более устойчивой.

В рассматриваемой задаче перехода симметричной формы равновесия в несимметричную при квазистатической деформации не обнаружено.

Авторы благодарят И. И. Воровича за ценные предложения при выполнении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И. И., Минакова Н. И., Шепелева В. Г. Некоторые вопросы устойчивости вязкоупругих и вязкопластических систем на примере фермы Мизеса. // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. N 4. С. 120—132.
2. Ворович И. И., Дробышева Т. П., Минакова Н. И. Исследование устойчивости вязкоупругой оболочки двойкой кривизны. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. N 6. С. 179—183.