

УДК 539.3

© 1995 г. В. В. МИХАСЬКИВ

ПОШАГОВОЕ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Полученные в [1—3] граничные интегральные уравнения трехмерных динамических задач о трещине в бесконечной упругой среде решались с помощью интегральных преобразований Лапласа или Фурье по времени [3—5]. Такой подход требует дополнительных вычислений трансформант, а затем оригиналов, и сопровождается значительным увеличением объема вычислений в случае слабостабилизирующихся во времени процессов нагружения тела с трещиной.

В настоящей работе предлагается пошаговый по времени метод решения граничных интегральных уравнений типа волнового потенциала, соответствующих трехмерным динамическим задачам теории упругости для бесконечного тела с плоской трещиной с неподвижным контуром. Метод предусматривает регуляризацию исходных интегральных уравнений ньютоновскими потенциалами и аппроксимацию искомых функций с помощью гранично-временных элементов [6]. После этого строится конечномерный аналог интегральных уравнений в виде рекуррентных по времени соотношений. Путем последовательного наращивания времени, из него определяются значения искомых функций для каждого шага по времени. Отметим, что пошаговая по времени схема решения интегральных уравнений вольтерровского типа двумерных динамических задач теории трещин предложена в [7, 8].

1. Пусть противоположные поверхности плоской трещины S , содержащейся в бесконечном упругом теле, находятся под воздействием самоуравновешенных, изменяющихся во времени t , внешних усилий. Контур трещины предполагается гладким и неподвижным, а начальные условия задачи однородными.

Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы область трещины S находилась в координатной плоскости x_1Ox_2 и противоположным поверхностям S^\pm трещины соответствовали значения $x_3 = \pm 0$. Тогда для проекций $N_j^\pm(x, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) внешних усилий, действующих на поверхности S^\pm , вследствие их самоуравновешенности имеют место равенства $N_j^+ = -N_j^- = N_j$ ($j = \overline{1, 3}$).

В [2] задача об определении скачков смещений противоположных поверхностей трещины $\beta_j(x, t)$ ($j = \overline{1, 3}$), обусловленных динамическими нагрузками, сводится к системе трех граничных интегральных уравнений в преобразованиях Лапласа по времени. В оригиналах эта система уравнений приобретает тип волнового потенциала и в безразмерных координатах представляется следующим образом:

$$\iint_{\bar{S}, \bar{t}} \frac{1}{|y - \eta|^3} \left\{ A_1 [\bar{\beta}_{(3-j)}] + \frac{[y_{(3-j)} - \eta_{(3-j)}]^2}{|y - \eta|^2} A_2 [\bar{\beta}_{(3-j)}] + \right. \\ \left. + \frac{(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2)}{|y - \eta|^2} A_2 [\bar{\beta}_j] \right\} d_\eta S = \frac{(-1)^j}{4} \bar{N}_j(y, \bar{t}) \quad (j = 1, 2), \quad y \in \bar{S} \quad (1.1)$$

$$\iint_{\bar{S}, \bar{t}} \frac{A_3 [\bar{\beta}_3]}{|y - \eta|^3} d_\eta S = -\frac{1}{4} \bar{N}_3(y, \bar{t}), \quad y \in \bar{S}$$

Здесь $y(y_1, y_2)$, \bar{t} — безразмерные координаты, причем $y_i = x_i/a$, $\bar{t} = tc_2/2a$, $a = (\text{diam } S)/2$, c_1 и c_2 — скорости распространения в теле продольных и по-

перечных волн, \bar{S} — нормированная область трещины, $\bar{S}_{y, \bar{t}}$ — часть области трещины \bar{S} , в которой временной аргумент искомым функций положителен, $\bar{N}_j(y, \bar{t}) = N_j(ay, 2a\bar{t}/c_2)/G$, G — модуль сдвига, $\bar{\beta}_j(y, \bar{t}) = \beta_j(ay, 2a\bar{t}/c_2)/a$, A_i — интегродифференциальные операторы вида

$$\begin{aligned} A_i [\bar{\beta}_j] = & a_{i1} \int_{\gamma} \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t} - \tau |y - \eta|/2) d\tau + a_{i2} \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t} - |y - \eta|/2) + \\ & + a_{i3} \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t} - \gamma |y - \eta|/2) + \frac{1}{2} |y - \eta| \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [a_{i4} \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t} - |y - \eta|/2) + \\ & + a_{i5} \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t} - \gamma |y - \eta|/2)] + \frac{1}{4} |y - \eta|^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} [a_{i6} \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t} - |y - \eta|/2) + \\ & + a_{i7} \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t} - \gamma |y - \eta|/2)], \quad \gamma = c_2/c_1 \quad (i = \bar{1}, \bar{3}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где постоянные a_{ik} образуют матрицу

$$\|a_{ik}\| = \begin{vmatrix} 12 & -21/4 & 5\gamma^2 & -5/4 & \gamma^3 & -1/4 & 0 \\ -15 & 27/4 & -6\gamma^2 & 7/4 & -\gamma^3 & -1/4 & 0 \\ 9 & -4 & 5\gamma^2 - 1 & -1 & \gamma(2\gamma^2 - 1) & 0 & 1/4(1 - 2\gamma^2)^2 \end{vmatrix}$$

Граничные интегральные уравнения (1.1), в отличие от интегральных уравнений двумерных динамических задач теории трещин [7, 8], не содержат свертки по времени. Область изменения времени в них ограничивается временем запаздывания, равном времени прохождения поперечной волной расстояния, равного диаметру трещины.

В (1.1) система уравнений при $j = 1, 2$ соответствует нагружению поверхностной трещины сдвигающими усилиями, а уравнение при $j = 3$ соответствует случаю, когда поверхности трещины нагружены растягивающими усилиями. Искомые функции должны удовлетворять начальным условиям $\bar{\beta}_j(y, \bar{t}) = \partial \beta_j(y, \bar{t})/\partial \bar{t} = 0$ ($j = \bar{1}, \bar{3}$) при $\bar{t} = 0$, и обращаться в нуль на контуре области \bar{S} , что следует из физического смысла этих функций.

Для выделения сингулярностей в интегральных уравнениях (1.1), преобразуем их посредством потенциалов ньютоновского типа к виду:

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{S}} \frac{1}{|y - \eta|^3} \left\{ \left[b_{11} + b_{21} \frac{(y_{(3-j)} - \eta_{(3-j)})^2}{|y - \eta|^2} \right] \bar{\beta}_{(3-j)}(\eta, \bar{t}) + \right. \\ & + b_{21} \frac{(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2)}{|y - \eta|^2} \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t}) \left. \right\} d_{\eta} S + \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \iint_{\bar{S}} \frac{1}{|y - \eta|} \left\{ \left[b_{12} + b_{22} \times \right. \right. \\ & \times \left. \frac{(y_{(3-j)} - \eta_{(3-j)})^2}{|y - \eta|^2} \right] \bar{\beta}_{(3-j)}(\eta, \bar{t}) + b_{22} \frac{(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2)}{|y - \eta|^2} \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t}) \left. \right\} d_{\eta} S - \\ & - 4(1 - \nu) \iint_{\bar{S}, \bar{t}} \left\{ E_1 [\bar{\beta}_{(3-j)}] + \frac{(y_{(3-j)} - \eta_{(3-j)})^2}{|y - \eta|^2} E_2 [\bar{\beta}_{(3-j)}] + \right. \\ & + \left. \frac{(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2)}{|y - \eta|^2} E_2 [\bar{\beta}_j] \right\} d_{\eta} S = (-1)^{j+1} (1 - \nu) \bar{N}_j(y, \bar{t}) \quad (j = 1, 2) \quad y \in \bar{S} \\ & b_{31} \iint_{\bar{S}} \frac{\bar{\beta}_3(\eta, \bar{t})}{|y - \eta|^3} d_{\eta} S + b_{32} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \iint_{\bar{S}} \frac{\bar{\beta}_3(\eta, \bar{t})}{|y - \eta|} d_{\eta} S - \\ & - 4(1 - \nu) \iint_{\bar{S}, \bar{t}} E_3 [\bar{\beta}_3] d_{\eta} S = (1 - \nu) \bar{N}_3(y, \bar{t}), \quad y \in \bar{S} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ν — коэффициент Пуассона, E_i — операторы вида

$$E_i [\bar{\beta}_j] = \frac{1}{|y - \eta|^3} \left\{ A_i [\bar{\beta}_j] + b_{11} + b_{22} |y - \eta|^2 \frac{\partial^2 \bar{\beta}_j(\eta, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} \right\}$$

$$b_{11} = -(1 + \nu), \quad b_{12} = (1 - \nu)/8, \quad b_{21} = 3\nu, \quad b_{22} = (1 - 2\nu)^2 / [32(1 - \nu)] \quad (1.4)$$

$$b_{31} = 1, \quad b_{32} = (12\nu - 8\nu^2 - 7) / [32(1 - \nu)]$$

Входящие в (1.3) интегралы по областям \bar{S}_y ; регулярны в силу ограниченности операторов E_i в этих областях. Ограниченность операторов E_i следует из (1.4), если воспользоваться разложением плотностей $\bar{\beta}_j(\eta, \bar{t} - \rho/2)$ ($\rho = |y - \eta|$) в ряд Тейлора по ρ в окрестности полюса $\rho = 0$.

2. Численная реализация системы сингулярных интегральных уравнений (1.3) базируется на их регулярном представлении с использованием методики регуляризации интегральных уравнений с ядрами ньютоновского типа [9]. Для дискообразной трещины, в соответствии с условием непрерывности перемещений при переходе через контур области трещины, класс искомых функций определяется соотношением

$$\bar{\beta}_j(y, \bar{t}) = \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \alpha_j(y, \bar{t}) \quad (j = \bar{1}, \bar{3}) \quad (2.1)$$

где $\alpha_j(y, \bar{t})$ — неизвестные функции, удовлетворяющие однородным начальным условиям.

Тогда регулярное представление интегральных уравнений (1.3) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{m+n=0}^2 \left[f_{mnj}(y) \frac{\partial^2 \alpha_{(3-j)}(y, \bar{t})}{\partial y_1^m \partial y_2^n} + f_{mn3}(y) \frac{\partial^2 \alpha_j(y, \bar{t})}{\partial y_1^m \partial y_2^n} \right] + g_j(y) \frac{\partial^2 \alpha_{(3-j)}(y, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} + \\ & + g_3(y) \frac{\partial^2 \alpha_j(y, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} - 4(1 - \nu) \iint_{\bar{S}_y^0, \bar{t}} \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}}{|y - \eta|^3} \left\{ A_i [\alpha_{(3-j)}] + \right. \\ & + \frac{(y_{(3-j)} - \eta_{(3-j)})^2}{|y - \eta|^2} A_2 [\alpha_{(3-j)}] + \frac{(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2)}{|y - \eta|^2} A_2 [\alpha_j] \left. \right\} d_\eta S = \\ & = (-1)^{j+1} (1 - \nu) \bar{N}_j(y, \bar{t}) \quad (j = 1, 2) \quad y \in \bar{S} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m+n=0}^2 f_{mn4}(y) \frac{\partial^2 \alpha_3(y, \bar{t})}{\partial y_1^m \partial y_2^n} + g_4(y) \frac{\partial^2 \alpha_3(y, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} - 4(1 - \nu) \times \\ & \times \iint_{\bar{S}_y^0, \bar{t}} \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}}{|y - \eta|^3} A_3 [\alpha_3] d_\eta S = (1 - \nu) \bar{N}_3(y, \bar{t}), \quad y \in \bar{S} \end{aligned}$$

где \bar{S}^0 — часть области \bar{S} , которая получается удалением из нее круговой области малого радиуса $\varepsilon < 2\bar{t}$ с центром в точке $y = \eta$, δ_{ij} — символ Кронекера

$$\begin{aligned} f_{mnj}(y) &= \frac{1}{(m+n)!} \{ b_{11} [I_{mn}(y) - I_{mn}^*(y)] + b_{21} \delta_{j2} [Z_{(m+2)n}(y) - Z_{(m+2)n}^*(y)] + \\ & + b_{21} \delta_{j1} [Z_{m(n+2)}(y) - Z_{m(n+2)}^*(y)] \}, \quad g_j(y) = b_{12} [J(y) - J^*(y)] + \\ & + b_{22} \delta_{j2} [I_{20}(y) - I_{20}^*(y)] + b_{22} \delta_{j1} [I_{02}(y) - I_{02}^*(y)] \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

$$f_{mn3}(y) = \frac{b_{21}}{(m+n)!} [Z_{(m+1)(n+1)}(y) - Z_{(m+1)(n+1)}^*(y)]$$

$$g_3(y) = b_{22} [I_{11}(y) - I_{11}^*(y)], \quad f_{mn4}(y) = \frac{b_{31}}{(m+n)!} [I_{mn}(y) - I_{mn}^*(y)]$$

$$g_4(y) = b_{32} [J(y) - J^*(y)], \quad I_{mn}(y) = \iint_{\bar{S}} \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}}{|y - \eta|^3} (\eta_1 - y_1)^m (\eta_2 - y_2)^n d_{\eta} S$$

$$Z_{mn}(y) = \iint_{\bar{S}} \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}}{|y - \eta|^s} (\eta_1 - y_1)^m (\eta_2 - y_2)^n d_{\eta} S,$$

$$J(y) = \iint_{\bar{S}} \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}}{|y - \eta|} d_{\eta} S$$

а I_{mn}^* , Z_{mn}^* , J^* имеют вид I_{mn} , Z_{mn} , J соответственно с интегрированием по области \bar{S}^0 .

В (2.2) сингулярные интегралы I_{mn} , Z_{mn} , J определяются аналитически [9] посредством перехода к локальным полярным координатам с центром в точке y , интегралы по областям $\bar{S}_{y, \bar{t}}^0$ регулярны, так как в них точка y не совпадает с точкой η .

Для построения дискретного аналога интегральных уравнений (2.2) в гранично-временной области $\bar{S} \times [0, T]$ определения этих уравнений вводится равномерная система узлов (y_q, \bar{t}_k) с шагом $\Delta r = 1/(N-1)$ по радиусу, $\Delta \varphi = 2\pi/M$ по угловой координате и $\Delta t = T/(K-1)$ по времени так, что

$$r_n = (n-1) \Delta r, \quad \varphi_m = (m-1) \Delta \varphi, \quad \bar{t}_k = (k-1) \Delta t, \quad y_{1q} = r_n \cos \varphi_m \quad (2.3)$$

$$y_{2q} = r_n \sin \varphi_m, \quad n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, K}, \quad q = \overline{1, Q}, \quad Q = N \times M$$

Дискретное решение уравнений (2.2) представляется в виде разложения по базисным функциям $\omega_q(y)$, $\vartheta_k(y)$, которые имеют локальные носители и согласуются с принципом причинности, т. е.

$$\alpha_j(y, \bar{t}) = \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K \alpha_j^{q,k} \omega_q(y) \vartheta_k(\bar{t}), \quad y \in \bar{S}, \quad \bar{t} \in [0, T] \quad (j = \overline{1, 3}) \quad (2.4)$$

$$\alpha_j^{q,k} = \alpha_j(y_q, \bar{t}_k), \quad \omega_q(y_i) = \delta_{qi}, \quad \vartheta_k(\bar{t}_i) = \delta_{ki}, \quad \vartheta_k(\bar{t}) = 0 \text{ при } \bar{t} < 0$$

Тогда конечномерный аналог системы интегральных уравнений (2.2) принимает вид рекуррентных по k соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^Q [(c_{iq}^j - d_{iqkk}^j) \alpha_{(3-j)}^{q,k} + (c_{iq}^3 - d_{iqkk}^3) \alpha_j^{q,k}] &= (-1)^{j+1} (1 - \nu) \bar{N}_j(y_i, \bar{t}_k) + \\ &+ \sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^{k-1} (d_{iqkp}^j \alpha_{(3-j)}^{q,p} + d_{iqkp}^3 \alpha_j^{q,p}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\sum_{q=1}^Q (c_{iq}^4 - d_{iqkk}^4) \alpha_3^{q,k} = (1 - \nu) \bar{N}_3(y_i, \bar{t}_k) + \sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^{k-1} d_{iqkp}^4 \alpha_3^{q,p}$$

$$j = 1, 2, \quad i = \overline{1, Q}, \quad k = \overline{2, K}$$

причем из начальных условий следует, что $\alpha_j^{q,1} = 0$, $j = \overline{1, 3}$, $q = \overline{1, Q}$.

$$c_{iq}^j = \sum_{m+n=0}^2 f_{mnj}(y_i) \frac{\partial^2 \omega_q(y)}{\partial y_1^m \partial y_2^n} \Big|_{y=y_i}, \quad d_{iqkp}^j = -g_j(y_i) \delta_{iq} \frac{\partial^2 \vartheta_p(\bar{t})}{\partial \bar{t}^2} \Big|_{\bar{t}=\bar{t}_k} + 4(1 - \nu) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \iint_{\bar{y}_0, \bar{t}} \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2} \omega_q(\eta)}{|y_l - \eta|^3} \left\{ (\delta_{j1} + \delta_{j2}) A_1 [\vartheta_p] \Big|_{\substack{\bar{t}=\bar{t}_k \\ y=y_l}} + \delta_{j4} A_3 [\vartheta_p] \Big|_{\substack{\bar{t}=\bar{t}_k \\ y=y_l}} + \right. \\ & + \frac{(y_{(3-j)} - \eta_{(3-j)}) [(y_{(3-j)} - \eta_{(3-j)}) (1 - \delta_{j3}) + (y_l - \eta_j) \delta_{j3}]}{|y_l - \eta|^2} \times \\ & \left. \times (1 - \delta_{j4}) A_2 [\vartheta_p] \Big|_{\substack{\bar{t}=\bar{t}_k \\ y=y_l}} \right\} d\eta S \quad (j = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для определения по формулам (2.6) коэффициентов c_{iq}^j и d_{iqr}^j применяются различные схемы замены производных, а при численном интегрировании используется интерполяция искоемых функций по времени и пространственным координатам с помощью сплайнов первого порядка. Т. е. зависимость от времени между узлами дискретизации задается соотношениями

$$\vartheta_k(\bar{t}) = \begin{cases} 1 - |\bar{t} - \bar{t}_k| / \Delta \bar{t} & \text{при } |\bar{t} - \bar{t}_k| \leq \Delta \bar{t} \\ 0 & \text{при } |\bar{t} - \bar{t}_k| > \Delta \bar{t} \end{cases} \quad (2.7)$$

Путем пошагового наращивания времени с учетом начальных условий и решения на каждом шаге системы линейных алгебраических уравнений (2.5) с хорошо обусловленной матрицей размерности $Q \times Q$, численно определяются значения функций α_j ($j = \overline{1, 3}$) в узлах дискретизации. Наращивание времени не увеличивает объема вычислений, так как при $\bar{t}_k > 1$ из (2.6) и (2.7) следует, что $d_{iqr}^j = 0$ для $p < P - 1$, где P определяется неравенством $\bar{t}_{p+1} \geq \bar{t}_k - 1 > \bar{t}_p$.

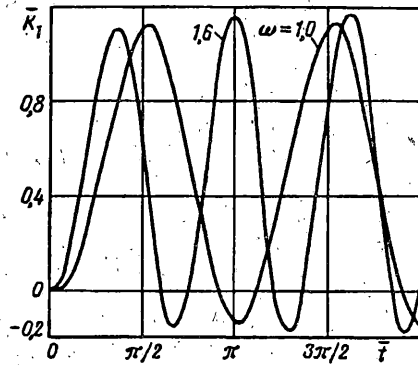
Располагая значениями α_j (y, \bar{t}), по известным формулам [2] можно определить перемещения и напряжения в теле с трещиной. В частности, динамические коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва k_1 , поперечного сдвига k_2 и продольного сдвига k_3 выражаются через функции α_j следующим образом (φ — угловая координата точки контура трещины):

$$k_1(\varphi, \bar{t}) = - \frac{2G\pi \sqrt{\pi a}}{(1 - \nu)} \alpha_3(y, \bar{t}) \Big|_{|y|=1} \quad (2.8)$$

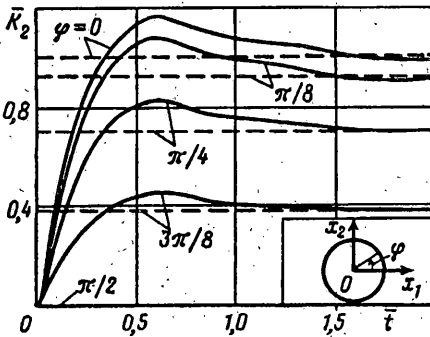
$$k_2(\varphi, \bar{t}) = - \frac{2G\pi \sqrt{\pi a}}{(1 - \nu)} [\alpha_1(y, \bar{t}) \sin \varphi - \alpha_2(y, \bar{t}) \cos \varphi] \Big|_{|y|=1}$$

$$k_3(\varphi, \bar{t}) = 2G\pi \sqrt{\pi a} [\alpha_1(y, \bar{t}) \cos \varphi + \alpha_2(y, \bar{t}) \sin \varphi] \Big|_{|y|=1}$$

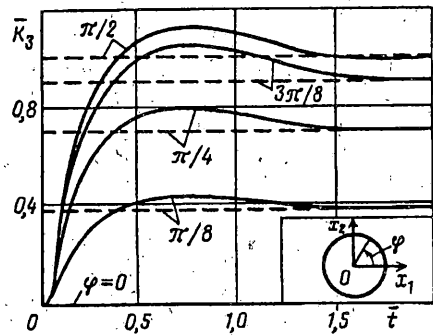
3. На фиг. 1—3 показаны зависимости коэффициентов интенсивности напряжений $\bar{K}_i = k_i/k_{ic}$, нормированных с помощью статических аналогов k_{ic} [9], от времени \bar{t} для дискообразной трещины при различных видах ее нагружения. Кривые на фиг. 1 соответствуют растяжению поверхностей трещины усилиями $\bar{N}_3(y, \bar{t}) = N_0 \sin^2(\omega \bar{t})/G$ ($N_0 = \text{const}$, $k_{ic} = 2N_0 \sqrt{a/\pi}$), а кривые на фиг. 2, 3 соответствуют сдвигу поверхностей трещины усилиями $N_1(y, \bar{t}) = N_0 H(\bar{t})/G$, $\bar{N}_2(y, \bar{t}) = 0$ ($N_0 = \text{const}$, $H(\bar{t})$ — функция Хевисайда, $k_{2c} = 4N_0 \sqrt{a}/\sqrt{\pi} (2 - \nu)$, $k_{3c} = 4(1 - \nu) N_0 \sqrt{a}/\sqrt{\pi} (2 - \nu)$). В случае рассмотренных сдвигающих нагрузок коэффициенты интенсивности напряжений продольного и поперечного сдвига меняются по контуру трещины, поэтому на фиг. 2, 3 представлены зависимости \bar{K}_i ($i = 2, 3$) от \bar{t} в различных точках контура трещины (отсчет угла φ указан на фигурах, штриховые прямые соответствуют значениям статических коэффициентов интенсивности напряжений). Достаточная степень точности расчетов обеспечивалась для симметричной задачи при $\Delta r = 1/10$, $\Delta \varphi = \pi/6$, $\Delta \bar{t} = \pi/36\omega$, для антисимметричной задачи — при $\Delta r = 1/6$, $\Delta \varphi = \pi/8$, $\Delta \bar{t} = 0,2$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Из фиг. 1 следует, что динамический переход коэффициентов интенсивности напряжений \bar{K}_1 в установившийся режим изменения осуществляется при $\omega = 1,0$ на втором цикле гармонического нагружения поверхностей трещины, и при $\omega = 1,6$ — на третьем цикле. Этот переход характеризуется постепенным наращиванием амплитуды и фазового сдвига \bar{K}_1 к соответствующим значениям для установившихся колебаний [10, 11]. Т. е. амплитуда коэффициентов интенсивности напряжений, найденная из решения задачи об установившихся колебаниях пространства с трещиной, является экстремальным значением \bar{K}_1 для данного вида нагружения. Наличие отрицательных значений \bar{K}_1 на фиг. 1 свидетельствует о том, что растягивающие колебательные нагрузки на поверхности трещины могут вызвать в отдельные моменты времени сжимающие усилия в окрестности контура трещины.

При рассмотренных сдвигающих усилиях коэффициенты интенсивности напряжений поперечного и продольного сдвигов (фиг. 2, 3) возрастают во времени к пиковым значениям \bar{K}_2^{\max} и \bar{K}_3^{\max} , а затем уменьшаются к соответствующим статическим значениям. Максимумы \bar{K}_2^{\max} и \bar{K}_3^{\max} , как и в статическом случае, достигаются в точках контура $\varphi = 0, \pi$ и $\varphi = \pm\pi/2$ соответственно, причем $\bar{K}_2^{\max} = 1,16$ при $\bar{t} = 0,6$, и $\bar{K}_3^{\max} = 1,12$ при $\bar{t} = 0,75$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В. Интегродифференциальные уравнения нестационарной динамической пространственной задачи о трещине в упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 74—80.
2. Михаськив В. В., Хай М. В. Сведение к интегральным уравнениям динамических трехмерных задач теории упругости для тел с произвольно расположенными плоскими разрезами // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 943—950.

3. *Sladek V., Sladek J., Balaš J.* Boundary integral formulation of crack problems//ZAMM. 1986. V. 66. No. 2. P. 83—94.
4. *Михаськив В. В., Хай М. В.* Решение динамических задач теории упругости для тел с трещинами посредством преобразования Фурье//Докл. АН УССР. 1987. Сер. А. № 11. С. 27—30.
5. *Капцов А. В., Шифрин Е. И.* Решение динамических задач об эллиптической трещине в упругом пространстве с помощью аппроксимаций Паде//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 511—519.
6. *Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанс. ун-та, 1986. 295 с.
7. *Zhang Ch., Achenbach J. D.* Time — domain boundary element analysis of dynamic near-tip fields for impact-loaded collinear cracks//Eng. Fract. Mech. 1989. V. 32. No. 6. P. 899—909.
8. *Israil A. S. M., Dargush G. F.* Dynamic fracture mechanics studies by time-domain bem//Eng. Fract. Mech. 1991. V. 39. No. 2. P. 315—328.
9. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1989. 273 с.
10. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение, 1985. 263 с.
11. *Михаськив В. В., Хай М. В.* Прочность бесконечного тела с дискообразной трещиной, находящегося под действием циклических нагрузок//Пробл. прочности. 1987. № 1. С. 13—16.

Львов

Поступила в редакцию
1.IV.1993