

УДК 531.39

© 1995 г. А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, В. А. СТОРОЖЕНКО, М. Е. ТЕМЧЕНКО

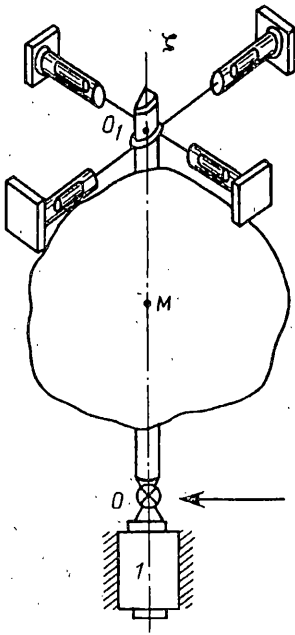
О ВЛИЯНИИ ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Исследуется устойчивость вертикального вращения твердого тела при наличии внешнего и внутреннего трений. Показано, что в случае осесимметричного тела существует вращающаяся с определенной угловой скоростью система координат, выбор которой в качестве опорной позволяет избавиться в уравнениях движения от неконсервативных позиционных членов, вызванных наличием упомянутых двух видов трения. Установлен стабилизирующий эффект от совокупного влияния внешнего и внутреннего трений при вращении выпрямленного вытянутого тела. Введена система вращающихся демпфирующих устройств, приводящая к асимптотической устойчивости как симметричного, так и несимметричного твердых тел.¹

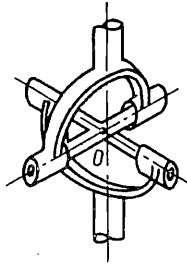
1. При изучении влияния сил сопротивления, в частности трения, на устойчивость движения вращающихся механических систем было замечено, что не всегда эти силы оказывают демпфирующее действие. Напротив, известны случаи, когда силы трения могут быть причиной неустойчивости таких систем. Впервые, по-видимому, на это обратил внимание Кимбалл [1], который рекомендовал различать две группы сил трения. К первой группе относятся силы трения между вращающимися частями механической системы и неподвижными ее частями или неподвижной окружающей средой. Такое трение принято называть внешним. Силы же внутреннего трения возникают при относительных смещениях вращающихся частей системы друг относительно друга, а также при взаимодействии этих частей с окружающей средой, если последняя не является неподвижной, а увлекается вращающимися частями. Роль этих двух различных групп трения изучалась в ряде работ, посвященных теории устойчивости упругих систем (см., например [2—5]). Было обнаружено, что внешнее трение оказывает стабилизирующее влияние на их движение, тогда как силы внутреннего трения при определенных условиях, способствуют самовозбуждению колебаний систем и тем самым являются причиной их неустойчивости. Некоторые аналогии с результатами, полученными в теории упругих вращающихся систем, были обнаружены при исследовании гироскопических компасов [6]. Ниже приводится пример механической системы, в которой наличие как внутреннего, так и внешнего трений каждого в отдельности приводит к неустойчивости движения системы, а в совокупности эти две разновидности трения при определенном соотношении между ними оказывают стабилизирующее действие.

Рассмотрим движение однородного твердого тела массы m (возможно и динамически несимметричного) с главными центральными моментами инерции A , B , C (фиг. 1). Тело прикреплено к валу вертикально расположенного электродвигателя (1) посредством шарнира Гука. Двигатель сообщает телу вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикали ζ , проходящей через точку O и совпадающей с осью двигателя. Примем, что точка O находится на одной из главных центральных осей инерции тела. Таким

¹ Работа выполнена частично при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.



Фиг. 1



Фиг. 2

образом, в невозмущенном движении упомянутая главная центральная ось инерции тела совпадает с осью ζ неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$, начало которой находится в центре шарнира Гука O .

В системе предусмотрены жидкостные демпфирующие устройства, расположенные в горизонтальной плоскости на расстоянии a_* от центра O шарнира Гука (фиг. 1). Демпфирующие устройства создают силы сопротивления отклонению тела от вертикали, пропорциональные скоростям перемещений поршней, вызванных этим отклонением. При игнорировании массой поршней силы сопротивления можно представить следующим образом:

$$F_{\xi} = -k\dot{\xi}_{01}, \quad F_{\eta} = -k\dot{\eta}_{01} \quad (1.1)$$

где k — коэффициент вязкого сопротивления демпферов, ξ_{01} и η_{01} — координаты в системе $\xi\eta\zeta$ точки O_1 пересечения оси вращения тела с горизонтальной плоскостью, в которой расположены демпфирующие устройства.

Введем систему координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$, вращающуюся с постоянной скоростью ω вокруг оси ζ неподвижной системы $\xi\eta\zeta$. С телом жестко свяжем систему координат xuz с началом в точке O и осью z , проходящей через его центр масс M . Положение системы xuz , а значит и самого тела, относительно вращающейся системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$, определим двумя углами α и β так, как показано на фиг. 2.

Учтем моменты сил вязкого сопротивления в шарнире Гука, считая их пропорциональными (с коэффициентом пропорциональности μ) угловым скоростям $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ отклонений тела от вертикали во вращающейся системе координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$. Тогда будем иметь

$$M_{\alpha} = -\mu\dot{\alpha}, \quad M_{\beta} = -\mu\dot{\beta} \quad (1.2)$$

Согласно приведенной выше классификации, трение во вращающемся шарнире Гука следует считать внутренним, в то время как силы (1.1), создаваемые демпфирующими устройствами, являются силами внешнего трения.

Проекции вектора угловой скорости системы координат xuz на ее же собственные оси выражаются посредством формул

$$\omega_x = \dot{\alpha} \cos \beta - \omega \sin \beta \cos \alpha \quad (1.3)$$

$$\omega_y = \dot{\beta} + \omega \sin \alpha, \quad \omega_z = \dot{\alpha} \sin \beta + \omega \cos \beta \cos \alpha$$

Координаты центра масс M тела в неподвижной системе $\xi\eta\zeta$ представляются в виде

$$\xi_M = a (\sin \beta \cos \omega t + \sin \alpha \cos \beta \sin \omega t) \quad (1.4)$$

$$\eta_M = a (\sin \beta \sin \omega t - \sin \alpha \cos \beta \cos \omega t), \quad \zeta_M = a \cos \alpha \cos \beta$$

где a — расстояние между центром масс M и центром шарнира Гука O .

Формулы, аналогичные (1.4), определяют и координаты ξ_{01} , η_{01} , ζ_{01} точки O_1 , однако при этом следует заменить в них параметр a на введенную ранее величину a_* .

Уравнения движения исследуемой системы будем составлять в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad (q_1 = \alpha, q_2 = \beta) \quad (1.5)$$

$$L = \frac{1}{2} [(A + ma^2) \omega_x^2 + (B + ma^2) \omega_y^2 + C \omega_z^2] - mg \zeta_M$$

где $L = T - \pi$ — функция Лагранжа, Q_j — обобщенные силы, в состав которых входят моменты сил трения в шарнире Гука (1.2), а также моменты относительно осей ξ и η сил F_ξ и F_η , создаваемых демпфирующими устройствами

$$M_{\xi_1} = a_* (-F_\eta \cos \omega t + F_\xi \sin \omega t) \quad (1.7)$$

$$M_{\eta_1} = a_* (F_\eta \sin \omega t + F_\xi \cos \omega t) \cos \alpha$$

Учитывая полученные соотношения и ограничиваясь в уравнениях (1.5) членами лишь первого порядка малости относительно обобщенных координат α , β и их производных по времени, приходим к следующей системе уравнений:

$$A^\circ \ddot{\alpha} + (ka_*^2 + \mu) \dot{\alpha} - (A^\circ + B^\circ - C) \omega \dot{\beta} + [-mga + \omega^2 (C - B^\circ)] \alpha - ka_*^2 \omega \beta = 0 \quad (1.8)$$

$$B^\circ \ddot{\beta} + (ka_*^2 + \mu) \dot{\beta} + (A^\circ + B^\circ - C) \omega \dot{\alpha} + [-mga + \omega^2 (C - A^\circ)] \beta + ka_*^2 \omega \alpha = 0$$

$$(A^2 = A + ma^2, \quad B^2 = B + ma^2)$$

2. Рассмотрим вначале движение осесимметричного тела ($A^\circ = B^\circ$). Система уравнений (1.8), описывающих его малые колебания около вертикали, в этом случае имеет вид

$$A^\circ \ddot{\alpha} + (ka_*^2 + \mu) \dot{\alpha} + (C - 2A^\circ) \omega \dot{\beta} - [mga + \omega^2 (A^\circ - C)] \alpha - ka_*^2 \omega \beta = 0$$

$$A^\circ \ddot{\beta} + (ka_*^2 + \mu) \dot{\beta} - (C - 2A^\circ) \omega \dot{\alpha} - [mga + \omega^2 (A^\circ - C)] \beta + ka_*^2 \omega \alpha = 0 \quad (2.1)$$

Заметим, что при исследовании устойчивости линейных механических систем члены соответствующих уравнений обычно трактуются как некоторые силы [7, 8]. С этой точки зрения уравнения (2.1) можно рассматривать как результат действия на потенциальную систему

$$A^\circ \ddot{\alpha} - [mga + \omega^2 (A^\circ - C)] \alpha = 0 \quad A^\circ \ddot{\beta} - [mga + \omega^2 (A^\circ - C)] \beta = 0 \quad (2.2)$$

гироскопических сил $(C - 2A^\circ) \dot{\beta}$, $-(C - 2A^\circ) \dot{\alpha}$, диссипативных сил $(ka_*^2 + \mu) \dot{\alpha}$, $(ka_*^2 + \mu) \dot{\beta}$ и неконсервативных позиционных сил $-ka_*^2 \omega \beta$, $ka_*^2 \omega \alpha$. Последние еще называют псевдогироскопическими силами или силами радиальной коррекции

[8]. Они вносят некоторое неудобство при исследовании устойчивости, так как их наличие не дает возможности непосредственно применить известные теоремы Томсона — Тэта — Четаева [7, 8]. Однако неконсервативные силы в уравнениях (2.1) исчезнут, если положить $k=0$, и тем самым не учитывать пока действие на тело внешнего трения, т. е. трения в жидкостных демпфирующих устройствах. В этом случае становится возможным применение теоремы Томпсона — Тэта — Четаева, согласно которой равновесие системы, устойчивое при одних потенциальных силах, остается таким же при добавлении гироскопических и диссипативных сил. Оно становится асимптотически устойчивым, если диссипативные силы обладают полной диссипацией. Если же изолированное равновесие под действием одних потенциальных сил неустойчиво, то оно остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией.

В рассматриваемом случае ($k=0$) диссипативным силам $\mu\dot{\alpha}$, $\mu\dot{\beta}$ соответствует определенно положительная функция Рэлея [7]:

$$D = 1/2\mu (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \quad (2.3)$$

и следовательно, диссипация энергии является полной. Тогда, согласно приведенной выше теореме, устойчивость тривиального решения системы уравнений (2.1) полностью определяется знаком коэффициента при обобщенных координатах α и β в уравнениях (2.2):

$$c = - [mga + \omega^2 (A^\circ - C)] \quad (2.4)$$

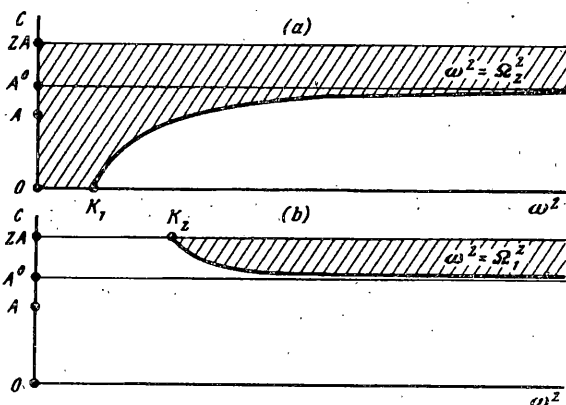
При $c > 0$ тривиальное решение системы уравнений (2.1) является асимптотически устойчивым, а при $c < 0$ — неустойчивым. В результате после простейшего анализа выражения (2.4) устойчивость тела при наличии внутреннего трения в шарнирах Гука может быть охарактеризована при помощи следующей таблицы: $\Omega_1 = [mga / (C - A^\circ)]^{1/2}$, $\Omega_2 = [mga / (A^\circ - C)]^{1/2}$:

Положение и форма тела	Характеристика устойчивости
I. Выпрямленное тело ($a > 0$):	
1. Вытянутое ($A^\circ > C$)	неустойчивость при любом $\omega \in [0, \infty)$
2. Сплюснутое ($A^\circ < C$)	неустойчивость при $\omega \in [0, \sqrt{\frac{mga}{C - A^\circ}})$, асимптотическая устойчивость при $\omega \in (\sqrt{\frac{mga}{C - A^\circ}}, \infty)$
II. Висящее тело ($a < 0$):	
1. Вытянутое ($A^\circ > C$)	асимптотическая устойчивость при $\omega \in [0, \sqrt{\frac{mga}{A^\circ - C}})$, неустойчивость при $\omega \in (\sqrt{\frac{mga}{A^\circ - C}}, \infty)$
2. Сплюснутое ($A^\circ < C$)	асимптотическая устойчивость при любом $\omega \in [0, \infty)$

Пользуясь этой таблицей, изобразим картину устойчивости в плоскости двух характерных параметров $\omega \in (0, \infty)$ и $C \in (0, 2A)$. На фиг. 3 для висящего (фиг. 3, а) и выпрямленного (фиг. 3, в) тел заштрихованным участкам соответствуют зоны асимптотической устойчивости, незаштрихованным — зоны неустойчивости.

Исследуем теперь влияние на устойчивость тела внешнего трения, т. е. вязкого трения в демпфирующих устройствах. Для этого в уравнениях (2.1) произведем замену переменных

$$x = \alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t, \quad y = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t. \quad (2.5)$$



Фиг. 3

Нетрудно заметить, пользуясь фиг. 2, что поскольку углы α и β характеризуют отклонение оси симметрии тела от вертикали во вращающейся системе координат ξ, η, ζ , то переменные x и y описывают то же самое отклонение относительно неподвижной системы ξ, η, ζ . В этих переменных уравнения (2.1) будут следующими:

$$A^0 \ddot{x} + (ka_*^2 + \mu) \dot{x} + C\omega y - mgax + \mu\omega y = 0 \quad (2.6)$$

$$A^0 \ddot{y} + (ka_*^2 + \mu) \dot{y} - C\omega x - mgy - \mu\omega x = 0$$

Уравнения (2.6) имеют ту же структуру, что и исходные уравнения (2.1), существенным отличием при этом является то, что неконсервативные позиционные силы $\mu\omega y$ и $-\mu\omega x$ в уравнениях (2.6) порождены наличием внутреннего трения, тогда как аналогичные силы $-ka_*^2\omega\beta$ и $ka_*^2\omega\alpha$ в уравнениях (2.1) возникают за счет внешнего трения. Это дает возможность, положив в уравнениях (2.6) $\mu = 0$, исследовать влияние внешнего трения на устойчивость системы, рассматривая воздействие на потенциальную систему

$$A^0 \ddot{x} - mgax = 0, \quad A^0 \ddot{y} - mgy = 0 \quad (2.7)$$

гироскопических сил $C\omega y$, $-C\omega x$ и диссипативных $ka_*^2\dot{x}$, $ka_*^2\dot{y}$. Последние обладают, как и в предыдущем случае, полной диссипацией. Вновь применяя теорему Томсона — Тэта — Четаева, приходим к заключению, что при наличии внешнего трения движение тела вокруг вертикали асимптотически устойчиво, если тело висящее ($a < 0$), и неустойчиво в случае, когда оно является выпрямленным ($a > 0$). Анализ полученных результатов показывает, что есть определенные различия во влиянии внешнего и внутреннего трений на устойчивость вращения твердого тела с одной закрепленной точкой. Так, в случае висящего тела наличие внутреннего трения приводит к появлению зоны неустойчивости $\omega \in \sqrt{mga/(A^0 - C)}$, ∞ в то время как при действии внешнего трения висящее тело асимптотически устойчиво при произвольном значении угловой скорости. Это аналогично действию внутреннего и внешнего трений на устойчивость гибкого вращающегося вала или жесткого вала в упругих подшипниках [3, 4]. В случае же выпрямленного тела, напротив, имеется лишь одна зона асимптотической устойчивости $\omega \in \sqrt{mga/(A^0 - C)}$, ∞ для сплюснутого тела при наличии внутреннего трения. В других случаях выпрямленное тело неустойчиво. В частности, выпрямленное вытянутое тело ($a > 0$, $A^0 > C$) неустойчиво при любом $\omega \in [0, \infty)$ как при воздействии внутреннего, так и внешнего трений.

3. Рассмотрим теперь вопрос о совокупном влиянии внешнего и внутреннего трений на устойчивость движения твердого тела. Как уже было замечено, система уравнений (2.1), описывающая движение тела в данном случае, равно как и

эквивалентная ей система (2.6), содержат неконсервативные позиционные члены. Однако, как оказалось, существует преобразование, позволяющее избавиться от таких членов и в этом случае. Для доказательства систему уравнений (2.6) предварительно представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} A^{\circ}\ddot{x} + \mu_1\ddot{x} + C\omega\dot{y} - mgax + \mu_1\omega_1y &= 0 \\ A^{\circ}\ddot{y} + \mu_1\ddot{y} - C\omega\dot{x} - mgay - \mu_1\omega_1x &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\mu_1 = ka_*^2 + \mu, \quad \omega_1 = \frac{\mu}{\mu + ka_*^2} \omega \quad (3.2)$$

Форма уравнений (3.1) подсказывает замену переменных

$$u = x \cos \omega_1 t + y \sin \omega_1 t, \quad v = -x \sin \omega_1 t + y \cos \omega_1 t \quad (3.3)$$

в результате которой эти уравнения преобразуются к следующим:

$$\begin{aligned} A^{\circ}\ddot{u} + \mu_1\ddot{u} + (\omega C - 2\omega_1 A^{\circ})\dot{v} + [-mga - \omega_1^2 A^{\circ} + \omega\omega_1 C]u &= 0 \\ A^{\circ}\ddot{v} + \mu_1\ddot{v} - (\omega C - 2\omega_1 A^{\circ})\dot{u} + [-mga - \omega_1^2 A^{\circ} + \omega\omega_1 C]v &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тем самым убеждаемся, что и при совокупном воздействии на движение тела внешнего и внутреннего трений существует некоторая система координат, выбор которой в качестве опорной не ведет к появлению в уравнениях движения неконсервативных позиционных сил. Эта система вращается относительно неподвижного трехгранника $\xi\eta\zeta$ с угловой скоростью ω_1 , которая согласно второй из формул (3.2) меньше угловой скорости ω вращения самого тела.

К исследованию устойчивости решения уравнений (3.4) вновь можно применить теорему Томпсона — Тэта — Четаева. Итак, рассмотрим устойчивость потенциальной системы

$$\begin{aligned} A^{\circ}\ddot{u} + [-mga - \omega_1^2 A^{\circ} + \omega\omega_1 C]u &= 0 \\ A^{\circ}\ddot{v} + [-mga - \omega_1^2 A^{\circ} + \omega\omega_1 C]v &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

находящейся под воздействием гироскопических сил $(\omega C - 2\omega_1 A^{\circ})\dot{v}$, $-(\omega C - 2\omega_1 A^{\circ})\dot{u}$ и диссипативных сил $\mu_1\dot{u}$, $\mu_1\dot{v}$. Последние обладают полной диссипацией, поэтому тривиальное решение системы уравнений (3.4) будет асимптотически устойчивым при выполнении неравенства

$$-mga - \omega_1^2 A^{\circ} + \omega\omega_1 C > 0 \quad (3.6)$$

и неустойчивым, если это неравенство не выполняется.

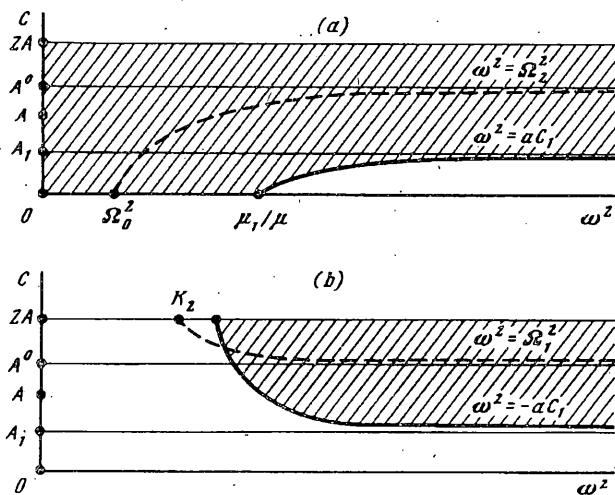
При использовании второй из формул (3.2) неравенство (3.6) преобразуется к виду

$$-mga - \frac{\mu}{\mu + ka_*^2} \left(\frac{\mu}{\mu + ka_*^2} A^{\circ} - C \right) \omega^2 > 0 \quad (3.7)$$

Для висящего ($a < 0$) тела неравенство (3.6) удовлетворяется для всех $\omega \in [0, \infty)$ в случае, когда $C \geq A^{\circ}\mu/(\mu + ka_*^2)$. Для малых же значений C , удовлетворяющих неравенству $C < A^{\circ}\mu/(\mu + ka_*^2)$, условие устойчивости можно представить в форме

$$\omega^2 < \frac{mg|a|}{A^{\circ} - C(1 + ka_*^2/\mu)} \left(1 + \frac{ka_*^2}{\mu} \right)^2 \quad (3.8)$$

На плоскости (ω, C) в этом случае получаем область устойчивости, изображенную на фиг. 4, а. Сравнивая фиг. 4, а и фиг. 3, а, замечаем, что наличие внешнего трения уменьшает зону неустойчивости, вызванную внутренним



Фиг. 4

трением. В частности, в случае $C=0$ (абсолютно тонкий и жесткий стержень) для критической скорости, отделяющей зону асимптотической устойчивости от зоны неустойчивости, имеет место аналог известной формулы, полученной для вращающегося упругого вала или жесткого вала в упругих подшипниках [3]:

$$\omega = \Omega_0 (1 + ka_*^2/\mu), \quad \Omega_0 = \sqrt{mg |a|/A^0} \quad (3.9)$$

Качественно иной результат получаем при рассмотрении выпрямленного тела ($a > 0$). Из неравенства (3.7) определим для этого случая выражение для критической скорости

$$\omega_*^2 = \frac{mga}{\xi [C - \xi A^0]}, \quad \xi = \frac{\mu}{\mu + ka_*^2} \quad (3.10)$$

Картина устойчивости для одного из значений $\xi \in [0, 1]$ изображена на фиг. 4, в. Из рисунка видно, что при определенном значении угловой скорости асимптотически устойчивым может быть не только выпрямленное сплюснутое тело ($A^0 < C$), но и вытянутое, если его параметры удовлетворяют неравенству

$$A^0 > C > \xi A^0 = \frac{\mu}{\mu + ka_*^2} A^0 \quad (3.11)$$

Это несколько неожиданно, если вспомнить, что, согласно показанному выше, выпрямленное вытянутое тело неустойчиво как при наличии внешнего, так и внутреннего трений. Оказывается, что совокупное влияние этих двух видов трения может приводить к стабилизации вращения твердого тела.

Функция $\omega_*^2(\xi)$, определяемая формулой (3.10), имеет минимум при значении $\xi = C/2A^0$. Этот минимум равен

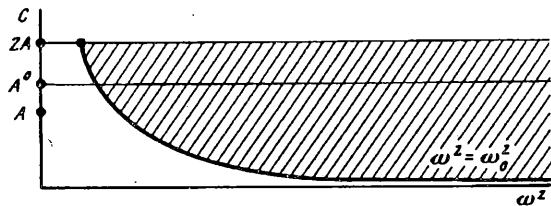
$$\omega_0^2 = 4mgaA^0/C^2 \quad (3.12)$$

Таким образом, если соотношение между внутренним и внешним трениями таково, что выполняется равенство

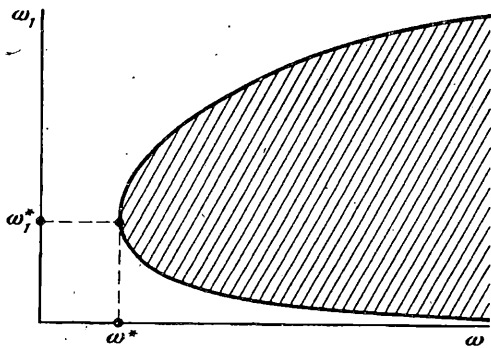
$$\xi = \mu/(\mu + ka_*^2) = 1/2 C/A^0 \quad (3.13)$$

то движение тела будет асимптотически устойчивым, если выполняется известное условие Майевского — Четаева [7]:

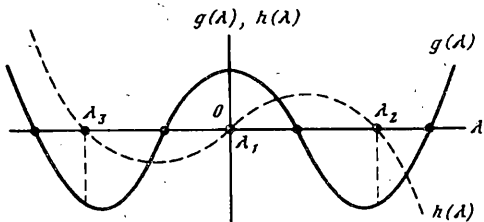
$$\omega^2 > \omega_0^2 = 4mgaA^0/C^2 \quad (3.14)$$



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

В плоскости параметров (ω, C) зона асимптотической устойчивости тела при $\mu/(\mu + ka_*^2) = 1/2 C/A^0$ изображена на фиг. 5.

4. Представление системы уравнений, описывающих движение симметричного тела около вертикали под совокупным воздействием внутреннего и внешнего трений, в форме (3.1) приводит к идее создания системы вращающихся демпфирующих устройств для стабилизации вертикального вращения тела. Действительно, точно такую же систему уравнений получим, если будем рассматривать трение в шарнире Гука (фиг. 1) отсутствующим, коэффициент вязкого трения в демпфирующих устройствах равным

$$k_1 = \mu_1/a_*^2 = k + \mu/a_*^2 \quad (4.1)$$

а сами устройства считать не неподвижными, а вращающимися с определяемой из второй формулы (3.2) угловой скоростью ω_1 в ту же сторону, что и само тело.

Условием асимптотической устойчивости тела с такими вращающимися демпфирующими устройствами является выполнение неравенства (3.6), которое эквивалентно следующим двум неравенствам:

$$\frac{\omega}{2} \frac{C\omega - \sqrt{C^2\omega^2 - 4A^0mga}}{A^0\omega} < \omega_1 < \frac{\omega}{2} \frac{C\omega + \sqrt{C^2\omega^2 - 4A^0mga}}{A^0\omega} \quad (4.2)$$

Последние неравенства имеют смысл лишь для тех значений угловой скорости ω , которые удовлетворяют условию Майевского — Четаева (3.14). На фиг. 6 в плоскости параметров (ω, ω_1) показана область асимптотической устойчивости тела. Интересно отметить, что условия (4.2) для выбора параметра ω_1 — угловой скорости вращения демпфирующих устройств — не содержат коэффициента вязкости k_1 или, что то же, μ_1 . Таким образом, при любом отличном от нуля значении коэффициента вязкости жидкости в демпфирующих устройствах вращение тела будет асимптотически устойчивым, как только угловая скорость вращения этих устройств будет удовлетворять условиям (4.2).

5. Исследуем теперь устойчивость вертикального вращения несимметричного твердого тела при наличии внешнего и внутреннего трений. Для этого обратимся к уравнениям (1.8), которые посредством обозначений (3.2) преобразуем к виду

$$A^\circ \ddot{\alpha} + \mu_1 \dot{\alpha} + (C - A^\circ - B^\circ) \omega \dot{\beta} + [-mga + \omega^2(C - B^\circ) \alpha - \mu_1(\omega - \omega_1) \beta] = 0 \quad (5.1)$$

$$B^\circ \ddot{\beta} + \mu_1 \dot{\beta} - (C - A^\circ - B^\circ) \omega \dot{\alpha} + [-mga + \omega^2(C - A^\circ) \beta + \mu_1(\omega - \omega_1) \alpha] = 0$$

Вновь, как и выше, совокупное влияние внутреннего и внешнего трений здесь интерпретируется одной вращающейся системой демпфирующих устройств с угловой скоростью ω_1 и суммарным коэффициентом трения μ_1 .

Уравнения (5.1) содержат неконсервативные позиционные члены $\mu_1(\omega - \omega_1)\alpha$ и $-\mu_1(\omega - \omega_1)\beta$. Из-за несимметричности системы ($A^\circ \neq B^\circ$) в данном случае не удастся избавиться от этих членов посредством используемых выше замен переменных и, как следствие, не удастся применить к исследованию устойчивости решений системы (5.1) теоремы Томсона — Тэта — Четаева. Поэтому в данном случае приходится применить метод установления устойчивости, основанный на исследовании свойств корней характеристического уравнения системы (5.1). Если решение данной системы уравнений представить в виде

$$\alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}, \quad \beta = \beta_0 e^{\lambda t} \quad (5.2)$$

то упомянутое характеристическое уравнение может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} A^\circ B^\circ \lambda^4 - i\mu_1(A^\circ + B^\circ)\lambda^3 + \{\omega^2[(A^\circ - C)(C - B^\circ) - A^\circ B^\circ] + \\ + mga(A^\circ + B^\circ) - \mu_1^2\}\lambda^2 + i\mu_1[-2mga + \omega^2(2C - A^\circ - B^\circ) - \\ - 2\omega(\omega - \omega_1)(C - A^\circ - B^\circ)]\lambda + [mga + \omega^2(B^\circ - C)][mga + \\ + \omega^2(A^\circ - C)] + \mu_1^2(\omega - \omega_1)^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Условием асимптотической устойчивости движения в данном случае с учетом соотношений (5.2) является требование положительности мнимых частей всех корней характеристического уравнения (5.3). Существует ряд методов решения этой задачи (см., например, [9]). В данном исследовании для выяснения качественной картины распределения корней этого уравнения используем метод Ю. И. Неймарка и теорему Эрмита — Билера [9, 10]. С этой целью находящийся в левой части уравнения (5.3) полином представим в виде

$$p(\lambda) = g(\lambda) + ih(\lambda) \quad (5.4)$$

где $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ — многочлены с вещественными коэффициентами, определяемые из равенств

$$\begin{aligned} g(\lambda) = A^\circ B^\circ \lambda^4 + \{\omega^2[(A^\circ - C)(C - B^\circ) - A^\circ B^\circ] + mga(A^\circ + B^\circ) - \mu_1^2\}\lambda^2 + \\ + [mga + \omega^2(B^\circ - C)][mga + \omega^2(A^\circ - C)] + \mu_1^2(\omega - \omega_1)^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} h(\lambda) = -\mu_1 \lambda [(A^\circ + B^\circ)\lambda^2 + 2mga - \omega^2(2C - A^\circ - \\ - B^\circ) + 2\omega(\omega - \omega_1)(C - A^\circ - B^\circ)] \end{aligned}$$

Заметим, что степень полинома $g(\lambda)$ превышает на единицу степень полинома $h(\lambda)$, а коэффициенты при высших степенях этих полиномов имеют разные знаки. В этом случае, согласно методу Ю. И. Неймарка, по крайней мере один из корней полинома (5.4) обязательно будет располагаться в верхней полупло-

скости [10, 9]. На основании же теоремы Эрмита — Билера [9] необходимым и достаточным условием того, что все корни данного полинома лежат по одну сторону от действительной оси является вещественность и перемежаемость корней полиномов (5.5). Таким образом, в рассматриваемом случае вещественность и перемежаемость корней полиномов $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ является необходимым и достаточным условием расположения всех корней полинома (5.4) в верхней полуплоскости.

Полином $h(\lambda)$ имеет три корня

$$\lambda_1 = 0; \lambda_{2,3} = \pm \left[\omega^2 - 2 \frac{mga}{A^\circ + B^\circ} + 2 \left(\frac{C}{A^\circ + B^\circ} - 1 \right) \omega \omega_1 \right]^{1/2} \quad (5.6)$$

Все они действительны при выполнении неравенства

$$\omega^2 (A^\circ + B^\circ) - 2 (A^\circ + B^\circ - C) \omega \omega_1 - 2mga > 0 \quad (5.7)$$

Учитывая, что $g(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow -\infty$, условием того, что корни полинома $g(\lambda)$ действительны и перемежаются с корнями полинома $h(\lambda)$, является согласно фиг. 7 выполнение следующих трех неравенств:

$$g(0) = [mga + \omega^2 (B^\circ - C)] [mga + \omega^2 (A^\circ - C)] + \mu_1^2 (\omega - \omega_1)^2 > 0 \quad (5.8)$$

$$g(\lambda_2) = g(\lambda_3) < 0 \quad (5.9)$$

Первое из них удовлетворяется при любых значениях параметров A° , B° , C , a и ω , соответствующим подбором приведенного коэффициента вязкого трения μ_1 . Что же касается двух неравенств (5.9), то при использовании второй из формул (5.6) их можно представить в виде

$$g(\lambda_2) = g(\lambda_3) = [\mu_1^2 + \omega^2 (A^\circ + B^\circ - C)^2] [\omega_1^2 (A^\circ + B^\circ) - 2\omega \omega_1 C + 2mga] / (A^\circ + B^\circ) - \left(\frac{A^\circ - B^\circ}{A^\circ + B^\circ} \right)^2 [mga + (A^\circ + B^\circ - C) \omega \omega_1]^2 < 0 \quad (5.10)$$

Последние удовлетворяются, если выполняется условие

$$1/2 \omega_1^2 (A^\circ + B^\circ) - \omega \omega_1 C + mga < 0 \quad (5.11)$$

аналогичное неравенству (3.6), ранее полученному для осесимметричного тела.

Оказывается, далее, что при удовлетворении неравенства (5.11) выполняется также и неравенство (5.7), являющееся условием вещественности корней полинома $h(\lambda)$. Действительно, при использовании неравенства (5.11) получаем

$$\omega^2 (A^\circ - B^\circ) - 2mga - 2 (A^\circ + B^\circ - C) \omega \omega_1 > (A^\circ + B^\circ) (\omega - \omega_1)^2 > 0 \quad (5.12)$$

Таким образом, при выполнении неравенства (5.11) удовлетворяются все перечисленные выше условия теоремы Эрмита — Билера и метода Ю. И. Неймарка. Следовательно, это неравенство является достаточным условием асимптотической устойчивости выпрямленного несимметричного твердого тела. Разрешая неравенство (5.11) относительно ω_1 , получаем для фиксированных параметров A° , B° , C , a и ω диапазон значений угловой скорости ω_1 вращения системы демпфирующих устройств, при которых выпрямленное твердое тело будет асимптотически устойчивым:

$$\frac{C\omega - [C^2\omega^2 - 2mg(A^\circ + B^\circ)]^{1/2}}{A^\circ + B^\circ} < \omega_1 < \frac{C\omega + [C^2\omega^2 - 2mga(A^\circ + B^\circ)]^{1/2}}{A^\circ + B^\circ} \quad (5.13)$$

Последние неравенства имеют смысл при выполнении условия

$$C^2\omega^2 > 2mga (A^\circ + B^\circ) \quad (5.14)$$

которое является как бы аналогом условия Майевского — Четаева для несимметричного твердого тела. Заменяв в неравенствах (5.13) угловую скорость ω_1 согласно второму соотношению (3.2), ее выражением через коэффициенты внутреннего и внешнего трений, получим условие асимптотической устойчивости выпрямленного несимметричного твердого тела при совокупном влиянии этих двух видов трения в следующей форме:

$$\frac{C - [C^2 - 2mga(A^\circ + B^\circ)/\omega^2]^{1/2}}{A^\circ + B^\circ} < \frac{\mu}{\mu + ka_2^*} < \frac{C + [C^2 - 2mga(A^\circ + B^\circ)/\omega^2]^{1/2}}{A^\circ + B^\circ} \quad (5.15)$$

В случае висящего несимметричного твердого тела ($a < 0$) левая часть неравенства (5.13), равно как и (5.15), является отрицательной. Следовательно, висящее твердое тело может быть асимптотически устойчивым и в случае, когда система демпфирующих устройств вращается в сторону, противоположную вращению тела. В частности, асимптотическая устойчивость будет иметь место при $\omega_1 = 0$, т. е. при неподвижных демпфирующих устройствах [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kimball A. L. Internal friction theory of shaft whirling//Gen. Electric Rev. 1924. V. 27. № 4. P. 244—251.
2. Капица П. Л. Устойчивость и переходы через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения//Ж. техн. физики. 1939. Т. 9. № 2. С. 124—147.
3. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 248 с.
4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 240 с.
6. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 286 с.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 532 с.
8. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
9. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций//Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1949. Т. 26. С. 1—332. 1949. 331 с.
10. Неймарк Ю. И. К задаче распределения корней полиномов//ДАН СССР. 1947. Т. 58. № 3. С. 357—360.
11. Стороженко В. А., Темченко М. Е. Об устойчивости вращения динамически несимметричного гироскопа со специальным демпфирующим устройством//Математические методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1992. С. 86—98.

Москва, Киев

Поступила в редакцию
15.IV.1994