МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 593.3

© 1995 г. В. М. ДАРЕВСКИЙ

О СТАТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

Цель данной статьи — смягчить критику в [1] статических граничных условий (названных ККТ-условиями), заострить внимание на условии в угловых точках и оправдать в какой-то мере условия ККТ, укоренившиеся в расчетную практику.

1. Пусть П — срединная поверхность оболочки с толщиной h, отнесенная к своим линиям кривизны — координатным линиям α, β. Положим, что гладкая замкнутая линия L является линией β при $\alpha = \alpha_1 = \text{const}$ (как, например, параллель у оболочки вращения). Рассмотрим случай, когда край оболочки образован движением отрезка нормали вдоль указанной линии L, т.е. является нормальным сечением оболочки вдоль L, и на этом крае заданы значения T_1^c, S_{12}^c, N_1^c распределенных усилий T_1, S_{12}, N_1 (нормального, касательного и поперечного) и значения M_1^2, M_{12}^c распределенных изгибающего момента M_1 и крутящего момента M_{12} (точнее, их интенсивности). Это означает, что заданы пять статических граничных условий, которые назовем P-условиями.

В рамках классической теории оболочек (в частности, пластин) краевая задача о напряженно-деформированном состоянии (НДС) оболочки при P-условиях, вообще говоря, неразрешима. Поэтому пять P-условий принято заменять четырьмя граничными условиями, которые в соответствии с [1] будем называть условиями Кирхгофа, Кельвина, Тэта (ККТ). Они могут быть получены следующим образом.

Крутящий момент M_{12} возникает в соответствующем сечении оболочки из-за того, что в нем действуют (согласно гипотезам теории оболочек) касательные напряжения, распределенные по линейному закону по ширине сечения (по нормальной координате).

Если в сечении вдоль замкнутой гладкой линии β на каждом участке с длиной $ds = Bd\beta$ и шириной h мысленно заменить «реально» действующий крутящий момент $M_{12}ds$ статически эквивалентной ему парой фиктивных поперечных сил F с величиной M_{12}, расположенных на концах этого участка (назовем такую замену КТ-заменой), то это приведет к замене крутящего момента погонным касательным усилием $S_{12}^* = -M_{12}/R_2$ и поперечным усилием $N_1^* = (1/B)\,\partial M_{12}/\partial\beta$ (в других обозначениях с соответствующими знаками это показано в [2]). Такая замена, в свою очередь, позволяет заменить пять P-условий на вышеуказанном крае четырьмя условиями ($\alpha = \alpha_1$):

$$T_1 = T_1^c, \quad S_{12} - M_{12}/R_2 = S_{12}^c - M_{12}^c/R_2 \tag{1.1}$$

$$N_1 + \frac{1}{B}\frac{\partial M_{12}}{\partial\beta} = N_1^c + \frac{1}{B}\frac{\partial M_{12}^c}{\partial\beta}, \quad M_1 = M_1^c$$

Это и есть условия ККТ на крае вдоль замкнутой линии β ($\alpha = \alpha_1$). Аналогичные условия

$$T_2 = T_2^c, \quad S_{21} - M_{21}/R_1 = S_{21}^c - M_{21}^c/R_1$$

$$N_2 + \frac{1}{A}\frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha} = N_2^c + \frac{1}{A}\frac{\partial M_{21}^c}{\partial \alpha}, \quad M_2 = M_2^c \tag{1.2}$$

получаются на крае, образованном нормальным сечением оболочки вдоль замкнутой линии α ($\beta = \beta_1$), на котором заданы значения T_2^c, S_{21}^c, N_2^c, M_2^c, M_{21}^c погонных усилий T_2, S_{21}, N_2 и моментов M_2, M_{21} (A, B и R_1, R_2 — коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны поверхности П).

Заметим, что хотя условия ККТ получаются в результате замены крутящего момента усилиями S_{12}^*, N_1^* (S_{21}^*, N_2^*), из этого не следует, что в решении задачи о НДС оболочки при условиях ККТ крутящий момент получится равным нулю (он и не получается таким в конкретных примерах).

Далее, условия ККТ основаны на КТ-замене, т. е. на замене крутящего момента статически эквивалентной ему парой поперечных сил на каждом участке рассматриваемого края с бесконечно малой длиной и шириной h. Такая замена, согласно принципу Сен-Венана, не должна существенно сказаться на НДС оболочки вне краевой зоны шириной порядка h. Поэтому можно заключить, что решение задачи о НДС оболочки при условиях ККТ, когда край оболочки ограничен замкнутой α или β линией, будем «верным» (в той мере, в какой верна сама классическая теория оболочек) вне краевой зоны.

2. Справедливость сделанного заключения вызывает сомнение [3] в случае, когда край оболочки образован нормальными сечениями вдоль двух пар координатных линий $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_1$, $\beta = \beta_2$ (контур такого края назовем $\alpha - \beta$ контуром). В этом случае при КТ-замене на каждом из указанных сечений на концах сечения остаются поперечные силы[1] величиной M_{12} или M_{21}. То есть в угловых точках $\alpha - \beta$ контура со стороны линии β приходит сила величиной M_{12}, а со стороны линии α — сила величиной M_{21}, причем обе они имеют одинаковое направление, в силу парности касательных напряжений. Таким образом, в угловых точках $\alpha - \beta$ контура появляются поперечные силы, равные $M_{12} + M_{21}$. Назовем их K-силами, именно они вызывают сомнение в справедливости вышеуказанного заключения. Конечно, K-силы — фиктивные, как и все силы F, которыми они являются.

Поскольку в случае $\alpha - \beta$ контура КТ-замена приводит не только к появлению усилий S_{12}^*, N_1^* S_{21}^*, N_2^* в неугловых точках контура, но и к появлению K-сил, то кроме условий ККТ в неугловых точках $\alpha - \beta$ контура, должно еще выполняться условие в угловых точках

$$M_{12} + M_{21} = M_{12}^c + M_{21}^c \tag{2.1}$$

Отметим, что в теории оболочек при «уточненных» соотношениях упругости [4, 5] касательные усилия и крутящие моменты не обладают парностью, несмотря на парность касательных напряжений, а отличаются между собой на величины с малым множителем $h\,(1/R_1 - 1/R_2)$. Но при простейших соотношениях упругости в оболочке, как в пластине, $S_{12} = S_{21} = S$, $M_{12} = M_{21} = M$ и краевая нагрузка должна быть подчинена условию: $S_{12}^c = S_{21}^c = S^c$, $M_{12}^c = M_{21}^c = M^c$. Тогда условие (2.1) переходит в такое же, как и для пластины

$$M = M^c \tag{2.2}$$

[1] Это особенно ясно в случае равномерного распределения краевого крутящего момента, т. е. когда он имеет постоянную интенсивность. Тогда во всех неугловых точках $\alpha - \beta$ контура поперечные силы F взаимно уничтожаются, а остаются они только в угловых точках.

Заметим, что это условие, как и условие (2.1), получается непосредственно в результате КТ-замены, поэтому незачем его получать из «условия на разрывах», как это сделано в [1].

3. Назовем каждое из условий (2.1), (2.2) условием E. Оно обычно игнорируется, хотя без него условия ККТ, т. е. условия (1.1), (1.2) не обеспечивают, как показывают примеры, единственность решения соответствующей краевой задачи. Один из таких примеров был выявлен в [6], но наиболее простым является пример, приведенный в [1] с целью дискредитации условий ККТ, хотя мог бы быть использован для их оправдания.

4. Примером в [1] является задача о НДС прямоугольной пластины, нагруженной только краевым крутящим моментом с постоянной интенсивностью M^c. В этой задаче уравнения равновесия и условия ККТ однородны, поэтому естественно, что решением задачи в перемещениях u, v, w в прямоугольных координатах x, y оказывается

$$u = v = 0, \quad w = Cxy \tag{4.1}$$

при произвольном значении константы C с размерностью см$^{-1}$, т. е. получается не единственное решение. Но с добавлением к условиям ККТ условия E — (2.2) решением задачи будет (4.1) с единственным значением $C = -M^c/[(1-\nu)D]$, поскольку $M = -(1-\nu)D\partial^2 w/\partial x\partial y$.

При этом решении во всех точках пластины, включая граничные, из всех усилий и моментов только крутящий момент $M = M^c$ отличен от нуля, и тем самым выполняются все пять граничных условия P, при которых задача оказывается разрешимой.

Между тем, в приведенной задаче КТ-замена по существу состоит в замене краевого крутящего момента только K-силами, и тем не менее, как это ни парадоксально, условия ККТ вместе с условием E (назовем их условиями ККТЕ) приводят к тому же решению, что и условия P.

5. Рассмотренный пример может служить оправданием условий ККТ, так как он показывает, что даже при наличии K-сил условия ККТЕ могут приводить к «верному» решению вне краевой зоны и даже в этой зоне, если задача разрешима при P-условиях. Этот пример приводит еще к двум важным выводам. Во-первых, оказывается, что решение любой линейной задачи о НДС прямоугольной пластины при ККТ условиях не будет единственным. Действительно, пусть u_*, v_*, w_* — какое-то решение указанной задачи. Так как перемещения u, v, w, определяемые равенствами (4.1), являются решением соответствующей однородной задачи, то $u_* + u$, $v_* + v$, $w_* + w$, будет тоже решением исходной задачи, но другим. Во-вторых, выясняется, что задача о НДС прямоугольной пластины при симметричной нагрузке и одинаковых значениях M^c в угловых точках разрешима при условиях ККТЕ.

6. Теперь о критике условий ККТ в [1], стр. 61. Нельзя, конечно, считать, что на основании КТ-замены (на основании ККТ-теории, как сказано в [1]) решение рассмотренной задачи будет совпадать с решением задачи Лемба. КТ-замена — это только прием для введения ККТ-условий, а они приводят к непрерывному (без особенностей в углах) решению (4.1), которое не является решением задачи Лемба.

В связи с этим, несостоятельны (эклектичны) рассуждения в [1] о неуравновешенности четверти пластины. В них на основании КТ-замены считается, что в угловой точке контура четверти пластины приложена поперечная сила, а на основании решения (4. 1) — что в остальных точках этого контура поперечные силы отсутствуют. При этом забывается, что на основании того же решения (4.1) на указанном контуре действуют те же, что и на контуре всей пластины, крутящие моменты, образующие самоуравновешенную нагрузку, а сила в угловой точке заменена в решении (4.1) условием E и тем самым аннулирована.

7. Резюмируя изложенное, можно сделать следующие выводы:

если оболочка или пластина ограничена гладкой замкнутой координатной линией α или β, то решение задачи о ее НДС при условиях ККТ должно быть «верным» вне краевой задачи;

если оболочка или пластина ограничена $\alpha - \beta$ контуром, то для единственности решения задачи о ее НДС к условиям ККТ должно быть присоединено условие E. При этих условиях, если заданный краевой крутящий момент плавно стремится к нулю при переходе к угловым точкам (тогда K-силы отсутствуют), решение задачи тоже будет «верным» вне краевой зоны;

не исключено, что даже при наличии K-сил, решение задачи о НДС прямоугольной пластины при условиях ККТЕ будет «верным» вне краевой зоны.

К этому следует добавить, что любое решение задачи о НДС оболочки или пластины при заданной краевой нагрузке, даже если задача разрешима при условиях P, будет фиктивным в краевой зоне, так как нагрузить край тонкой оболочки можно только через прикрепленное к нему достаточно жесткое ребро, которое исказит НДС оболочки от заданной нагрузки в краевой зоне.

Возникает и нуждается в выяснении вопрос о разрешимости задачи о НДС оболочки при условиях ККТЕ и о разрешимости при этих условиях задачи о НДС прямоугольной пластины в общем случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жилин П. А.* О теориях Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин//Изв. АН. МТТ. № 3. 1992. С. 49—67.
2. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
3. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластинки и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. *Даревский В. М.* Изгиб прямоугольной пластинки со свободными краями, лежащей на упругом основании//Изв. АН СССР. МТТ. 1977 № 1. С. 79—90.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1994