МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. В. В. ВАСИЛЬЕВ

К ДИСКУССИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Опубликованными выше статьями В. М. Даревского [1] и П. А. Жилина [2] редколлегия завершает дискуссию по классической теории пластин, начатую в третьем номере нашего журнала за 1992 год, который содержал серию статей [3—5], где классическая теория пластин, описываемая уравнением четвертого порядка, подвергалась критике и противопоставлялась более общей теории, сводящейся к системе уравнений шестого порядка. Эти статьи вызвали ответную критику, например, в [6, 7] и в статьях, представленных к публикации в МТТ, одна из которых [1] напечатана выше. В связи с тем, что основная доля критических замечаний относится к статье П. А. Жилина [4], редколлегия в соответствие с традициями журнала приняла решение опубликовать его ответ [2] и поручила мне подвести итоги дискуссии. Этой цели и посвящена настоящая статья, при подготовке которой я стремился ограничиться обсуждением результатов, не вызывающих принципиально различных толкований или не допускающих их в силу своей математической определенности.

Предварительно, чтобы не отсылать читателя ко всем опубликованным в процессе дискуссии работам, напомним предмет этой дискуссии. Рассмотрим тонкую пластину с толщиной h, отнесенную к декартовым координатам x, y, z так, что координатные оси x и y лежат в срединной плоскости, а ось z нормальна к этой плоскости $(-h/2 \le z \le h/2)$.

Классическая теория пластин, основанная на гипотезах Кирхгофа, приводит к следующему закону распределения перемещений по толщине для задачи изгиба пластины

$$u_x = \theta_x(x, y)\, z, \quad u_y = \theta_y(x, y)\, z, \quad u_z = w(x, y) \tag{1}$$

$$\theta_x = -\partial w/\partial x, \; \theta_y = -\partial w/\partial y \tag{2}$$

Здесь θ_x и θ_y — углы поворота нормали к срединной плоскости пластины, выражающиеся через прогиб w, который удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$D\Delta\Delta w = p, \quad D = Eh^3/[12(1-\nu^2)] \tag{3}$$

где $p(x, y)$ — действующее на пластину давление. В результате нагружения в пластине возникают изгибающие и крутящий моменты

$$M_x = D\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right), \quad M_y = D\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right) \tag{4}$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2}D(1-\nu)\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)$$

и поперечные усилия

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w, \quad Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w \tag{5}$$

Предположим, что срединная плоскость пластины ограничена криволинейным контуром и обозначим контурную координату через t, а координату нормальную к контуру — через n. Тогда имеют место следующие естественные граничные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения (3):

$$M_n \delta\theta_n = 0, \quad K_n \delta w = 0 \tag{6}$$

$$K_n = Q_x + \partial M_{tn}/\partial t \tag{7}$$

где K_n — обобщенное поперечное усилие Кирхгофа. В угловых точках граничного контура (если они имеются) усилие K_n может иметь особенность, которая часто интерпретируется как сосредоточенная поперечная сила, реально действующая в угловой точке, или фиктивная.

Описанной выше классической теории пластин противопоставляется теория, которая также основана на поле перемещений (1), однако при других выражениях для углов поворота нормали

$$\theta_x = -\partial\varphi/\partial x + \partial\psi/\partial y, \quad \theta_y = -\partial\varphi/\partial y - \partial\psi/\partial x \tag{8}$$

Здесь $\varphi(x, y)$ — потенциал, через который выражается прогиб

$$w = \varphi - (D/C)\,\Delta\varphi \tag{9}$$

и который иногда называется проникающим потенциалом, так как он обладает (так же как, очевидно, и прогиб) сравнительно медленной изменяемостью по координатам x, y. Коэффициент $C = Gh = Eh/[2(1+\nu)]$ определяет жесткость пластины при сдвиге в трансверсальных плоскостях xz и yz. В работах, посвященных уточненным теориям пластин, используются различные выражения для этого коэффициента, отличающиеся от приведенного выше числовыми множителями, не имеющими принципиального значения. Функция $\psi(x, y)$, входящая в соотношения (8), является краевым потенциалом, определяющим напряженное состояние пластины, локализованное вблизи ее края или другой линии возмущения, вдоль которой нарушается непрерывность геометрии пластины, действующей нагрузки и т. п.

Потенциалы φ и ψ должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$D\Delta\Delta\varphi = p \tag{10}$$

$$\Delta\psi - k^2\psi = 0, \quad k^2 = 2C/D(1-\nu) = 12/h^2 \tag{11}$$

Изгибающие и крутящий моменты определяются соотношениями (4) и (8), а поперечные усилия имеют вид

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi + C\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi + C\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{12}$$

В отличие от уравнения (3) система (10), (11) имеет шестой порядок и на граничном контуре должны выполняться три естественных граничных условия

$$M_n\delta\theta_n = 0, \quad M_{nt}\delta\theta_t = 0, \quad Q_n\delta w = 0 \tag{13}$$

При этом исчезает необходимость введения обобщенного усилия Кирхгофа (7) и наличие угловых точек не вызывает появления особенностей.

Основное отличие обсуждаемой теории от классической теории пластин заключается в приближенном учете трансверсальной деформации сдвига, которая игнорируется в классической теории. При $C \to \infty$, что соответствует нулевой деформации сдвига, из равенств (9), (11) следует $\varphi = w$, $\psi = 0$ и соотношения (8) вырождаются в равенства (2).

В связи с изложенным и для сокращения записи будем пока называть теорию, описываемую уравнениями (8)—(11), сдвиговой теорией пластин. Из равенств (9) и (11) следует, что влияние трансверсальной деформации сдвига проявляется в сдвиговой теории в двух формах. Рассмотрим второй член в правой части соотношения (9), который определяет влияние этой деформации на прогиб. Для оценки этого влияния введем безразмерные координаты $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/a$, где

a — характерный размер пластины в ее плоскости. В этих координатах коэффициент при $\Delta\varphi$ в равенстве (9) содержит множитель $(h/a)^2$. Ввиду того, что функция φ изменяется сравнительно медленно, φ и $\Delta\varphi$ имеют одинаковый порядок и наличие очень малого для изотропной тонкой пластины множителя $(h/a)^2$ позволяет с высокой степенью точности принять $w = \varphi$. Второе проявление деформации сдвига связано с наличием уравнения (11). Если записать его в безразмерных координатах, то коэффициент k оказывается пропорциональным сравнительно большому для тонкой пластины параметру a/h, что и определяет высокую степень изменяемости краевого потенциала ψ.

Таким образом, основное различие между обсуждаемыми теориями фактически связано с уравнением (11) для краевого потенциала. Следовательно, вопрос о возможной погрешности классической теории по отношению к более точной сдвиговой теории сводится к вопросу о возможности пренебречь напряжениями и деформациями, связанными с решением уравнения (11), по сравнению с соответствующими величинами, определяемыми решением уравнения (3) или (10).

Традиционный ответ на этот вопрос, который, по существу, был дан в прошлом веке в работах Томсона и Тэта, Буссинеска и Леви, предполагает возможность пренебречь краевым потенциалом на том основании, что связанное с ним напряженное состояние затухает при удалении от края пластины на расстояние, соизмеримое с ее толщиной и не влияет на напряженно-деформированное состояние основной части пластины, которое и призвана описывать двумерная прикладная теория. В последних работах содержатся более осторожные рекомендации. В частности, в [6] область применимости классической теории ограничивается задачами определения не слишком сильно изменяющегося (по координатам) напряженно-деформированного состояния пластины в точках, достаточно удаленных от ее краев и линий возмущения. Допускается, что теория может не работать, когда решение уравнения (3) обращается в тождественный нуль и когда краевые явления явно или завуалированно играют в задаче основную роль. В [2, 4] устанавливается асимптотический критерий, согласно которому классическая теория применима к пластинам, прогиб которых имеет порядок $(a/h)^3$. Решение задач, не удовлетворяющих этому условию, может сколь угодно сильно отличаться от решения, соответствующего сдвиговой теории, причем в любой точке пластины.

Для иллюстрации этих положений, обсуждающихся в [2, 4, 6] в основном с качественной стороны, рассмотрим две простые задачи, допускающие точное решение в рамках обеих теорий.

Пусть дана квадратная пластина, занимающая область $-a/2 \le x \le a/2$, $0 \le y \le a$, имеющая относительную толщину $h/a = 0{,}01$ и коэффициент Пуассона материала $\nu = 0{,}3$. Края $y = 0$ и $y = a$ свободно оперты, а на краях $x = \pm a/2$ пластина нагружена поперечным усилием и крутящим моментом, которые изменяются по законам

$$Q_x^a = Q_0 \sin \lambda y, \quad M_{xy}^a = \frac{M_0}{\lambda} \cos \lambda y, \quad \lambda = \frac{\pi}{a}$$

Решение уравнения (3) классической теории пластин, удовлетворяющее граничным условиям свободного опирания на краях $y = 0$ и $y = a$, имеет вид

$$w = (A_1 \operatorname{ch} \lambda x + A_2 x \operatorname{sh} \lambda x) \sin \lambda y$$

и должно удовлетворять граничным условиям типа (6), т. е.

$$M_x (x = \pm a/2) = 0, \quad K_x (x = \pm a/2) = (Q_0 - M_0) \sin \lambda y$$

Решение уравнений (10) и (11) сдвиговой теории может быть записано в форме

$$\varphi = (B_1 \operatorname{ch} \lambda x + B_2 x \operatorname{sh} \lambda x) \sin \lambda y, \quad \psi = B_3 \operatorname{sh} (rx) \cos \lambda y$$

$$r = (\pi^2 + 12a^2/h^2)^{1/2}/a$$

Граничные условия, соответствующие равенствам (13), имеют вид

$$M_x (x = \pm a/2) = 0, \quad M_{xy} (x = \pm a/2) = (M_0/\lambda) \cos \lambda y$$

$$Q_x (x = \pm a/2) = Q_0 \sin \lambda y$$

Опуская процедуру определения постоянных интегрирования и общую форму записи решения, которая вследствие своей громоздкости неудобна для сравнительного анализа, приведем численные выражения для прогиба.

Прогиб, соответствующий классической теории

$$w_k = \frac{a^3 (Q_0 - M_0)}{Eh^3} \left(0{,}211 \operatorname{ch} \lambda x - 0{,}155 \frac{x}{a} \operatorname{ch} \lambda x\right) \sin \lambda y \tag{14}$$

Прогиб, соответствующий сдвиговой теории,

$$w_s = w_1 + w_2$$

$$w_1 = \frac{a^3 (Q_0 - M_0)}{Eh^3} \left[0{,}211 \operatorname{ch} \lambda x - 0{,}156 \left(\frac{x}{a} \operatorname{sh} \lambda x - 1{,}496 \frac{h^2}{a^2} \operatorname{ch} \lambda x\right)\right] \sin \lambda y \tag{15}$$

$$w_2 = \frac{a^2 Q_0}{Eh^2} \left[0{,}012 \operatorname{ch} \lambda x + 0{,}26 \left(\frac{x}{a} \operatorname{sh} \lambda x - 1{,}496 \frac{h^2}{a^2} \operatorname{ch} \lambda x\right)\right] \sin \lambda y$$

Рассмотрим полученные результаты. Прежде всего обратим внимание на члены, содержащие $(h/a)^2$ в выражениях для w_1 и w_2. Эти члены связаны со вторым слагаемым в правой части равенства (9) и, как уже отмечалось выше, при $h/a = 0{,}01$ пренебрежимо малы. Можно заметить, что w_k и w_1, имеющие асимптотический порядок $(a/h)^3$, практически совпадают. Таким образом, w_s отличается от w_k наличием составляющей w_2, которая имеет порядок $(a/h)^2$. Важно отметить, что составляющая w_2, порожденная краевым потенциалом с высоким показателем изменяемости r, является проникающим решением с показателем изменяемости λ таким же, как у классического решения w_k. Это подтверждает справедливость вывода, сделанного в [4],— высокая изменяемость краевого потенциала, определяющая его локализацию вблизи границы, не является основанием для игнорирования уравнения (11), так как его решение может влиять на проникающий потенциал через граничные условия. Из равенств (14) и (15) следует, что увеличивая одновременно Q_0 и M_0 так, что их разность остается малой, можно получить прогиб w_s, сколь угодно отличающийся от классического решения w_k, причем в любой точке пластины.

Таким образом, приведенный пример подтверждает ограничения области применимости классической теории, содержащиеся в [2, 4, 6]. Однако тот факт, что возможное нарушение этих ограничений может быть выявлено только в результате анализа уже полученного решения, несомненно снижает их значимость для обоснования классической теории.

В связи с тем, что обсуждавшийся выше пример может показаться специально подобранным и поэтому не вполне убедительным, рассмотрим в качестве второго примера наиболее распространенную задачу теории пластин — задачу об изгибе прямоугольной пластины свободно опертой по всем сторонам, которая была решена Навье в 1820 году. В соответствие с этим решением, прогиб представляется в виде двойного тригонометрического ряда, удовлетворяющего граничным условиям, т. е.

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin (\lambda_m x) \sin (\lambda_n y) \tag{16}$$

$$\lambda_m = \pi m/a, \quad \lambda_n = \pi n/b \quad (0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$$

где a — длина пластины, а b — ее ширина. Представляя давление p аналогичным рядом с коэффициентами p_{mn}, можно найти w_{mn} из уравнения (3) и получить следующее решение [8]:

$$w = \frac{1}{D}\sum_m \sum_n \frac{p_{mn}}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \tag{17}$$

Далее, используя формулы (2) и (4), можно найти действующие в пластине моменты. Характерно, что в большинстве книг и учебников, где обсуждается эта задача, ее рассмотрение на этом и заканчивается. Следуя [8], продолжим решение. Определив опорные реакции пластины K_x и K_y с помощью равенства (7), можно убедиться в том, что они не уравновешивают действующее на пластину давление. Заметим, что контурные поперечные усилия Q_x и Q_y (5) уравновешивают внешнюю нагрузку, однако согласно логике классической теории пластин, они не могут трактоваться как опорные реакции. Для выполнения условия равновесия в угловых точках граничного контура необходимо приложить сосредоточенные силы, которые (поскольку речь идет о равновесии пластины как твердого тела) следует рассматривать как реально существующие опорные реакции. Однако в действительности сосредоточенных реакций в этой задаче нет. Для того, чтобы показать это, рассмотрим решение, следующее из сдвиговой теории. Предварительно заметим, что классическое решение (17) по существу удовлетворяет следующим граничным условиям на опорном контуре:

$$M_x = 0, \quad w = 0, \quad \theta_y = 0 \quad \text{при } x = 0,\, a \tag{18}$$

$$M_y = 0, \quad w = 0, \quad \theta_x = 0 \quad \text{при } y = 0,\, b$$

где θ_x и θ_y определяются формулами (2). Условия (18) имеют простой физический смысл — они означают, что пластина опирается по контуру на диафрагмы, которые обладают бесконечно большой жесткостью в своей плоскости и не имеют жесткости на изгиб. Решение уравнений (10) и (11), удовлетворяющее этим условиям, можно также представить в виде рядов, т. е.

$$\varphi = \sum_m \sum_n \varphi_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y), \qquad \psi = \sum_m \sum_n \psi_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(\lambda_n y)$$

Подставляя второй ряд в уравнение (11), получим $\psi_{mn} = 0$, т. е. $\psi \equiv 0$. Используя первый ряд и уравнения (9), (10), можно записать следующее выражение для прогиба пластины

$$w = \frac{1}{D}\sum_m \sum_n \frac{p_{mn}\,[1 + (D/C)(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)]}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \tag{19}$$

В численном отношении решения (17) и (19) отличаются для тонкой пластины мало, однако в принципиальном отношении это разные решения. В отличие от классической теории, в сдвиговой теории пластины опорные реакции совпадают с контурными поперечными усилиями Q_x и Q_y (12), которые в рассматриваемом случае уравновешивают давление на пластину и не оставляют места для каких-либо угловых сил. Наличие этих сил не подтверждается и решением трехмерной задачи теории упругости для плиты, опирающейся на гибкие диафрагмы, которое может быть получено в двойных тригонометрических рядах. Заметим, что в [7], где подвергается сомнению этот вывод, сделанный в работе [3], допущена неточность — условие (3.7) этой статьи $\int \tau_{xy} dz = 0$ выполняется автоматически, поскольку в задаче изгиба τ_{xy} является нечетной функцией координаты z и из него не следует равенство (3.8) $\tau_{xy} = 0$, на котором основан последующий вывод.

Таким образом, классическая теория пластин приводит к контурным реакциям, которые значительно отличаются от реакций, следующих из более точных теорий [5]. Учитывая, что в пространственных тонкостенных конструкциях панели, обычно моделируемые тонкими пластинами, передают нагрузку на подкрепляющие элементы через опорные реакции, приходится согласиться с предупреждением П. А. Жилина [2] о возможных последствиях формального использования классической теории пластин в вычислительных комплексах, полностью ориентированных на вычислительную технику.

Поскольку даже такая простая и широко распространенная задача теории изгиба пластин, как рассмотренная выше задача Навье, решается по сдвиговой теории проще и точнее, чем по классической теории, возникает неоднократно поднимавшийся в процессе дискуссии вопрос о возможности или необходимости излагать в учебных курсах по механике именно сдвиговую теорию и получать классическую теорию как ее предельный случай. Как известно, в методическом отношении вывод уравнений классической теории пластин включает элементы, которые достаточно сложно обосновать и объяснить. Иногда создается впечатление, что уверенность студентов в необходимости усилий Q (5), не вытекающих в отличие от моментов (4) из закона Гука, и в последующей их замене обобщенными усилиями K (7) при формулировке граничных условий, основана больше на доверии к лектору, чем на логике вывода. При этом, естественно, имеется в виду традиционный метод вывода [8], исключающий асимптотический анализ трехмерной задачи, привлечение соотношений теории упругости анизотропного тела, позволяющих вводить бесконечно большие величины упругих постоянных, и использование вариационных принципов, дающих формальную возможность замаскировать физическое противоречие. Однако при такой постановке вопроса сдвиговая теория также оказывается уязвимой. Недостатки, которые считаются естественными для уточненной теории, дополняющей классическую, могут оказаться неприемлемыми для теории ее заменяющей. Таким образом, вопрос о возможности изложения сдвиговой теории пластин вместо классической теории сводится к вопросу о возможности такого ее изложения, при котором

не возникают методические затруднения и противоречия, как связанные с классической теорией, так и новые;

не требуется более глубокого математического аппарата;

не создается существенных дополнительных трудностей при выводе и решении основных уравнений.

Представляется, что теория, удовлетворяющая этим требованиям, может быть построена, и ниже приводится краткое описание одного из возможных вариантов.

Прежде всего вводятся две гипотезы, аналогичные гипотезам Кирхгофа — кинематическая, согласно которой нормаль к срединной плоскости пластины не изменяет своей длины и не искривляется при изгибе пластины, и статическая, позволяющая пренебречь напряжениями σ_z по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y. Кинематическая гипотеза в сочетании с традиционным геометрическим построением дает перемещения (1), а статическая гипотеза позволяет записать соотношения упругости для напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy}:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial u_y}{\partial y}\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xy} = G\,(\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x)$$

Подстановка перемещений (1) дает линейное распределение этих напряжений по толщине пластины, т. е. позволяет ввести традиционные моменты и получить соотношения (4). Далее рассматриваются соотношения упругости для трансверсальных касательных напряжений

$$\tau_{xz} = G\,(\partial u_x/\partial z + \partial u_z/\partial x), \quad \tau_{yz} = G\,(\partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y) \tag{20}$$

С этими равенствами обычно связывается основной недостаток обсуждаемой теории. Действительно, если подставить в них перемещения (1), то получаемые в результате напряжения не зависят от переменной z и не удовлетворяют статическим граничным условиям на поверхностях $z = \pm h/2$. Однако такую подстановку осуществить нельзя, потому что равенства (20) включают производные $\partial u_x/\partial z$ и $\partial u_y/\partial z$. Дело в том, что соотношения (1) лишь приближенно аппроксимируют распределение перемещений по толщине пластины, а дифференцировать приближенные равенства, как известно, не рекомендуется. К счастью, для построения теория напряжения τ_{xz} и τ_{yz} и не требуются. Согласно кинематической гипотезе, толщина пластины при изгибе не изменяется, а следовательно, закон распределения касательных напряжений по толщине на поведение пластины не влияет, аналогично тому как не влияет на движение абсолютно жесткого стержня распределение продольной силы вдоль его оси. Существенной является только равнодействующая этих сил или, применительно к пластине, система интегральных по толщине поперечных усилий

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}dz$$

Подставляя сюда равенства (20), имеем

$$Q_x = G\left(u_x \big|_{z=-h/2}^{z=h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial u_z}{\partial x}\partial z\right), \quad Q_y = G\left(u_y \big|_{z=-h/2}^{z=h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial u_z}{\partial y}dz\right)$$

Отсюда с помощью соотношений (1) получаем соотношения упругости для поперечных усилий, отсутствующие в классической теории пластин

$$Q_x = C(\theta_x + \partial w/\partial x), \quad Q_y = C(\theta_y + \partial w/\partial y) \tag{21}$$

где $C = Gh$ — жесткость пластины при трансверсальном сдвиге. Заметим, что отмеченная выше независимость поведения пластины от закона распределения трансверсальных касательных напряжений по толщине исключает появление сдвиговых поправочных коэффициентов типа 2/3, 5/6, $\pi^2/12$ и т. д., учитывающих такую зависимость и полученных в многочисленных работах по уточненным теориям пластин.

Итак, естественным и единообразным способом вводятся все силовые факторы теории пластин — моменты (4) и усилия (20). Затем рассматривается равновесие бесконечно малого элемента пластины и выводятся три традиционные уравнения равновесия. Подставляя в них моменты и усилия с помощью равенств (4) и (20), приходим к трем уравнениям относительно θ_x, θ_y и w, которые сводятся к системам (10), (11), например, способом, изложенным в [3]. Естественно что вывод оказывается более сложным, чем в классической теории, однако, это усложнение отчасти компенсируется упрощением процедуры построения граничных условий, не требующей разрешения проблемы несоответствия порядка уравнения числу возможных статических граничных условий, введения обобщенного усилия Кирхгофа (7), рассуждений о том, реальны или фиктивны угловые силы и т. д.

Классическая теория пластин следует из построенной, если пренебречь деформацией сдвига, положив в поперечных соотношениях $C \to \infty$. При этом, поскольку Q_x и Q_y в общем случае должны быть отличными от нуля и конечными величинами, из равенств (21) следуют соотношения (2) классической теории. При этом граничные условия автоматически вырождаются в условия (6) [3], и преобразование Кельвина — Тэта, обсуждающееся в статьях [1, 2], может быть привлечено только для физической интерпретации результата.

Таким образом, возможность достаточно простого и непротиворечивого построения сдвиговой теории пластин действительно имеется. Однако получаемая в результате система (10), (11) несомненно сложнее уравнения (3), поэтому остановимся на проблемах, возникающих в связи с этим при построении аналитических и численных решений задач теории пластин.

Применительно к аналитическим методам возможны следующие ситуации. Подавляющее большинство точных аналитических решений классической теории пластин получено в форме одинарных и двойных тригонометрических рядов. Построение таких решений системы (10), (11) не представляет затруднений, более того, задача изгиба пластины свободно опертой по всем сторонам решается даже проще, чем в классической теории. Другая большая группа задач относится к пластинам с кинематическими или смешанными граничными условиями, для формулировки которых в классической теории не требуется вводить обобщенное усилие Кирхгофа (7). В терминологии [4] это случаи, когда переопределенная краевая задача Пуассона может быть поставлена корректно. Примером такой задачи является задача изгиба защемленной пластины, в которой два граничных условия классической теории $w = 0$ и $\theta_n = \partial w/\partial n = 0$ автоматически обеспечивают выполнение третьего условия $\theta_t = \partial w/\partial t = 0$. В таких задачах можно пренебречь краевым потенциалом, приняв $\psi = 0$, а второе слагаемое в выражении для прогиба (9) позволяет учесть влияние деформации трансверсального сдвига на проникающую составляющую напряженно-деформированного состояния, что представляется существенным для сравнительно толстых пластин и пластин, изготовленных из материалов с низким модулем сдвига. Остается достаточно узкий класс специальных задач, для решения которых необходимо привлекать уравнение (11). К таким задачам в основном относятся задачи изгиба пластин с неоднородными статическими и кинематическими граничными условиями. Однако и в этом общем случае имеется возможность построить простое решение уравнения (11), воспользовавшись асимптотическим методом Рейсснера [9]. Особенность уравнения (11) заключается в том, что оно определяет решение, локализованное вблизи края пластины и быстро затухающее при удалении от края. При этом нет никаких оснований ожидать, что это решение обладает большой изменяемостью и вдоль края. Поэтому можно записать уравнение (11) в окрестности отдельного края и с высокой степенью точности пренебречь производной вдоль края по сравнению с нормальной производной, т. е. представить (11) в виде $d^2\psi/dn^2 - k^2\psi = 0$. Затухающая составляющая решения этого уравнения

$$\psi = f(t)\, e^{-kn} \tag{22}$$

в сочетании с решением уравнения (10) позволяет приближенно удовлетворить три граничных условия на рассматриваемом краю.

Обращаясь к численным методам, следует остановиться на проблеме так называемого сдвигового запирания, возникающей при расчете пластин методом конечных элементов, при построении которого используются соотношения (1) и не привлекаются равенства (2). Этот эффект проявляется в том, что при уменьшении толщины пластины решение не приближается к классическому (а этого следует ожидать, поскольку при $h \to 0$ сдвиговая теория пластин вырождается в классическую). Эффекту сдвигового запирания посвящено большое число работ, в которых предлагаются различные методы и численные приемы, предотвращающие его появление. Однако физическая и математическая стороны этого явления связаны с наличием в пластине краевого напряженного состояния, описываемого уравнением (11). Действительно, введем некоторые осредненные по толщине пластины деформации сдвига $\gamma_{xz} = Q_x/C$, $\gamma_{yz} = Q_y/C$ и представим их с помощью равенств (12) и (21) следующим образом:

$$\gamma_{xz} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{D}{C}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{D}{C}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{23}$$

Для классической теории пластин соотношения (2) и (23) дают $\gamma_{xz} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$. В сдвиговой теории параметр D/C имеет порядок h^2 и первые слагаемые в правых частях равенств (23) стремятся к нулю при $h \to 0$. Строго говоря, из уравнения (11) или из решения (22) следует, что и $\psi \to 0$ при $h \to 0$, т. е. при $h \to 0$ сдвиговая теория вырождается в классическую. Однако в методе конечных элементов используется аппроксимация углов поворота θ_x и θ_y, входящих в выражения (1), полиномами низкого порядка. Такая аппроксимация, во-первых, является не вполне корректной, так как θ_x и θ_y включают, согласно равенствам (8), быстро изменяющуюся по координатам функцию ψ, а во-вторых, не обеспечивает необходимого асимптотического поведения деформаций сдвига (23) при $h \to 0$. Такая интерпретация сдвигового запирания позволяет дополнить существующие способы его устранения еще двумя. Согласно первому из них, предлагается пренебречь краевым потенциалом, приняв в равенствах (8) $\psi = 0$, и аппроксимировать проникающий потенциал φ. При этом сохраняется учет влияния деформации сдвига на проникающую составляющую напряженно-деформированного состояния, а сдвигового запирания не возникает. Более радикальный способ предполагает предварительное выделение быстро изменяющейся составляющей с помощью решения типа (22) и построение конечного элемента, аналогичного сингулярному элементу, использующемуся для численного решения задач с особенностями.

Подводя итог, можно заключить, что изложение в учебных курсах сдвиговой теории пластин, соизмеримое по используемым средствам и затрачиваемому времени с изложением классической теории пластин, позволяет сделать это изложение более последовательным и информативным. Помимо более глубокого анализа проблемы, такой подход позволяет сформировать более полное понимание самой классической теории и расширить область применимости теории пластин. Например, из сдвиговой теории естественно вытекает прикладная теория трехслойных пластин с легким заполнителем, которые широко применяются в современной технике. Для этого достаточно пренебречь жесткостью заполнителя по сравнению с жесткостью несущих слоев при выводе соотношений (4) для моментов и податливостью несущих слоев по сравнению с податливостью заполнителя при выводе соотношений (21) для поперечных усилий.

Заключительная часть этой статьи является дискуссионной и в значительной степени отражает личную точку зрения автора. В определенной степени это справедливо и для всего изложенного выше, однако здесь это обстоятельство следует специально отметить, поскольку речь пойдет о достаточно деликатном вопросе — как называть сдвиговую теорию, которая, если согласиться с изложенным выше, переходит из разряда одной из многих теорий, уточняющих и дополняющих классическую, в теорию ее обобщающую. Исторически первый вариант сдвиговой теории был построен в работах Э. Рейсснера [10, 11], за которыми последовала серия статей различных авторов, написанных в развитие идей Э. Рейсснера или независимо от них.

В связи с тем, что число работ, посвященных уточнению классической теории пластин, очень велико, здесь обсуждаются только так называемые сдвиговые теории первого порядка, оперирующие с равнодействующими напряжений (усилиями и моментами первого порядка) и сводящиеся к системе уравнений шестого порядка. При этом важно, что все относительно корректно построенные теории такого типа независимо от частных гипотез, на которых они основаны, приводятся к бигармоническому уравнению аналогичному (10) для проникающей составляющей решения и уравнению Гельмгольца (11) для краевой составляющей, т. е. по существу, отличаются от классической теории именно наличием уравнения (11), описывающим так называемый краевой эффект Рейсснера. В литературе обсуждаемые теории часто ассоциируются с теорией Тимошенко, основанной на сдвиговой модели, предложенной С. П. Тимошенко в 1921 году применительно к задаче динамики балки. Однако оснований для такой ассоциации довольно мало. Гипотеза С. П. Тимошенко, предполагающая суперпозицию прогиба, вызванного изгибом, и прогиба, связанного со сдвигом, была распространена на пластины в 1946 году Л. Доннеллом в статье [12], посвященной обсуждению работ Э. Рейсснера. В обозначениях настоящей работы эта теория сводится к уравнениям (9) и (10), т. е. она учитывает влияние деформации сдвига на проникающее решение, но не описывает краевое напряженное состояние. Это обстоятельство прямо отмечается Э. Рейсснером в [12], где он анализирует замечания, высказанные по его теории Л. Доннеллом, Д. Друкером и Д. Гудьиром. Необходимо подчеркнуть, что уравнение (11) описывает эффект, который является специфическим для пластин и отсутствует в балках. Действительно, рассматривая цилиндрический изгиб и полагая, что φ и ψ не зависят от y, а $\theta_y = 0$, из равенств (8) и (10) получим $\psi \equiv 0$ и обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $\varphi(x)$, что совершенно естественно, поскольку в изгибаемой балке, в отличие от пластины, на краю действуют два силовых фактора, а не три (отсутствует крутящий момент).

В связи с этим интересно отметить, что до настоящего времени не прекращаются попытки построить сдвиговую теорию, сводящуюся к уравнению шестого порядка для прогиба, например

$$D\Delta\Delta w - \alpha (D/C)\, \Delta\Delta\Delta w = p$$

где α — некоторый параметр. Очевидно, что такое уравнение в рамках сдвиговой теории первого порядка не может существовать, так как задача о цилиндрическом изгибе пластины, имеющая по два граничных условия для каждого края, сводится к уравнению шестого порядка.

Возвращаясь к истории построения сдвиговой теории пластин и еще раз подчеркивая, что основное ее отличие от классической теории и от теории Тимошенко — Доннелла связано с уравнением (11), необходимо отметить, что, по существу, оно было получено из уравнений трехмерной задачи и исследовано, как уже отмечалось, в классических работах Леви, Буссинеска, Кельвина и Тэта. Эти исследования, в результате которых был выявлен локальный характер напряженного состояния, описываемого уравнением (11), и сделан вывод о возможности не учитывать это состояние, «содействовали устранению последних затруднений, связанных с теорией Кирхгофа» [13]. Как следует из работ участников обсуждаемой дискуссии, для такого вывода нет достаточных оснований и первым, кто это показал, был Э. Рейсснер. В [11] прямо указано, что предлагаемая теория позволяет устранить сосредоточенные угловые реакции в задаче об изгибе свободно опертой пластины, и получены решения задач о кручении пластины (эта задача подробно обсуждалась в процессе дискуссии [1—4, 7]) и о концентрации напряжений в окрестности кругового отверстия, свидетельствующие о важности уравнения для краевого потенциала в теории пластин. Отсюда следует и предлагаемое название теории, сводящейся к уравнениям (10) и (11) независимо от конкретного способа их вывода. Это современная форма классической теории пластин, эволюция которой, как можно теперь заключить, не завершилась в XIX веке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даревский В. М.* О статических граничных условиях в классической теории оболочек и пластин//Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 130—133.
2. *Жилин П. А.* О классической теории пластин и преобразовании Кельвина — Тэта//Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 134—140.
3. *Васильев В. В.* О теории тонких пластин//Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 26—47.
4. *Жилин П. А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин//Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 48—64.
5. *Алфутов Н. А.* О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин//Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 65—72.

6. *Гольденвейзер А. Л.* Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана//ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96—108.
7. *Волох К. Ю.* О классической теории пластин//ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 156—165.
8. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
9. *Reissner E.* On the theory of transverse bending of elastic plates//Inter. J. Solids Struct. 1976. V. 12. № 8. P. 545—554.
10. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates//J. Math. and Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184—191.
11. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates//Trans. ASME. 1945. V. 67. P. A69—A77.
12. *Donnell L., Drucker D., Goodier J. N.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates//Trans. ASME. 1946. V. 68. P. A249—A252.
13. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М. — Л.: 1935. 674 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.III.1995