МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. А. Г. БАГДОЕВ, А. А. ВАНЦЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОНИКАНИЯ ТОНКОГО ЗАОСТРЕННОГО ТВЕРДОГО ИНДЕНТОРА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

Рассматривается задача проникания тонкого твердого индентора в первоначально упругую трансверсально-изотропную среду, в которой вблизи индентора образуется область пластичности (фигура). Подобные задачи решены в [1], где принималась, как и для изотропной среды, гипотеза плоских сечений [2], согласно которой изменения по радиальной координате r намного превосходят изменения по осевой координате x и считается, что компонента тензора скоростей деформации $\dot\varepsilon_{xx} \ll \dot\varepsilon_{rr}$. При этом для среды, в которой пределы текучести по осям r, x связаны равенством $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$, напряжение на инденторе было равно бесконечности.

В публикуемой работе дается анализ соотношений пластичности и дано приближенное решение без гипотезы плоских сечений. Для трансверсально-изотропной среды в области пластического течения тензор скоростей и тензор девиатора напряжений связаны зависимостями [3]:

$$\dot\varepsilon_{rr}/a = H(\sigma_{rr}' - \sigma_{\theta\theta}') + F(\sigma_{rr}' - \sigma_{xx}'), \quad \dot\varepsilon_{\theta\theta}/a = H(\sigma_{\theta\theta}' - \sigma_{rr}') + F(\sigma_{\theta\theta}' - \sigma_{xx}') \tag{1}$$

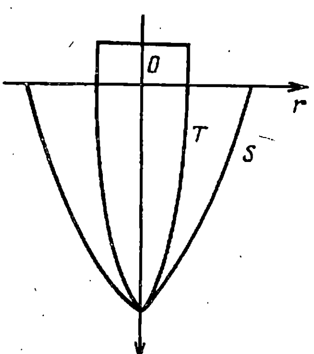
$$\dot\varepsilon_{xx}/a = F(\sigma_{xx}' - \sigma_{rr}') + H(\sigma_{xx}' - \sigma_{rr}'), \quad \sigma_{xx}' + \sigma_{\theta\theta}' + \sigma_{rr}' = 0$$

$$2F = 1/\tau_{sx}^2, \quad H = 1/\tau_{sr}^2 - 1/2\tau_{sx}^2 \tag{2}$$

где a — параметр пластичности, τ_s — предел текучести по соответствующим направлениям. Уравнения (1) описывают осесимметричное течение среды в предположении идеальной пластичности. Из второго, третьего и четвертого уравнений (1) следует

$$\sigma_{rr}' = \frac{1}{\alpha}\left[3\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{a}F + \frac{\dot\varepsilon_{xx}}{a}(2F + H)\right], \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\alpha}\left[3\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{a}F + \frac{\dot\varepsilon_{xx}}{a}(F - H)\right]$$

$$\sigma_{xx}' = \dot\varepsilon_{xx}(F + 2H)/(a\alpha), \quad \alpha = 3(F^2 + 2FH) \tag{3}$$



Уравнение текучести в основных порядках ($\tau_{r\theta} \ll \sigma_{rr}$) примет вид

$$H(\sigma_{rr}' - \sigma_{\theta\theta})^2 + F(\sigma_{rr}' - \sigma_{xx})^2 + F(\sigma_{\theta\theta}' - \sigma_{xx})^2 = 1 \tag{4}$$

С учетом (3)—(5) и того, что для трансверсально изотропной среды

$$\alpha = \frac{3}{\tau_{sx}^2}\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{4\tau_{sx}^2}\right) \tag{5}$$

можно записать соотношение

$$\frac{1}{\tau_{sx}^2}\left(\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\right)^2+\frac{1}{\tau_{sr}^2}\left(\frac{\dot\varepsilon_{xx}}{a}\right)^2+\frac{1}{\tau_{sx}^2}\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\frac{\dot\varepsilon_{xx}}{a}=\frac{1}{\tau_{sx}^2}\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{4\tau_{sx}^2}\right) \tag{6}$$

Откуда следует

$$\frac{\dot\varepsilon_{xx}}{a}=\frac{\tau_{sr}^2}{\tau_{sx}^2}\left\{-\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{2a}\pm\left[\left(\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{2a}\right)^2-\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{4\tau_{sx}^2}\right)+\left(\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \tag{7}$$

Из (3) можно получить

$$\sigma_{rr}'-\sigma_{\theta\theta}'=\frac{3}{a\alpha\tau_{sx}^2}\left(\dot\varepsilon_{\theta\theta}+\frac{\dot\varepsilon_{xx}}{2}\right) \tag{8}$$

Как и в случае гипотезы плоских сечений [2], можно считать $\dot\varepsilon_{xx}=0$, $\dot\varepsilon_{\theta\theta}\neq 0$; тогда $\sigma_{rr}'-\sigma_{\theta\theta}'\to\infty$ при $\tau_{sr}=2\tau_{sx}$.

Поскольку при проникании возможны различные виды касания индентора и среды, можно изучить случай

$$\dot\varepsilon_{\theta\theta}/a\approx 1/2\,\dot\varepsilon_{xx}/a \text{ при } \tau_{sr}=2\tau_{sx}$$

Тогда $\sigma_{rr}'-\sigma_{\theta\theta}'$ получается конечным, как это видно из (8).

Для нахождения точного решения задачи о проникании тонкого индентора в среду следует применять численные методы. Однако можно для качественного вида решения принять

$$\dot\varepsilon_{xx}=n\dot\varepsilon_{\theta\theta},\quad n=4\tau_{sx}\sin^2\beta/(\tau_{sr}\cos^2\beta-2\tau_{sx}) \tag{9}$$

при этом для $\tau_{sr}\neq 2\tau_{sx}$ будет $n\sim\beta^2$, т. е. имеет место допущение [1]. Для $\tau_{sr}=2\tau_{sx}$ получим $n=-2$. Тогда из уравнения неразрывности записанное в цилиндрических координатах $\partial v_r/\partial r+v_r/r+\dot\varepsilon_{xx}=0$, следует $v_r=(r_k^{n+1}/r^{n+1})\,\partial r_k/\partial t$, где v_r — радиальная скорость частиц, $r=r_k(x,t)$ — уравнение меридиана индентора.

В результате будем иметь

$$\varepsilon_{\theta\theta}'=\frac{r^{n+1}}{r^{n+2}}\frac{\partial r_k}{\partial t},\quad \dot\varepsilon_{rr}=-(n+1)\frac{r_k^{n+1}}{r^{n+2}}\frac{\partial r_k}{\partial t}$$

Подставляя полученные значения $\dot\varepsilon_{rr}$, $\dot\varepsilon_{\theta\theta}$, $\dot\varepsilon_{xx}$ в (6), можно получить

$$\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{a}=\sqrt{\frac{a}{3}}\left[\frac{n^2}{\tau_{sr}^2}+\frac{n+1}{\tau_{sx}^2}\right],\quad \sigma_{rr}'-\sigma_{\theta\theta}'=-\sqrt{\frac{3}{a}}\left[\frac{n+1}{\tau_{sx}^2}+\frac{n^2}{\tau_{sr}^2}\right]\frac{n+2}{\tau_{sx}^2} \tag{10}$$

Полученная формула дает в пределах выбранной гипотезы решение задачи проникания. При этом для $\lambda\ll 1$ имеем при малых β из (9) $\tau_{sr}=\tau_{sx}(2-\lambda)$ и $-n=2\sin^2\beta/(\sin^2\beta+\lambda/2\cos^2\beta)$. Для $\lambda\gg\beta^2$ получим $n\sim 0$, $\alpha\gg\beta^2$, $\sigma_{rr}'-\sigma_{\theta\theta}'=(6/(\alpha\tau_{sx}))^{1/2}$.

Вместе с тем, полагая $\lambda\ll\beta^2$, найдем $n=-2(1-\lambda/2\operatorname{ctg}^2\beta)$, $\sigma_{rr}'-\sigma_{\theta\theta}'=2\tau_{sx}\operatorname{ctg}\beta$.

Таким образом, не исключено, что *при точном решении задачи проникания индентора в трансверсально-изотропную среду* при $\tau_{sr}=2\tau_{sx}$ давление на индентор будет конечное, в то время как согласно решению [1], полученному для случая $\dot\varepsilon_{xx}=0$, $\dot\varepsilon_{\theta\theta}\neq 0$ на инденторе $\sigma_{rr}\to\infty$ при $\tau_{sr}=2\tau_{sx}$. Разумеется, зная $\sigma_{rr}'-\sigma_{\theta\theta}'$ из (10), следует решать уравнение равновесия $\partial\sigma_{rr}/\partial r+(\sigma_{rr}'-\sigma_{\theta\theta})/r=$

$= 0$, где, как и в [1], рассматривается одномерная по r квазистационарная задача и затем решение в области пластичности соединяется с решением в упругой области σ^e. При этом после интегрирования будем иметь

$$\sigma_{rr} = -(\sigma_{rr}' - \sigma_{\theta\theta}) \ln (r/(r_k \xi_0)) + \sigma^e \tag{11}$$

где $r = r_k \xi_0$ — граница пластической области; постоянная ξ_0 подлежит определению.

Для получения напряжения σ^e в упругой области можно записать для трансверсально изотропной упругой среды

$$\sigma_{rr}^e = a_{11}\varepsilon_{rr} + a_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + a_{13}\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^e = a_{12}\varepsilon_{rr} + a_{22}\varepsilon_{\theta\theta} + a_{23}\varepsilon_{xx}$$

$$a_{11} = a_{22} = \lambda + 2\mu, \quad a_{12} = \lambda, \quad \varepsilon_{rr} = \partial u_r/\partial r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = u_r/r$$

Тогда получим

$$\sigma_{rr}^e - \sigma_{\theta\theta}^e = 2\mu\,(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}) \tag{12}$$

Подставляя полученное соотношение (12) в уравнение равновесия $\partial\sigma_{rr}^e/\partial r + (\sigma_{rr}^e - \sigma_{\theta\theta}^e)/r = 0$, можно получить

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\frac{u_r}{r} + a_{13}n\frac{u_r}{r}\right]\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r}\right) = 0$$

где учтено соотношение (9) для упругой среды. Полагая $u_r = c'/r^c$, найдем $c = (\lambda + a_{13}n + 2\mu)/(\lambda + 2\mu)$. Вычисляя напряжения

$$\sigma_{rr}^e = -(\lambda + 2\mu)\,c\,\frac{c'}{r^c} + (\lambda + a_{13}n)\frac{c'}{r^c}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^e = -\lambda c\frac{c'}{r^c} + (\lambda + 2\mu + a_{13}n)\frac{c'}{r^c}$$

$$\sigma_{xx}^e = a_{13}(1 - c)\frac{c'}{r^c} + a_{33}n\frac{c'}{r^c} \tag{13}$$

и подставляя их в (4), получим

$$\frac{c'}{\xi_0^{c+1} r_k^{c+1}}\left[4H\mu^2(1 + c)^2 + F(b_1^2 + b_2^2)\right]^{1/2} = 1 \tag{14}$$

$$b_1 = \lambda + a_{13}n - \lambda c - 2\mu c - a_{13} + a_{13}c - a_{33}n$$

$$b_2 = -\lambda c + \lambda + 2\mu + a_{13}n - a_{13} + a_{13}c - a_{33}n$$

Вблизи границы

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} \approx v_r, \quad v_r = \left(\frac{r_k}{r}\right)^{1+n}\frac{\partial r_k}{\partial t}, \quad u_r \approx \frac{r_k^{r+n}}{2 + n}\frac{1}{r^{1+n}} \tag{15}$$

Полагая $u_r^e = u_r$ при $r = r_k\xi_0$, можно определить $c' = r_k^{c+1}/(2 + n)\,\xi_0^{c-1-n}$. Подставляя в (14), найдем

$$\xi_0^{h+2} = \frac{1}{2 + n}\left[4H\mu^2(1 + c)^2 + F(b_1^2 + b_2^2)\right]^{1/2}$$

Из (11) и (13) следует

$$\sigma_{rr}^e = (\lambda + a_{13}n - \lambda c + 2\mu c)/(2 + n)\,\xi_0^{2+n}$$

Полное напряжение дается зависимостями (10) и (11).

Для проверки полученного эффекта были проделаны эксперименты по прониканию со скоростью 800 м/с стальных инденторов массой $\sim 10^{-2}$ кг в композиты, состоящие из ~ 50 слоев чередующихся металлов (алюминий, свинец, дюраль). Толщина пластинок от 10^{-3} до $6 \cdot 10^{-3}$ м. В силу большого количества слоев и периодичности можно считать, что образец однородный и трансверсально-изотропный. Слои металлов соединены клеем ГИПК-113. Результаты эксперимента показали хорошее соответствие с теорией. Основной эффект значительного уменьшения глубины проникания в композит по сравнению с цельными образцами из составляющих металлов наблюдался в пределах $1{,}6 < \tau_{sr}/\tau_{sx} < 3{,}6$. Значение τ_{sr} находилось по Фойхту $\tau_{sr} = (h_1\tau_{s1} + h_2\tau_{sr})/(h_1 + h_2)$, где индексы 1, 2 относятся к металлам, $h_{1,2}$ — толщины пластин, τ_{sx} измерялось для образца опытами на сжатие. При проникании в композит, состоящий из алюминия ($h_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ м) и свинца ($h_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м) получились следующие глубины проникания: в алюминий 10^{-1} м, в свинец более $10 \cdot 10^{-3}$ м (образец толщиной $12 \cdot 10^{-3}$ м был пробит насквозь), в композит $6 \cdot 10^{-2}$ м: $\tau_{sr}/\tau_{sx} = 2{,}3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды//Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 36. № 6. С. 23—30.
2. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в металлы и грунты//Изв. АН АрмССР. Механика. 1981. Т. 34. № 3. С. 25—38.
3. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

Ереван

Поступила в редакцию 14.XII.1993