

УДК 539.375

© 1995 г. Г. А. ВАНИН

ГРАДИЕНТНАЯ ТЕОРИЯ СДВИГА КОМПОЗИТОВ С ТРЕЩИНОЙ

На основании градиентной теории композитов [1] сформулирована краевая задача об упругом разрушении при продольном сдвиге волокнистой среды с прямолинейной трещиной. Поле в композитах определяется двумя видами разрешающих функций, первый из которых характеризует состояние в однородной анизотропной среде и совпадает с решениями классической теории упругости, а второй — устанавливает влияние градиентных состояний. Связь между отмеченными функциями осуществляется через краевые условия.

Критические нагрузки упругого разрушения зависят от нового параметра, характеризующего масштаб и упругие свойства неоднородности среды, что приводит к необходимости в опытах на разрушение осуществлять фрактографический анализ с количественной обработкой данных экспериментов. Установлено существование g_m — интеграла, независящего от пути интегрирования и обобщающего известные представления J — интеграла на случай градиентных состояний.

1. Расположение трещины и принятая система декартовых координат в линейно армированной среде изображены на фиг. 1, где зигзагообразные стрелки отмечают площадки и направление действия при продольном сдвиге переменных касательных напряжений. Функция продольных смещений в градиентной теории сдвига удовлетворяет уравнению [1]:

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \mu_n \nabla^{2n+2} u = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \mu_0 = 1 \quad (1.1)$$

где N — предельное значение степени градиентных напряжений. Приближенные значения параметров μ_n для гексагональной и тетрагональной упаковок волокон будут

$$\mu_n = -i \frac{G_{12}^n}{G_{12}} [2Fn! (n+1)!]^{-1} \oint_L |z|^{2n} \bar{z} dz \quad (1.2)$$

$$G_{12}^n = G (1 + \zeta^n v_0) (1 - \zeta^n v_0)^{-1} + \dots, \quad z = x + iy$$

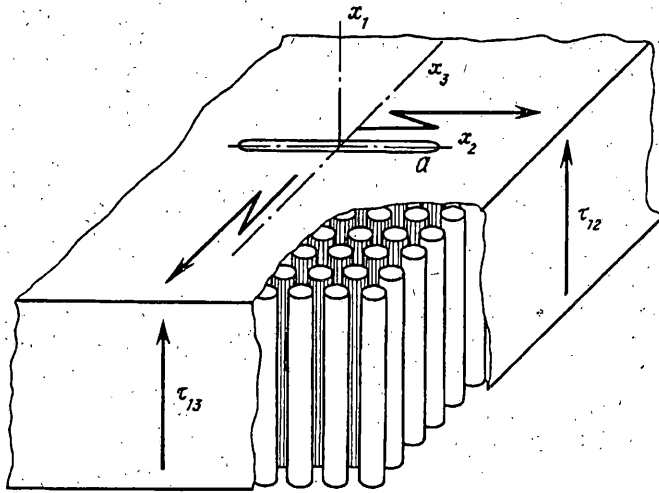
$$G_{12} = G (1 + v_0) (1 - v_0)^{-1} [1 + m^2 (m-1) v_0^2 \tau^{-m} \sin^m \alpha_m (1 - \zeta^{2m-4} v_0^2) (1 - v_0^2)^{-1}]$$

$$v_0 = \zeta (1 - G/G_a) (1 + G/G_a)^{-1}$$

Здесь L — контур, ограничивающий площадь усреднения F , $m = 4$, $\alpha_4 = \pi/2$ — для тетрагональной, $m = 6$, $\alpha_6 = \pi/3$ — для гексагональной упаковок; G и G_a — модули сдвига матрицы и волокон; ζ — относительное объемное содержание волокон.

Усредненные усилия и моменты на участке дуги s с нормалью n для непрерывной кривой без угловых точек будут

$$\hat{\tau}_{1k} = G_{12} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{n=0}^N (-1)^n \mu_n \nabla^{2n} u \quad (k = 2, 3)$$



Фиг. 1

$$\left. \begin{aligned} M_n &= \partial^2 / \partial n^2 \\ M_s &= 1/2 (\partial^2 / \partial n \partial s + \partial^2 / \partial s \partial n - \rho_n^{-1} \partial / \partial s) \end{aligned} \right\} G_{12} \sum_{n=0}^N (-1)^n \mu_{1+n} \nabla^{2n} u \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_n^1 &= -\partial^3 / \partial n^3 \\ M_s^1 &= \partial^3 / \partial s^2 \partial n \\ M_{ns}^1 &= \partial^3 / \partial n^2 \partial s \end{aligned} \right\} 2G_{12} \mu_2 u + \dots$$

где $x_2 = x$, $x_3 = y$, $\partial / \partial n$ и $\partial / \partial s$ — производные по нормали и дуге, ρ_n и ρ_s — радиусы кривизны ортогональных координатных линий. Более высокие моменты M_k^1 устанавливаются соотношениями теории усреднения [1]. Берега трещины предполагаются свободными от средних и моментных усилий. Условия для свободного края сформулированы как естественные граничные условия в предположении непрерывности, замкнутости и отсутствия угловых точек на граничной кривой. Учитываем первые два момента

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{1n} - \partial M_s^1 / \partial s + 1/2 \partial^2 M_s^1 / \partial s^2 + \partial / \partial s (M_{ns}^1 / \rho_n) &= 0 \\ M_n + M_s^1 / (2\rho_n) - \partial M_{ns}^1 / \partial s &= 0, \quad M_n^1 = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Приведенные граничные условия дополняются условиями затухания функции смещений при удалении от берегов трещины

$$\lim u = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Решение (1.1) ищем в виде

$$u = \varphi + v \quad (1.6)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \sum_{n=0}^N (-1)^n \mu_n \nabla^{2n} v = 0$$

Первое соотношение (1.3) приводит к равенству

$$\hat{\tau}_{1k} = G_{12} \partial \varphi / \partial x_k \quad (1.7)$$

Из чего следует, что функция φ определяет распределение усредненных напряжений $\hat{\tau}_{1k}$. Функция v удовлетворяет уравнениям

$$v = \sum_{k=1}^N \psi_k, \quad \nabla^2 \psi_k - \alpha_k \psi_k = 0 \quad (1.8)$$

где κ_k k -й корень алгебраического уравнения

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \mu_n \kappa^n = 0 \quad (1.9)$$

Первые два корня находятся в явном виде

$$\kappa_{1,2} = \mu_1 / (2\mu_2) [1 \pm (1 - 4\mu_2/\mu_1^2)^{1/2}]$$

Для $n \geq 3$ наряду с вещественными возможно появление комплексно-сопряженных корней. С повышением порядка уравнения (1.9) уточняются значения первых корней.

Между заданным порядком дифференциального уравнения (1.1) и крайними условиями, построенными в принятом приближении, обеспечивается полное соответствие для построения искомого решения задачи при выполнении указанных ограничений на граничный контур.

2. В качестве модели трещины рассматриваем полость в виде сквозного эллиптического цилиндра. Вводим систему эллиптических координат ξ, η с помощью преобразования [2]:

$$x + iy = c \operatorname{ch}(\xi + i\eta), \quad c^2 = a^2 - b^2$$

где a, b — полуоси эллиптического выреза. При $b \rightarrow 0$ граничный эллипс $\xi = 0$ превращается в математический разрез, имитирующий трещину [3]. Для преобразования основных соотношений к эллиптической системе координат, воспользуемся представлением первой квадратичной формы

$$ds^2 = H^2 (d\xi^2 + d\eta^2), \quad H^2 = c^2/2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)$$

Будем иметь

$$\partial/\partial n = H^{-1} \partial/\partial \xi, \quad \partial/\partial s = H^{-1} \partial/\partial \eta, \quad \rho_n^{-1} = \partial \ln H / \partial n, \quad \rho_s^{-1} = \partial \ln H / \partial s$$

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial n^2 + \partial^2/\partial s^2 + \rho_n^{-1} \partial/\partial n + \rho_s^{-1} \partial/\partial s = H^{-2} (\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2)$$

$$\kappa_{22} - \kappa_{33} = \kappa_n - \kappa_s - (2\rho_n)^{-1} \gamma_{1n} - (2\rho_s)^{-1} \gamma_{1s}$$

$$(\kappa_{22} + \kappa_{33} + 2i\kappa_{23}) e^{2\theta} = \kappa_n + \kappa_s + i(\kappa_{ns} - \kappa_{sn}) + 1/2 (\rho_n^{-1} - i\rho_s^{-1})(\gamma_{1n} - i\gamma_{1s})$$

$$\kappa_{ns} + \kappa_{sn} = (2\rho_s)^{-1} \gamma_{1n} - (2\rho_n)^{-1} \gamma_{1s}, \quad e^{\theta} = cH^{-1} \operatorname{sh}(\xi + i\eta)$$

$$\kappa_n = -1/2 \partial^2 u / \partial n^2, \quad \kappa_s = 1/2 \partial^2 u / \partial s^2, \quad \kappa_{ns} = 1/2 \partial^2 u / \partial n \partial s$$

Функция φ удовлетворяет уравнению классической теории продольного сдвига для тел с гексагональной и тетрагональной симметрией [4] и поэтому методы ее нахождения известны. Функции ψ_k в эллиптической системе координат удовлетворяют уравнению $\partial^2 \psi_k / \partial \xi^2 + \partial^2 \psi_k / \partial \eta^2 - \kappa_k c^2 / 2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \psi_k = 0$. Методом разделения переменных $\psi = U(\xi) V(\eta)$ находим [2]:

$$U'' - (v + 2q \operatorname{ch} 2\xi) U = 0, \quad V'' + (v + 2q \cos 2\eta) V = 0 \quad (2.1)$$

где $q = \kappa c^2 / 4$, v — постоянная разделения.

В качестве подходящих решений задачи о напряженном состоянии при продольном сдвиге среды с эллиптической трещиной выбраны функции [2]:

$$\varphi = \sum_{r=0}^N (A_r e^{-\kappa_r \xi} \cos r\eta + S_r e^{-\kappa_r \xi} \sin r\eta) \quad (2.2)$$

$$\psi_k = \sum_{r=0}^{\infty} [C_{rk} \operatorname{Fek}_r(\xi, -q_k) \operatorname{ce}_r(\eta, -q_k) + D_{rk} \operatorname{Gek}_r(\xi, -q_k) \operatorname{se}_r(\eta, -q_k)]$$

Функции Матье $\text{Fek}_r(\xi, -q)$, $\text{Gek}_r(\xi, -q)$ удовлетворяют условиям затухания решений и не имеют особенностей на берегах трещины $\xi = 0$, $0 \leq \eta < 2\pi$. Краевые условия для свободного края (1.4) при учете только первых моментов будут

$$\hat{v}_{1n} - \partial M_s / \partial s = 0, \quad M_n = 0$$

В эллиптических координатах

$$\sin^4 \eta \partial \varphi / \partial \xi - \varepsilon \sin^2 \eta \partial^3 u / \partial \xi \partial \eta^2 + 3\varepsilon \sin \eta \cos \eta \partial^2 u / \partial \xi \partial \eta - \varepsilon (2 + \cos 2\eta) \partial u / \partial \xi = 0, \quad \partial^2 u / \partial \xi^2 = 0, \quad \varepsilon = \mu_1 / a^2 \quad (2.3)$$

В качестве примера рассмотрим случай $\hat{v}_{12} = 0$, $\hat{v}_{13} = \text{const}$. С учетом симметрии состояния выбираем допустимые решения

$$\Phi = \hat{v}_{13} \frac{c}{G_{12}} \text{sh } \xi \sin \eta + \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1} \exp [-(2n+1)\xi] \sin (2n+1)\eta \quad (2.4)$$

$$\psi_k = \sum_{n=0}^{\infty} D_{k2n+1} \frac{\text{Gek}_{2n+1}(\xi, -q_k)}{\text{Gek}_{2n+1}(0, -q_k)} \text{se}_{2n+1}(\eta, -q_k)$$

Между параметрами, входящими в различные представления решений уравнений (2.1), существуют связи, полезные для численных расчетов. Периодические функции Матье с симметрией типа косинуса могут быть представлены в рядах [2, 5]:

$$\text{ce}_{2n+1}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos (2r+1)\eta$$

Аналогичные разложения для функций типа синуса выражаются через те же коэффициенты

$$\text{se}_{2n+1}(\eta, -q) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} \sin (2r+1)\eta$$

Представления непериодических функций Матье через известные функции построены с привлечением указанных коэффициентов

$$\text{Gek}_{2n+1}(\xi, -q) = p_{2n+1}' (\pi A_1^{(2n+1)})^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} [J_r(v_1) K_{r+1}(v_2) + J_{r+1}(v_1) K_r(v_2)]$$

$$p_{2n+1}' = (-1)^{n+1} \text{ce}_{2n+1}(0, q) \text{se}_{2n+1}'(\pi/2, q) (q^{1/2} A_1^{(2n+1)})^{-1}$$

$$\text{se}_{2n+1}'(\pi/2, q) = - \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}$$

$$v_1 = q^{1/2} e^{-\xi}, \quad v_2 = q^{1/2} e^{\xi}$$

где $J_r(v_1)$ и $K_r(v_2)$ — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда. Приводим также соотношение

$$\frac{\text{Gek}_1'(0, -q)}{\text{Gek}_1(0, -q)} = \frac{q}{\text{ce}_1(0, q)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(1)} (J_r K_{r+1}' - J_2' K_{r+1} + J_{r+1} K_r' - J_{r+1}' K_r),$$

$$J_r = J_r(q^{1/2}), \quad K_r = K_r(q^{1/2})$$

Из второго условия (2.3) следует

$$S_{2m+1} = (v + 2q)(2m+1)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} A_{2m+1}^{(2n+1)} D_{2n+1} \quad (2.5)$$

Удовлетворяя первому условию (2.3) с учетом (2.5), приходим к функциональному соотношению

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} \left\{ (v+2q) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} A_{2m+1}^{(2n+1)} (2m+1)^{-1} [\alpha_{1n} \sin(2n+1)\eta - \right. \\ & - \alpha_{2n} \sin(2n-1)\eta - \alpha_{3n} \sin(2n+3)\eta + \sin(2n-3)\eta + \sin(2n+5)\eta] + \\ & + 8\varepsilon \text{Gek}'_{2n+1}(0, -q) / \text{Gek}_{2n+1}(0, -q) [(v-q-4)(1-\cos 2\eta) \text{se}_{2n+1}(\eta, -q) + \\ & + (q-8) \cos 2\eta \text{se}_{2n+1}(\eta, -q) - q \cos 4\eta \text{se}_{2n+1}(\eta, -q) + \\ & + 3 \sin 2\eta \text{se}'_{2n+1}(\eta, -q)] = -c\hat{\tau}_{13}^0 / G_{12} (10 \cos \eta - 5 \sin 3\eta + \sin 5\eta) \\ & \alpha_{1n} = 6 + 8\varepsilon (2n+1)^2 - 32\varepsilon \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha_{2n} \\ \alpha_{3n} \end{matrix} \right\} = 4 + 8\varepsilon + 4\varepsilon (2n+1)^2 \pm 12\varepsilon (2n+1)$$

Из (2.6) следует бесконечная система алгебраических уравнений для определения D_{2n+1} . В первом приближении находим

$$\left. \begin{matrix} D_1 = -[(v+2q) A_1^{(1)}]^{-1} c\hat{\tau}_{13}^0 \\ S_1 = \end{matrix} \right\} \frac{1}{G_{12}} \left[1 + \frac{0,1F}{q(v+2q)} \cdot \frac{\text{Gek}'_1(0, -q)}{\text{Gek}_1(0, -q)} \right]^{-1}$$

$$F = 3v - 4q - 1 + (v - 3q + 13) A_3^{(1)} / A_1^{(1)} - q A_3^{(1)} / A_1^{(1)}$$

Упругая энергия среды состоит из суммы энергии U_0 , накопленной усредненными напряжениями, и энергии градиентных состояний U_1 :

$$U = U_0 + U_1 \quad (2.7)$$

Поэтому при определении разрушающих усредненных напряжений по методу Гриффитса достаточно в (2.7) ограничиться первым членом. Тангенциальные усредненные касательные напряжения достигают максимума на концах большой оси эллипса

$$\hat{\tau}_{1\eta} = G_{12} H^{-1} \partial \varphi / \partial \eta, \quad x = a + r = c \operatorname{ch} \xi, \quad \eta = 0$$

где имеем

$$H = c (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{1/2} \simeq \sqrt{2ar}$$

В соответствии с методом линейной механики разрушения, полагаем $\hat{\tau}_{1\eta} \simeq G_{12} S_1 / \sqrt{2ar} = K_{III} / \sqrt{2\pi r}$.

Предельные напряжения для страгивания трещины в первом приближении

$$\hat{\tau}_{13}^0 = \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi a}} \left[1 + \frac{0,1F}{q(v+2q)} \cdot \frac{\text{Gek}'_1(0, -q)}{\text{Gek}_1(0, -q)} \right] \quad (2.8)$$

Дополнительный член в формуле учитывает влияние неоднородного строения среды и является функцией параметра q . Если в уравнении (1.9) ограничиться только первым членом и усреднение провести по круговой области F с радиусом R , то найдем

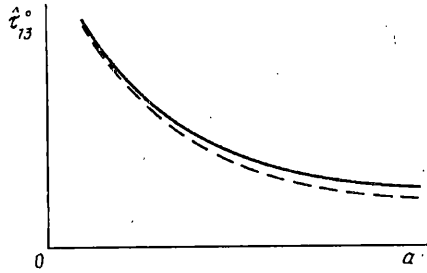
$$q = \kappa c^2 / 4 = a^2 G_{12} / (2R^2 G_{12}') \quad (2.9)$$

В первом приближении добавки к предельным напряжениям получаются при фиксированном q , которое может быть образовано произведением различных a/R и G_{12}/G_{12}' . В качестве числового примера определим предельное значение

напряжений у трещины в связи со строением структуры материала при $q = 5$. Для дальнейшей формулу (2.8) представим в виде

$$\hat{\sigma}_{13} = K_{III} [1 + \beta(q)] / \sqrt{\pi a} \quad (2.10)$$

где $\beta(s) = 0,073$, т. е. поправка в данном случае составляет около 7% от классического результата. Функциональная зависимость критических напряжений в однородной среде от полудлины трещины представлена на фиг. 2 в виде штриховой кривой. Учет влияния градиентов напряжений приводит к более высоким предельным напряжениям (сплошная кривая на фиг. 2).



Фиг. 2

Материалы с более мелкомасштабной структурой обычно обладают более высоким сопротивлением росту трещины. По-видимому, в этом случае достигаются когезионные связи с более высокой энергией. Рассмотрим влияние структуры пористой среды на параметры задачи при заданном значении $q = 5$. Выделяем три структуры с равномерно распределенными цилиндрическими полостями: $\zeta = 0,5$ — влияние упаковки несущественно; $\zeta = 0,78$, $\alpha_4 = \pi/2$ — предельно плотная тетрагональная упаковка пор; $\zeta = 0,92$, $\alpha_6 = \pi/3$ — предельно плотная гексагональная упаковка.

Для всех случаев поправка $\beta = 0,07$; соответственно отношение полудлины трещины a к радиусу площадки усреднения R будет $a/R = 4,24$; $3,52$ и $2,53$. Из приведенного следует, что кроме длины трещины на критическое состояние среды оказывают влияние объемное содержание и механические свойства компонентов и вид упаковки структуры.

3. В случаях, когда определение коэффициентов интенсивности напряжений затруднительно, используется понятие J -интеграла, введенного в работах Райса, Черепанова и других [6]. Представляет интерес обобщение указанного интеграла с учетом градиентных состояний сред. В статике плотность энергии деформирования при сдвиге можно определить суммой состояний [1]:

$$U_0(\hat{\tau}_{ik}, \hat{\gamma}_{ik}) + U_1(\hat{m}_{ik}^{sn}, \hat{\chi}_{ik}^{sn}) = \int_0^{\gamma} \hat{\tau}_{ik} d\hat{\gamma}_{ik} + \int_0^{\chi} \hat{m}_{ik}^{sn} d\hat{\chi}_{ik}^{sn} \quad (3.1)$$

Определим производную

$$\partial U / \partial x = \hat{\tau}_{ik} \partial \hat{\gamma}_{ik} / \partial x + C_n^m \hat{m}_{ik}^{sm} \partial \hat{\chi}_{ik}^{sm} / \partial x, \quad C_n^m = n! [m! (n-m)!]^{-1} \quad (3.2)$$

В качестве характеристики трещиностойкости материала с учетом градиентных состояний вводим интеграл

$$g_m = \int_{\Gamma} \left(Un_1 - \hat{\tau}_{in} \frac{\partial u}{\partial x} - M_{kk} \frac{\partial \hat{\gamma}_{ik}}{\partial x} - M_{ik}^{s+m+1} \frac{\partial \hat{\chi}_{ik}^{sm}}{\partial x} \right) ds \quad (3.3)$$

Последний характеризует скорость высвобождения энергии, отнесенной к единице длины трещины, при определенных ограничениях. Здесь n_1 — проекция на ось x единичной нормали к контуру Γ , остальные обозначения введены выше. Докажем, что введенный интеграл не зависит от пути интегрирования при учете градиентных состояний среды. Используя формулу

$$\int_F \frac{\partial v_k}{\partial x_k} dF = \int_{\Gamma} v_k n_k ds \quad (3.4)$$

для первого члена (3.2) получим

$$\int_{\Gamma} Un_1 ds = \int_F \left(\hat{\tau}_{ik} \frac{\partial \hat{\gamma}_{ik}}{\partial x} + C_n^m \hat{m}_{ik}^{sm} \frac{\partial \hat{\chi}_{ik}^{sm}}{\partial x} \right) dF$$

Доказательство проводим по методу индукции для первых нескольких членов разложения (3.2). Первые два члена под интегралом преобразуем с учетом (3.4):

$$\int_F dF \hat{\tau}_{1k} \frac{\partial \hat{\gamma}_{1k}}{\partial x} = \oint_{\Gamma} \hat{\tau}_{1n} \frac{\partial u}{\partial x_k} ds - \int_F \frac{\partial \hat{\tau}_{1k}}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x} dF \quad (3.5)$$

$$\int_F \frac{1}{2} \hat{m}_{ik} \varepsilon_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dF = \frac{1}{2} \varepsilon_k \oint_{\Gamma} \left(\hat{m}_{ik} n_i \frac{\partial \hat{\gamma}_{1k}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{m}_{ik}}{\partial x_i} n_k \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon_k \int_F \frac{\partial^2 \hat{m}_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x} dF$$

$$\varkappa_{ik} = 1/2 \varepsilon_k \partial^2 u / \partial x_i \partial x_k, \quad \varkappa_{ik}^{sm} = \partial^{s+m} \varkappa_{ik} / \partial x^s \partial y^m$$

$$\varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = 1, \quad x_2 = x, \quad x_3 = y \quad (i, k = 2, 3)$$

Принимая $M_{kk} = 1/2 \varepsilon_k m_{ik} n_i$, сумму интегралов в правых частях равенств (3.5) запишем в виде

$$\oint_{\Gamma} \left[\left(\hat{\tau}_{1k} - \frac{\varepsilon_k}{2} \frac{\partial \hat{m}_{ik}}{\partial x_i} \right) n_k \frac{\partial u}{\partial x} + M_{kk} \frac{\partial \hat{\gamma}_{1k}}{\partial x} \right] ds - \int_F \left(\frac{\partial \hat{\tau}_{1k}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \varepsilon_k \frac{\partial^2 \hat{m}_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{\partial u}{\partial x} dF$$

Последовательно увеличивая число членов в разложении энергии, найдем следующие представления для усилий:

$$\left. \begin{aligned} \hat{T}_{12} \\ \hat{T}_{13} \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{12} \\ \hat{\tau}_{13} \end{aligned} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left\{ \begin{aligned} \partial m_{22} / \partial x - \partial m_{23} / \partial y \\ \partial m_{32} / \partial x - \partial m_{33} / \partial y \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} M_{22} \\ M_{33} \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left\{ \begin{aligned} m_{22} \cos \theta - m_{23} \sin \theta \\ m_{32} \cos \theta - m_{33} \sin \theta \end{aligned} \right. \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{22}^1 \\ M_{33}^1 \\ M_{23}^1 \end{aligned} \right\} = \sum_{n=0}^N (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left\{ \begin{aligned} m_{22}^1 \cos \theta + m_{22}^{01} \sin \theta \\ m_{33}^1 \cos \theta + m_{33}^{01} \sin \theta \\ (m_{23}^1 - m_{32}^1) \cos \theta + (m_{23}^{01} - m_{32}^{01}) \sin \theta \end{aligned} \right.$$

Последующие приближения строятся аналогично. Если выполнены условия равновесия $\partial \hat{\tau}_{1k} / \partial x_k = 0$ и приведенные усилия определены соотношениями вида (3.6), то интеграл (3.3) обращается в нуль, не зависимо от вида Γ . Используя представление решения основного уравнения в виде (1.6) и соотношение (1.7), интеграл (3.3) разделим на части $g_m = J + J_m$, где первое слагаемое представляет собой интеграл Райса — Черепанова

$$J = \int_{\Gamma} \left(U_0 n_1 - \hat{\tau}_{1n} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) ds$$

а второе слагаемое

$$J_m = \int_{\Gamma} \left(U_1 n_1 - M_{kk} \frac{\partial \hat{\gamma}_{1k}}{\partial x} - M_{ik}^{s+m+1} \frac{\partial \hat{x}^{sm}}{\partial x} \right) ds$$

определяет вклад от градиентного состояния. Для вычисления последнего интеграла отметим, что градиентные составляющие состояния среды имеют особенности у концов трещин, но аналитическая структура подынтегральных функций значительно сложнее, чем в первом интеграле. Известно [6], что J -интеграл используется для оценки разрушающих нагрузок нелинейноупругих материалов с

трещиной. Использование g_m -интеграла в решении аналогичных задач с учетом особенности строения материала у вершины трещины на более высоком масштабном уровне, требует более строгих оценок влияния диссипативных процессов в зоне разрушения.

Работа выполняется при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00523-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ванин Г. А.* Градиентная теория сдвига многоуровневых композитов//Изв. АН МТТ. 1994. № 1. С. 120—127.
2. *Мак Лахлан И. В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
3. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
4. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 299 с.
6. *Черепанов Г. П.* Вычисление инвариантных интегралов в особых точках//Вычислительные методы в механике разрушения. М.: Мир. 1990. С. 351—364.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1994