

УДК 539.3

© 1995 г. А. В. СТАРОСЕЛЬСКИЙ, Е. И. ШИФРИН

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНОЙ НОРМАЛЬНО ПАДАЮЩЕЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ

Рассматривается задача рассеяния плоской трещиной нормально падающей поперечной волны. Для решения используется система интегродифференциальных уравнений относительно скачков смещений в плоскости трещины. Система решается двухбазисным проекционным методом, предложенным в [1], где также были решены некоторые статические задачи о трещинах. В [2] этот метод был развит для решения динамических задач о трещинах нормального разрыва. В публикуемой работе двухбазисный проекционный метод развивается на случай динамических задач о трещинах сдвига, что представляет интерес как в силу недостаточной изученности указанных задач, так и с точки зрения расширения возможностей применяемого численного метода. Рассмотрены как гармонически изменяющиеся во времени, так и ударные нагрузки.

1. Постановка задачи. Сначала рассмотрим случай гармонически изменяющейся нагрузки. Пусть в безграничном упругом пространстве, ослабленном трещиной, занимающей область G в плоскости $x_3 = 0$ распространяется плоская волна смещений $U_1 = P_1 \exp[-i\omega(\tau - x_3/C_s)]$, $U_2 = P_2 \exp[-i\omega(\tau - x_3/C_s)]$, $U_3 = 0$, где $C_s = (\mu/\rho)^{1/2}$ — скорость распространения поперечных волн, μ — модуль сдвига, ρ — плотность.

Как известно эта задача сводится к задаче о трещине, к поверхностям которой приложены равные по величине и противоположно направленные усилия, снимающие напряжения на поверхности трещины, определяемые падающей волной. Предполагается, что поверхности трещины не взаимодействуют, а на бесконечности принимается условие излучения Зоммерфельда. Для исходной задачи усилия, которые необходимо приложить к верхней поверхности трещины, равны $t \exp(-i\omega\tau)$, где $t = (t_1, t_2, t_3)$, $t_1 = i\omega P_1/C_s$, $t_2 = i\omega P_2/C_s$, $t_3 = 0$.

Для решения задачи предварительно выведем систему интегродифференциальных уравнений, связывающих скачки смещений на поверхности трещины с прикладываемыми усилиями.

2. Вывод системы интегродифференциальных уравнений. Хотя в статье рассматривается задача о трещине сдвига, выведем уравнения для случая произвольного нагружения. Если прикладываемые к поверхностям трещины усилия имеют вид $t \exp(-i\omega\tau)$, то смещения также гармонически зависят от времени и $\exp(-i\omega\tau)$, где $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор амплитуд перемещений. Уравнения Навье, записанные для амплитуд, имеют вид

$$(\lambda + \mu) u_{i,jj} + \mu u_{i,jj} = -\rho\omega^2 u_i \quad (2.1)$$

Здесь λ — упругая постоянная Ламе, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Обозначим $x = (x_1, x_2)$ и преобразование Фурье функции $f(x)$ через $f^\wedge(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$f^\wedge(\xi) = \int_{R^2} f(x) \exp[i(x, \xi)] dx, \quad (x, \xi) = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2$$

Применим преобразование Фурье по переменным (x_1, x_2) к уравнению (2.1). Производную по x_3 будем обозначать штрихом. Получим

$$u_j'' - (\beta^2 \alpha^{-2} \xi_j^2 + \xi_{3-j}^2 - \beta^2) u_j' - d \xi_1 \xi_2 u_{3-j}' - id \xi_j u_3'' = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (2.2)$$

$$\beta^2 \alpha^{-2} u_3'' - n_2^2 u_3' - id (\xi_1 u_1' + \xi_2 u_2') = 0$$

$$\beta = \sqrt{\rho/\mu} \omega, \quad \alpha = \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)} \omega; \quad n_2^2 = \xi^2 - \beta^2$$

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad d = \beta^2/\alpha^2 - 1$$

После двукратного дифференцирования и проведения несложных, но громоздких преобразований, уравнения (2.2) преобразуются к виду [3]

$$(d^2/dx_3^2 - n_i^2) (d^2/dx_3^2 - n_i^2) u_i' = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

$$n_1^2 = \xi^2 - \alpha^2$$

Для дальнейшего выберем ветви при извлечении корней для n_1 и n_2 . Будем считать, что \sqrt{s} — положительное число при $s > 0$ и $\sqrt{s} = -i\sqrt{|s|}$ при $s < 0$.

Из (2.3) следует, что любое решение имеет вид

$$u_i' = A_i \exp(-n_1 x_3) + B_i \exp(-n_2 x_3) + C_i \exp(n_1 x_3) + D_i \exp(n_2 x_3) \quad (2.4)$$

Далее отдельно рассмотрим решения в верхнем и нижнем полупространствах. Все что относится к верхнему полупространству пометим индексом (+), а к нижнему — индексом (-).

Из (2.4), условия невозрастания решения на бесконечности и условий Зоммерфельда

$$u_i^{\Lambda+} = A_i^+ \exp(-n_1 x_3) + B_i^+ \exp(-n_2 x_3) \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в исходную систему уравнений (2.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим систему уравнений, связывающую коэффициенты A_i^+, B_i^+ :

$$A_1^+ = i \xi_1 A_3^+ / n_1; \quad A_2^+ = i \xi_2 A_3^+ / n_1; \quad B_3^+ = -i (\xi_1 B_1^+ + \xi_2 B_2^+) / n_2 \quad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) имеем

$$u_j^{\Lambda+} = i \xi_j A_3^+ n_1^{-1} \exp(-n_1 x_3) + B_j^+ \exp(-n_2 x_3) \quad (j = 1, 2) \quad (2.7)$$

$$u_3^{\Lambda+} = A_3^+ \exp(-n_1 x_3) - i (\xi_1 B_1^+ + \xi_2 B_2^+) n_2^{-1} \exp(-n_2 x_3)$$

С помощью (2.7) вычислим напряжения в верхнем полупространстве

$$\frac{\sigma_{\beta}^{\Lambda+}}{2\mu} = -i \xi_j A_3^+ \exp(-n_1 x_3) - \frac{[(n_2^2 + \xi_j^2) B_j^+ + \xi_1 \xi_2 B_{3-j}^+]}{2n_2} \exp(-n_2 x_3) \quad (j = 1, 2)$$

$$\frac{\sigma_{33}^{\Lambda+}}{2\mu} = \frac{(2\xi^2 - \beta^2)}{2n_1} A_3^+ \exp(-n_1 x_3) + i (\xi_1 B_1^+ + \xi_2 B_2^+) \exp(-n_2 x_3)$$

В частности, в плоскости $x_3 = 0$ получим

$$\frac{\sigma_{\beta}^{\Lambda+}}{2\mu} = -i \xi_j A_3^+ - \frac{[(n_2^2 + \xi_j^2) B_j^+ + \xi_1 \xi_2 B_{3-j}^+]}{2n_2} \quad (i = 1, 2) \quad (2.8)$$

$$\frac{\sigma_{33}^{\Lambda+}}{2\mu} = -\frac{(2\xi^2 - \beta^2) A_3^+}{2n_1} + i (\xi_1 B_1^+ + \xi_2 B_2^+)$$

Аналогично для нижнего полупространства из (2.4), условия невозрастания решения при $x_3 \rightarrow -\infty$ и условий Зоммерфельда получим

$$u_i^{\wedge-} = C_1^- \exp(n_1 x_3) + D_1^- \exp(n_2 x_3) \quad (2.9)$$

После подстановки (2.9) в (2.2) и выражения C_1^-, C_2^-, D_3^- через C_3^-, D_1^-, D_2^- будем иметь

$$u_j^{\wedge-} = -i \xi_j n_1^{-1} C_3^- \exp(n_1 x_3) + D_j^- \exp(n_2 x_3) \quad (j = 1, 2) \quad (2.10)$$

$$u_3^{\wedge-} = C_3^- \exp(n_1 x_3) + i (\xi_1 D_1^- + \xi_2 D_2^-) n_2^{-1} \exp(n_2 x_3)$$

Далее, вычисляя из (2.10) напряжения в нижнем полупространстве и рассматривая их в плоскости $x_3 = 0$, получим

$$\frac{\sigma_{\beta}^{\wedge-}}{2\mu} = -i \xi_j C_3^- + \frac{[(n_2^2 + \xi_j^2) D_j^- + \xi_1 \xi_2 D_{3-j}^-]}{2n_2} \quad (j = 1, 2) \quad (2.11)$$

$$\frac{\sigma_{33}^{\wedge-}}{2\mu} = \frac{(2\xi^2 - \beta^2) C_3^-}{2n_1} + i (\xi_1 D_1^- + \xi_2 D_2^-)$$

Из (2.7) и (2.10) запишем выражения для перемещений в плоскости $x_3 = 0$:

$$u_j^{\wedge+} = i \xi_j A_3^+ / n_1 + B_j^+ \quad (j = 1, 2) \quad (2.12)$$

$$u_3^{\wedge+} = A_3^+ - i (\xi_1 B_1^+ + \xi_2 B_2^+) / n_2$$

$$u_j^{\wedge-} = -i \xi_j C_3^- / n_1 + D_j^- \quad (j = 1, 2) \quad (2.13)$$

$$u_3^{\wedge-} = C_3^- + i (\xi_1 D_1^- + \xi_2 D_2^-) / n_2$$

Из (2.8) и (2.12) выразим A_3^+, B_1^+, B_2^+ через $\sigma_{13}^{\wedge+}, \sigma_{23}^{\wedge+}, u_3^{\wedge+}$ и подставим в (2.8) в выражение для $\sigma_{33}^{\wedge+}$. В итоге получим

$$\sigma_{33}^{\wedge+} / (2\mu) = M(\xi) u_3^{\wedge+} + N(\xi) (\xi_1 v_{13}^{\wedge+} + \xi_2 \sigma_{23}^{\wedge+}) \quad (2.14)$$

$$M(\xi) = ((2\xi^2 - \beta^2)^2 - 4n_1 n_2 \xi^2) / (2\beta^2 n_1)$$

$$N(\xi) = i (2n_1 n_2 - (2\xi^2 - \beta^2)) / (2\mu \beta^2 n_1)$$

Аналогично из (2.11) и (2.13) выразим C_3^-, D_1^-, D_2^- через $\sigma_{13}^{\wedge-}, \sigma_{23}^{\wedge-}, u_3^{\wedge-}$ и подставим в (2.11) в выражение для $\sigma_{33}^{\wedge-}$, тогда будем иметь

$$\sigma_{33}^{\wedge-} / (2\mu) = -M(\xi) u_3^{\wedge-} - N(\xi) (\xi_1 \sigma_{13}^{\wedge-} + \xi_2 \sigma_{23}^{\wedge-}) \quad (2.15)$$

Складывая (2.14) и (2.15) и учитывая, что в условиях рассматриваемой задачи к поверхностям трещины приложены равные по величине и противоположно направленные усилия, т. е. напряжения $\sigma_{\beta}^{\wedge+}$ и $\sigma_{\beta}^{\wedge-}$ должны совпадать в плоскости $x_3 = 0$ ($\sigma_{\beta}^{\wedge+} = \sigma_{\beta}^{\wedge-} = \sigma_{\beta}^{\wedge}$, $(i = 1, 2, 3)$), получим

$$\sigma_{33}^{\wedge} / \mu = M(\xi) [u_3^{\wedge}] \quad (2.16)$$

Здесь и ниже квадратные скобки означают скачок соответствующей величины в плоскости $x_3 = 0$ ($[u_i] = u_i^+ - u_i^-$ $(i = 1, 2, 3)$).

Аналогично выводу (2.16) из (2.8), (2.12) выразим A_3^+, B_1^+, B_2^+ через $u_1^+, u_2^+, \sigma_{33}^+$ и подставим в (2.8) в выражения для σ_{β}^+ ($j = 1, 2$). В результате найдем

$$\sigma_{\beta}^+ / (2\mu) = R_j \sigma_{33}^+ + S_j \mu_j^+ + T u_{3-j}^+ \quad (j = 1, 2) \quad (2.17)$$

$$R_j(\xi) = i\xi_j (2n_2^2 + \beta^2 - 2n_1 n_2) / (2\beta^2 n_2 \mu)$$

$$S_j(\xi) = (4\xi_j^2 n_2^2 - \beta^2 (n_2^2 - \xi_j^2) - 4\xi_j^2 n_1 n_2) / (2\beta^2 n_2)$$

$$T(\xi) = \xi_1 \xi_2 (4n_2^2 + \beta^2 - 4n_1 n_2) / (2\beta^2 n_2)$$

Таким же образом из (2.11), (2.13) выразим C_3^-, D_1^-, D_2^- через $u_1^-, u_2^-, \sigma_{33}^-$ и подставим в (2.11) в выражения для σ_{β}^- ($j = 1, 2$). В результате получим

$$\sigma_{\beta}^- / (2\mu) = -R_j \sigma_{33}^- - S_j \mu_j^- - T u_{3-j}^- \quad (2.18)$$

Складывая (2.17) и (2.18) с учетом равенства σ_{β}^+ и σ_{β}^- ($j = 1, 2, 3$) при $x_3 = 0$ будем иметь

$$\sigma_{\beta}^+ / \mu = S_j [u_j^+] + T [u_{3-j}^+] \quad (j = 1, 2) \quad (2.19)$$

Усилия t_j , действующие на поверхность $x_3 = 0$, ограничивающую верхнее полупространство отличаются от σ_{j3} на знак. Таким образом (2.16), (2.19) определяют систему псевдодифференциальных уравнений, связывающих амплитуды скачков смещений в плоскости $x_3 = 0$ с амплитудами действующих усилий

$$Q_{\beta} [u] = t / \mu \quad (2.20)$$

$$Q_{\beta}(\xi) = \begin{vmatrix} K_{11}(\xi) & K_{12}(\xi) & 0 \\ K_{21}(\xi) & K_{22}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}(\xi) \end{vmatrix}$$

$$K_{jj}(\xi) = -S_j(\xi) \quad (j = 1, 2), \quad K_{33}(\xi) = -M(\xi), \quad K_{12}(\xi) = K_{21}(\xi) = -T(\xi)$$

где $[u] = ([u_1], [u_2], [u_3])$, O_{β} — матричный псевдодифференциальный оператор, $Q_{\beta}(\xi)$ — его символ.

Из (2.20) видно, что динамическая задача о произвольном нагружении плоской трещины в упругом пространстве распадается на две независимые задачи: нормального отрыва и сдвига. Компонента, отвечающая нормальному отрыву, совпадает с известным уравнением, выведенным в [4].

Исходя из (2.20), краевая задача, отвечающая задаче о плоской трещине, к поверхностям которой приложены равные по величине и противоположно направленные усилия может быть сформулирована следующим образом

$$p_G Q_{\beta} [u(x)] = t(x) / \mu; \quad [u(x)] = 0, \quad x \notin G \quad (2.21)$$

где p_G — сужение на область трещины G .

Ниже рассматривается сдвиговая задача. Поэтому далее под $[u(x)]$ будем подразумевать вектор $([u_1], [u_2])$, а под $t(x)$ — вектор (t_1, t_2) . Вместо краевой задачи (2.21) рассматривается краевая задача

$$p_G K_{\beta} [u(x)] = t(x) / \mu = p(x) \quad (p_j = t_j / \mu) \quad (2.22)$$

$$[u(x)] = 0, \quad x \notin G$$

$$K_{\beta}(\xi) = \begin{vmatrix} K_{11}(\xi) & K_{12}(\xi) \\ K_{21}(\xi) & K_{22}(\xi) \end{vmatrix}$$

где K_{β} — матричный псевдодифференциальный оператор, $K_{\beta}(\xi)$ — его символ.

3. Численный метод решения задачи. Основные идеи и обоснование используемого здесь численного метода приведены в [1]. Применительно к рассматриваемому уравнению (2.22) метод заключается в следующем. Выбираются две системы базисных функций $e_i(x)$ и $\varphi_j(x)$. Базис $e_i(x)$ учитывает известные особенности решения и подбирается таким образом, чтобы решение могло быть приближено сравнительно небольшим количеством элементов этого базиса. В частности, ниже в качестве $e_i(x)$, аналогично [1, 2], выбирается $e_i(x) = e_0(x) g_i(x)$, где $e_0(x)$ — функция, учитывающая корневую асимптотику решения вблизи контура трещины, $g_i(x)$ — полная система гладких вектор-функций. Базис $\varphi_j(x)$ выбирается ортонормированным в $L_2(G)$ и таким, чтобы достаточно просто вычислялись результаты применения к его элементам оператора K_β^* ($K_\beta^* \varphi_j$, где K_β^* — оператор, сопряженный к K_β). Ниже, аналогично [1, 2], в качестве $\varphi_j(x)$ взята система вектор-функций, получающаяся в результате ортогонализации в $L_2(G)$ системы вектор-функций вида $\psi^t = (\psi_\alpha^\gamma(x), 0)$:

$$\psi_b = (0, \psi_\alpha^\gamma(x)), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \gamma \geq 1/2$$

$$\psi_\alpha^\gamma(x) = [\alpha_3^2 - |x - \alpha_M|^2]^\gamma \quad \text{при } d_M < 1$$

$$\psi_\alpha^\gamma(x) = 0 \quad \text{при } d_M \geq 1, \quad \alpha_M = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$|x - \alpha_M|^2 = (x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2, \quad d_M = |x - \alpha_M|^2 / \alpha_3^2$$

Круги радиусов α_3 с центрами в точках α_M принадлежат G .

Приближение решения (2.22) ищется в подпространстве E_n , натянутом на n элементов базиса e_j ($[u]_n = \sum_{i=1}^n c_i e_i(x)$). Неизвестные коэффициенты c_i определяются из условия минимизации на подпространстве E_n следующего функционала [1]:

$$S_N^2([u]_n) = \sum_{k=1}^N \left[\sum_{i=1}^n c_i (e_i, K_\beta^* \varphi_k) - (p, \varphi_k) \right] \overline{\left[\sum_{i=1}^n c_i (e_i, K_\beta^* \varphi_k) - (p, \varphi_k) \right]} \quad (3.1)$$

Здесь и ниже черта сверху означает комплексное сопряжение. Функционал $S_N^2([u]_n)$ определяет отклонение между ортогональными (в смысле скалярного произведения в $L_2(G)$) проекциями вектор-функций p и $K_\beta [u]_n$ на подпространство, натянутое на N элементов базиса φ_k . Поскольку матричный оператор K_β комплекснозначный, то и неизвестные коэффициенты c_i комплексны. Условие минимизации (3.1) $\partial S_N^2([u]_n) / \partial \bar{c}_j = 0$ приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^N (e_i, K_\beta^* \varphi_k) \overline{(e_j, K_\beta^* \varphi_k)} = \sum_{k=1}^N (p, \varphi_k) \overline{(e_j, K_\beta^* \varphi_k)} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (3.2)$$

Таким образом для решения задачи остается вычислить выражения $K_\beta^* \varphi_k$, входящие в (3.2). Поскольку φ_k являются линейными комбинациями вектор-функций вида ψ^t и ψ_b , то достаточно вычислить $K_\beta^* \psi^t$ и $K_\beta^* \psi_b$.

4. Вывод вспомогательных соотношений. Из (2.22) следует, что

$$K_\beta^* \psi^t = (K_{11} \psi_\alpha^\gamma, K_{12} \psi_\alpha^\gamma), \quad K_\beta^* \psi_b = (K_{12} \psi_\alpha^\gamma, K_{22} \psi_\alpha^\gamma) \quad (4.1)$$

где K_{ij} — псевдодифференциальные операторы с символами $K_j(\xi)$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$).

Из (4.1) видно, что достаточно уметь вычислять $K_{\nu}\psi_{\alpha}^{\nu}$. Согласно определению

$$K_{\nu}\psi_{\alpha}^{\nu} = F^{-1}(K_{\nu}(\xi)\psi_{\alpha}^{\nu}(\xi)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} K_{\nu}(\xi)\psi_{\alpha}^{\nu}(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi \quad (4.2)$$

где $\psi_{\alpha}^{\nu}(\xi)$ — преобразование Фурье от $\psi_{\alpha}^{\nu}(x)$.

Поскольку вектор-функции $K_{\nu}\psi_{\alpha}^{\nu}$ для различных (α_1, α_2) отличаются только на сдвиг, далее будем предполагать $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ и α_3 обозначать через a .

Согласно [1]:

$$\psi_{\alpha}^{\nu}(\xi) = 2^{\nu+1}\pi a^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)|\xi|^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(a|\xi|) \quad (4.3)$$

Здесь $J_{\nu}(\xi)$ — функция Бесселя порядка ν , $\Gamma(s)$ — гамма функция.

Из (4.2), (4.3) с учетом того, что умножение на ξ_j в ξ -представлении соответствует дифференцированию в x -представлении, получим

$$\begin{aligned} K_{\nu}\psi_{\alpha}^{\nu}(x) &= \frac{1}{2\beta^2(2\pi)^2} \left[-4 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_{R^2} n_1(\xi)\psi_{\alpha}^{\nu}(\xi)\exp[-i(x,\xi)]d\xi + \right. \\ &+ \beta^2 \int_{R^2} n_2(\xi)\psi_{\alpha}^{\nu}(\xi)\exp[-i(x,\xi)]d\xi + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_{R^2} \frac{\psi_{\alpha}^{\nu}(\xi)}{n_2(\xi)} \times \\ &\left. \times \exp[-i(x,\xi)]d\xi + 4 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_{R^2} n_2(\xi)\psi_{\alpha}^{\nu}(\xi)\exp[-i(x,\xi)]d\xi \right] \quad (4.4) \end{aligned}$$

Обозначим $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r$, $|\xi| = t$ и перейдем в (4.4) к полярным координатам. Проинтегрировав по углу, получим

$$\begin{aligned} K_{\nu}\psi_{\alpha}^{\nu}(x) &= \frac{C}{\beta^2} \left\{ -4 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_0^{\infty} \sqrt{t^2 - \alpha^2} D(\gamma, a, r, t) dt + \right. \\ &+ \beta^2 \int_0^{\infty} \sqrt{t^2 - \beta^2} D(\gamma, a, r, t) dt + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \beta^2}} D(\gamma, a, r, t) dt + \\ &\left. + 4 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_0^{\infty} \sqrt{t^2 - \beta^2} D(\gamma, a, r, t) dt \right\}, \quad C = 2^{\nu+1}a^{\nu+1}\Gamma(\nu+1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$D(\gamma, a, r, t) = t^{-\nu}J_{\nu+1}(at)J_0(rt) \quad (j = 1, 2)$$

Разделяя вещественную и мнимую части в операторах $K_{\nu} = A_{\nu} + iB_{\nu}$ ($j = 1, 2$), из (4.5) получим

$$\begin{aligned} A_{\nu}\psi_{\alpha}^{\nu}(x) &= \frac{C}{\beta^2} \left\{ -4 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_{\alpha}^{\infty} \sqrt{t^2 - \alpha^2} D(\gamma, a, r, t) dt + \right. \\ &+ \beta^2 \int_{\beta}^{\infty} \sqrt{t^2 - \beta^2} D(\gamma, a, r, t) dt + \\ &\left. + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_{\beta}^{\infty} \frac{D(\gamma, a, r, t)}{\sqrt{t^2 - \beta^2}} dt + 4 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_{\beta}^{\infty} \sqrt{t^2 - \beta^2} D(\gamma, a, r, t) dt \right\} \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\nu}\psi_{\alpha}^{\nu}(x) &= \frac{C}{\beta^2} \left\{ 4 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - t^2} D(\gamma, a, r, t) dt - \beta^2 \int_0^{\beta} \sqrt{\beta^2 - t^2} D(\gamma, a, r, t) dt + \right. \\ &\left. + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_0^{\beta} \frac{D(\gamma, a, r, t)}{\sqrt{\beta^2 - t^2}} dt - 4 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_0^{\beta} \sqrt{\beta^2 - t^2} D(\gamma, a, r, t) dt \right\} \quad (4.7) \end{aligned}$$

Аналогично будем иметь

$$K_{12}\psi_\alpha^\gamma(x) = \frac{1}{2\beta^2(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[4 \int_{R^2} n_2(\xi) \psi_\alpha^{\Lambda\gamma}(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi + \right. \\ \left. + \beta^2 \int_{R^2} \frac{\psi_\alpha^{\Lambda\gamma}(\xi)}{n_2(\xi)} e^{-i(x, \xi)} d\xi - 4 \int_{R^2} n_1(\xi) \psi_\alpha^{\Lambda\gamma}(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi \right] \quad (4.8)$$

Перейдя в (4.8) к полярным координатам и проинтегрировав по углу, получим

$$K_{12}\psi_\alpha^\gamma(x) = \frac{C}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[4 \int_0^\infty \sqrt{t^2 - \beta^2} D(\gamma, a, r, t) dt + \right. \\ \left. + \beta^2 \int_0^\infty \frac{D(\gamma, a, r, t)}{\sqrt{t^2 - \beta^2}} dt - 4 \int_0^\infty \sqrt{t^2 - \alpha^2} D(\gamma, a, r, t) dt \right] \quad (4.9)$$

Разделяя вещественную и мнимую части в операторе $K_{12} = A_{12} + iB_{12}$, из (4.9) найдем

$$A_{12}\psi_\alpha^\gamma(x) = \frac{C}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[4 \int_\beta^\infty \sqrt{t^2 - \beta^2} D(\gamma, a, r, t) dt + \right. \\ \left. + \beta^2 \int_\beta^\infty \frac{D(\gamma, a, r, t)}{\sqrt{t^2 - \beta^2}} dt - 4 \int_\alpha^\infty \sqrt{t^2 - \alpha^2} D(\gamma, a, r, t) dt \right] \quad (4.10)$$

$$B_{12}\psi_\alpha^\gamma(x) = -\frac{C}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[4 \int_0^\beta \sqrt{\beta^2 - t^2} D(\gamma, a, r, t) dt - \right. \\ \left. - \beta^2 \int_0^\beta \frac{D(\gamma, a, r, t)}{\sqrt{\beta^2 - t^2}} dt - 4 \int_0^\alpha \sqrt{\alpha^2 - t^2} D(\gamma, a, r, t) dt \right] \quad (4.11)$$

Из (4.6), (4.7), (4.10), (4.11) следует, что $K_{ij}\psi_\alpha^\gamma(x)$ выражаются через интегралы вида

$$I_{\nu\mu}(a, r, \kappa, \theta, d) = \int_0^d (d^2 - t^2)^{\kappa-1} t^{\theta-1} J_\nu(at) J_\mu(rt) dt$$

$$J_{\nu\mu}(a, r, \kappa, \theta, d) = \int_d^\infty (t^2 - d^2)^{\kappa-1} t^{\theta-1} J_\nu(at) J_\mu(rt) dt$$

и их вторые производные.

Интегралы $I_{\nu\mu}(a, r, \kappa, \theta, d)$, $J_{\nu\mu}(a, r, \kappa, \theta, d)$ вычислены в [2]. Согласно [2], при $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, ($\sigma = (\theta + \mu + \nu)/2$) имеем

$$I_{\nu\mu}(a, b, \kappa, \theta, d) = \begin{cases} I_{\nu\mu}'(a, b, \kappa, \theta, d) & (a < b) \\ I_{\mu\nu}'(b, a, \kappa, \theta, d) & (a > b) \end{cases}$$

При $\kappa > 0$, $\theta + 2\kappa < 3$

$$J_{\nu\mu}(a, b, \kappa, \theta, d) = \begin{cases} J_{\nu\mu}^{(1)}(a, b, \kappa, \theta, d) + J_{\nu\mu}^{(2)}(a, b, \kappa, \theta, d) & (a < b) \\ J_{\mu\nu}^{(1)}(b, a, \kappa, \theta, d) + J_{\mu\nu}^{(2)}(b, a, \kappa, \theta, d) & (a > b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
J_{\nu\mu}'(a, b, \kappa, \theta, d) &= \frac{d^{2\sigma+2\kappa-2} a^\nu b^\mu \Gamma(\kappa) \Gamma(\sigma)}{2^{1+\nu+\mu} \Gamma(\kappa+\sigma) \Gamma(1+\nu) \Gamma(1+\mu)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\sigma)_p}{(\kappa+\sigma)_p} \times \\
&\times \frac{(-d^2 b^2/4)^p}{(1+\mu)_p p!} {}_2F_1\left(-p, -\mu-p; 1+\nu; \frac{a^2}{b^2}\right) \\
J_{\nu\mu}^{(1)}(a, b, \kappa, \theta, d) &= \frac{d^{2\sigma+2\kappa-2} a^\nu b^\mu \Gamma(\kappa) \Gamma(1-\kappa-\sigma)}{2^{1+\nu+\mu} \Gamma(1+\nu) \Gamma(1+\mu) \Gamma(1-\sigma)} \times \\
&\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\sigma)_p (-d^2 b^2/4)^p}{(\kappa+\sigma)_p (1+\mu)_p p!} {}_2F_1\left(-p, -\mu-p; 1+\nu; \frac{a^2}{b^2}\right) \\
J_{\nu\mu}^{(2)}(a, b, \kappa, \theta, d) &= \left(\frac{a}{b}\right)^\nu \frac{1}{2} \left(\frac{2}{b}\right)^{\theta+2\kappa-2} \frac{\Gamma(\kappa+\sigma-1)}{\Gamma(1+\nu) \Gamma(2+\mu-\kappa-\sigma)} \times \\
&\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(1-\kappa)_p (-d^2 b^2/4)^p}{(2-\kappa-\sigma)_p (2+\mu-\kappa-\sigma)_p p!} {}_2F_1\left(\kappa+\right. \\
&\left.+ \sigma-1-p, \kappa+\sigma-1-\mu-p; 1+\nu; \frac{a^2}{b^2}\right)
\end{aligned}$$

где $(s)_0 = 1$, $(s)_p = s(s+1)\dots(s+p-1)$ — символ Похгаммера, ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция.

Подставляя эти выражения в (4.6), (4.7), (4.10), (4.11) и проводя дифференцирования придем к следующим выражениям

$$\begin{aligned}
A_{\beta\beta} \psi_{\alpha}^{\gamma}(x) &= \frac{C a^{\gamma-2} \sqrt{\pi}}{2^{\gamma+1} \Gamma(\gamma+1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta^2 a^2/4)^n (2n-1)}{(\gamma+1/2)_n (n+1)!} \times \quad (4.12) \\
&\times \left\{ \frac{n+1}{n-1/2} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-n, \frac{1}{2}-\gamma-n; 1; z\right) + (n-1+2\gamma^{2n+2}) \times \right. \\
&\times {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-n, \frac{1}{2}-\gamma-n; 2; z\right) + (n-1+2\gamma^{2n+2}) \left(n-\frac{3}{2}\right) \left(n+\gamma-\frac{1}{2}\right) \times \\
&\times \frac{x^2}{a^2} {}_2F_1\left(\frac{5}{2}-n, \frac{3}{2}-\gamma-n; 3; z\right) \left. \right\} \text{ при } z < 1 \\
A_{\beta\beta} \psi_{\alpha}^{\gamma}(x) &= -\frac{C a^{\gamma+1}}{2^{\gamma+1} \Gamma(\gamma+2) r^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta^2 r^2/4)^n}{n! (-1/2)_n} \times \\
&\times \left\{ {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-n, \frac{3}{2}-n; \gamma+2; \frac{1}{z}\right) + \frac{(n-1+2\gamma^{2n+2})}{n+1} \times \right. \\
&\times \left[\left(1+(2n-3)\frac{x_1^2}{r^2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}-n; \gamma+2; \frac{1}{z}\right) \frac{(n-1/2)}{(\gamma+2)} \times \right. \\
&\times \frac{1}{2} \left(1+2(2n-3)\frac{x_1^2}{r^2}\right) {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-n, \frac{3}{2}-n; \gamma+3; \frac{1}{z}\right) + \\
&\left. \left. + \frac{(2n-1)(n-3/2)^2}{(\gamma+2)(\gamma+3)} \frac{1}{z^2} \left(\frac{x_1^2}{r^2}\right) {}_2F_1\left(\frac{5}{2}-n, \frac{5}{2}-n; \gamma+4; \frac{1}{z}\right) \right] \right\} \text{ при } z > 1
\end{aligned}$$

$$A_{12}\Psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = \frac{C\sqrt{\pi}a^{\gamma-2}}{2^{\gamma+2}} \left(\frac{x_1}{a}\right) \left(\frac{x_2}{a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1+2\eta^{2n+2})(2n-1)}{\Gamma(\gamma+n-1/2)(n+1)!} \times$$

$$\times (2n-3)(-\beta^2 a^2/4)^n {}_2F_1\left(\frac{5}{2}-n, \frac{3}{2}-\gamma-n; 3; z\right) \text{ при } z < 1$$

$$A_{12}\Psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = \frac{Ca^{\gamma+1}}{2^{\gamma+1}\Gamma(\gamma+2)r^3} \left(\frac{x_1}{r}\right) \left(\frac{x_2}{r}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n-3)}{(n+1)!(1/2)_n} \times$$

$$\times (n-1+2\eta^{2n+2})(-\beta^2 r^2/4)^n \left\{ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}-n; \gamma+2; \frac{1}{z}\right) - \right.$$

$$- \frac{(2n-1)}{(\gamma+2)} \left(\frac{1}{z}\right) {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-n, \frac{3}{2}-n; \gamma+3; \frac{1}{z}\right) + \frac{(2n-1)(2n-3)}{4(\gamma+2)(\gamma+3)} \times$$

$$\times \frac{1}{z^2} {}_2F_1\left(\frac{5}{2}-n, \frac{5}{2}-n; \gamma+4; \frac{1}{z}\right) \left. \right\} \text{ при } z > 1$$

$$B_{jj}\Psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = \frac{-C\beta^3 a^{\gamma+1}}{3 \cdot 2^{\gamma+2}\Gamma(\gamma+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta^2 a^2/4)^n (n+1)}{(5/2)_{n+1}(\gamma+2)_n} \left\{ \frac{2n+5}{n+1} \times \right.$$

$$\times {}_2F_1(-n, -\gamma-n-1; 1; z) + (2n+1+4\eta^{2n+5}) \times$$

$$\times \left[{}_2F_1(-n, -\gamma-n-1; 2; z) + n \times \right.$$

$$\times (\gamma+n+1) \frac{x_j^2}{a^2} {}_2F_1(-n+1, -\gamma-n; 3; z) \left. \right\} \text{ при } z < 1$$

$$B_{jj}\Psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = \frac{-C\beta^3 a^{\gamma+1}}{3 \cdot 2^{\gamma+2}\Gamma(\gamma+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta^2 r^2/4)^n}{(5/2)_{n+1}n!} \left\{ (2n+5) \times \right.$$

$$\times {}_2F_1\left(-n, -n; \gamma+2; \frac{1}{z}\right) + (2n+1+4\eta^{2n+5}) \left[\left(1+2n\frac{x_j^2}{r^2}\right) \times \right.$$

$$\times {}_2F_1\left(-n-1, -n-1; \gamma+2; \frac{1}{z}\right) - \frac{(n+1)}{(\gamma+2)} \frac{1}{z} \left(1+4n\frac{x_j^2}{r^2}\right) \times$$

$$\times {}_2F_1\left(-n-n; \gamma+3; \frac{1}{z}\right) + \frac{2n^2(n+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} \frac{1}{z^2} \frac{x_j^2}{r^2} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(-n+1, -n+1; \gamma+4; \frac{1}{z}\right) \left. \right\} \text{ при } z > 1$$

$$B_{12}\Psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = \frac{C\beta^5 a^{\gamma+1} x_1 x_2}{3 \cdot 2^{\gamma+4}\Gamma(\gamma+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3+4\eta^{2n+7})(n+1)(n+2)}{(5/2)_{n+2}(\gamma+2)_n} \times$$

$$\times (-\beta^2 a^2/4)^n {}_2F_1(-n, -\gamma-n-1; 3; z) \text{ при } z < 1$$

$$B_{12}\Psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = \frac{C\beta^5 a^{\gamma+1} x_1 x_2}{3 \cdot 2^{\gamma+3}\Gamma(\gamma+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3+4\eta^{2n+7})}{(5/2)_{n+2}n!} (-\beta^2 r^2/4)^n \times$$

$$\times \left[{}_2F_1\left(-n-2, -n-2; \gamma+2; \frac{1}{z}\right) - \frac{2(n+2)}{(\gamma+2)} \frac{1}{z} \times \right.$$

$$\times {}_2F_1\left(-n-1, -n-1; \gamma+3; \frac{1}{z}\right) + \frac{(n+1)(n+2)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} \frac{1}{z^2} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(-n, -n; \gamma+4; \frac{1}{z}\right) \left. \right] \text{ при } z > 1$$

$$z = r^2/a^2, \eta^2 = \alpha^2/\beta^2 = (1-2\nu)/(2(1-\nu)) \quad (j = 1, 2)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

В случае $\beta = 0$ формулы (4.12) соответствуют результатам применения элементов матричного оператора статической задачи о трещине сдвига к функциям $\psi_\alpha^y(x)$. Как видно из (4.12) функции $A_y \psi_\alpha^y(x)$, отвечающие результатам применения вещественных частей оператора K_β к базисным функциям, раскладываются в ряд по четным степеням β , а $B_y \psi_\alpha^y(x)$, отвечающие результатам применения мнимых частей оператора K_β раскладываются в ряд по нечетным степеням β . Это вполне аналогично случаю оператора, соответствующего нормальному отрыву [2].

5. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) и полного сечения рассеяния. Найдя из решения системы (3.2) коэффициенты c_i и определив с их помощью скачки смещений в области трещины $[u_1]$ и $[u_2]$, можно вычислить все важнейшие характеристики решения исследуемой задачи, например, КИН и полное сечение рассеяния. КИН выражаются через скачки смещений вблизи контура трещины в нормальном ($[u_n]$) и касательном ($[u_t]$) к контуру трещины направлениях. Согласно [5]:

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu [u_n]}{2(1-\nu)} \left(\frac{\pi}{2s}\right)^{1/2}, \quad K_3 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu [u_t]}{2} \left(\frac{\pi}{2s}\right)^{1/2} \quad (5.1)$$

где значения $[u_n]$, $[u_t]$ берутся в точках области трещины G , лежащих на нормали к рассматриваемой точке контура на расстоянии s от контура.

Сами скачки смещений $[u_n]$, $[u_t]$ определяются с помощью вычисляемых в программе скачков $[u_1]$, $[u_2]$ по формулам $[u_n] = [u_1] \cos \theta' + [u_2] \sin \theta'$, $[u_t] = -[u_1] \sin \theta' + [u_2] \cos \theta'$, где θ' угол между положительным направлением оси x_1 и направлением внешней нормали к контуру трещины в рассматриваемой точке.

Полное сечение рассеяния характеризует эффективность рассеяния трещиной плоских упругих волн и используется в неразрушающих методах контроля. Согласно определению, полное сечение рассеяния равно отношению усредненной по периоду колебаний скорости потока энергии рассеянной волны, распространяемого во всех направлениях, к также усредненной скорости потока энергии падающей волны, проходящей через единичную площадку, перпендикулярную направлению падения. В [6] показано, что рассматриваемая величина выражается через главные члены асимптотики дальнего поля смещений для рассеянной волны в направлении распространения падающей волны. В [7] дано представление дальнего поля смещений через интегралы от скачков смещений в плоскости трещины. Согласно [7] в направлении падающей волны (в данном случае $(0, 0, 1)$) $u_1^i \cong h_1(\beta) \exp(i\beta R)/R$, $u_2^i \cong h_2(\beta) \exp(i\beta R)/R$, $u_3^i \cong h_3(\alpha) \exp(i\alpha R)/R$, где u_j^i — компоненты смещения рассеянной волны, R — расстояние от начала координат, расположенного в области трещины, до точки наблюдения.

Для исследуемой задачи значения $h_j(\beta)$ ($j = 1, 2$), $h_3(\alpha)$ представляются с помощью скачков смещений в области трещины следующим образом [7]:

$$h_1(\beta) = \frac{i\beta^3 \mu}{4\pi \rho \omega^2} \int_G [u_1] dx = \frac{i\beta}{4\pi} \int_G [u_1] dx \quad (5.2)$$

$$h_2(\beta) = \frac{i\beta^3 \mu}{4\pi \rho \omega^2} \int_G [u_2] dx = \frac{i\beta}{4\pi} \int_G [u_2] dx, \quad h_3(\alpha) = 0$$

Согласно [6] полное сечение рассеяния для поперечной волны (Σ_s) выражается через проекцию вектора $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ на вектор поляризации падающей волны (\mathbf{b}) с помощью формулы

$$\Sigma_s = \frac{4\pi}{\beta} \text{Im}(\mathbf{b}, \mathbf{h}) \quad (5.3)$$

где Im обозначает мнимую часть числа.

Ниже в расчетах рассмотрена падающая поперечная волна, поляризованная вдоль оси x_1 ($b = (1, 0, 0)$). Для нее согласно (5.2), (5.3) имеем

$$\Sigma_s = \frac{4\pi}{\beta} \operatorname{Im} h_1(\beta) = \operatorname{Im} i \int_G [u_1] dx \quad (5.4)$$

6. Результаты расчетов. В качестве примера рассмотрена задача о круговой трещине единичного радиуса. Для этого случая система базисных функций $e_i(x)$ была выбрана в виде $e_i(x) = e_0(x) g_i(x)$, где $e_0(x) = (1 - r^2)^{1/2}$, $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $g_i(x)$ — полная система гладких вектор-функций. Без ограничения общности было принято, что приложенная к поверхностям трещины нагрузка направлена вдоль оси x_1 , т. е. правая часть в уравнении (2.22) имеет вид $p(x) = (\text{const}, 0)$. При такой нагрузке решение уравнения (2.22) обладает определенными свойствами симметрии, с учетом которых вектор-функции $g_i(x)$ выбирались в виде $g_i(x) = \cos(j\pi r) \cos(2m\theta), 0$ и $g_i(x) = (0, \cos(k\pi r) \sin(2l\theta))$, где θ — угол в полярной системе координат; j, m, k, l — целые неотрицательные числа.

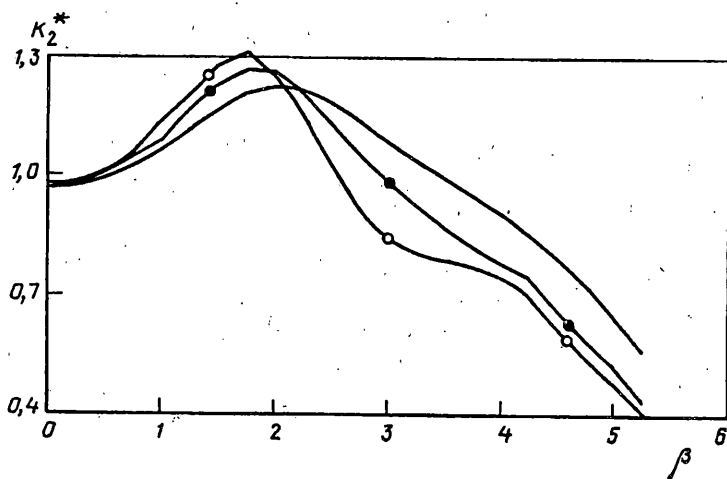
Как указывалось выше вектор скачков смещений приближается суммой $\Sigma_s e_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Обозначим $\Sigma_s g_i = [u^0] = ([u_1^0], [u_2^0])$. Отсюда следует, что $[u_j] = (1 - r^2)^{1/2} [u_j^0]$ ($j = 1, 2$). Из (5.1) и этого соотношения следует

$$K_2 = (1/2) \mu \pi^{1/2} [u_n^0] / (1 - \nu), \quad K_3 = (1/2) \mu \pi^{1/2} [u_t^0]$$

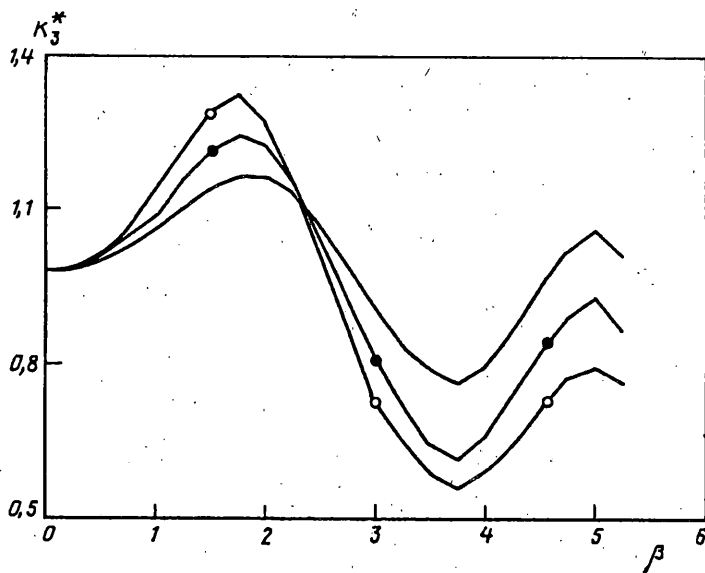
где $[u_n^0], [u_t^0]$ — проекции вектора $[u^0]$ на нормаль и касательную к контуру трещины, а их значения берутся в рассматриваемой точке контура.

Очевидно, что с ростом волнового числа β для хорошего приближения к решению нужно увеличивать количество используемых элементов базиса $e_i(x)$. Для значений $\beta \leq 5,5$ в расчетах количество элементов этого базиса доходило до 14. Из устойчивости результатов расчетов относительно вариации количества элементов базиса $e_i(x)$ можно сделать заключение, что такого количества элементов достаточно для хорошего приближения к решению в указанном диапазоне изменения β . Количество элементов второго базиса варьировалось от 50 до 70, для чего использовалось 25—35 функций вида $\psi_\alpha^\gamma(x)$. В функциях $\psi_\alpha^\gamma(x)$ значение показателя γ изменялось от 2 до 4. Полученные результаты оказались близки друг к другу. Ошибка расчетов при $\beta = 0$ по отношению к известному аналитическому решению статической задачи не превысила 3%.

На фиг. 1, 2 приведены зависимости нормированных коэффициентов интенсивности напряжений $K_2^*(\beta) = |K_2(\beta)|/K_2(0)$ и $K_3^*(\beta) = |K_3(\beta)|/K_3(0)$ для коэффициентов Пуассона $\nu = 0,1$ (кривые помечены светлыми точками), $\nu = 0,3$ (кривые помечены темными точками), $\nu = 0,5$ (сплошные линии). Значения $K_2^*(\beta)$ приведены в точке $\theta = 0$, а $K_3^*(\beta)$ — в точке $\theta = \pi/2$. Несмотря на то, что при $\nu = 0,5$ скорость распространения продольной волны бесконечна, уравнение (2.22) сохраняет смысл. Поэтому на фиг. 1, 2 приведены кривые, отвечающие предельному значению ν . Из графиков следует, что в рассматриваемой задаче увеличение ν вплоть до 0,5 приводит к некоторому снижению максимальных значений $K_{2\max}^*$ и $K_{3\max}^*$ в противоположность случаю нормального падения продольной волны, при котором увеличение ν до 0,5 приводит к существенному увеличению максимального значения коэффициентов интенсивности напряжений



Фиг. 1

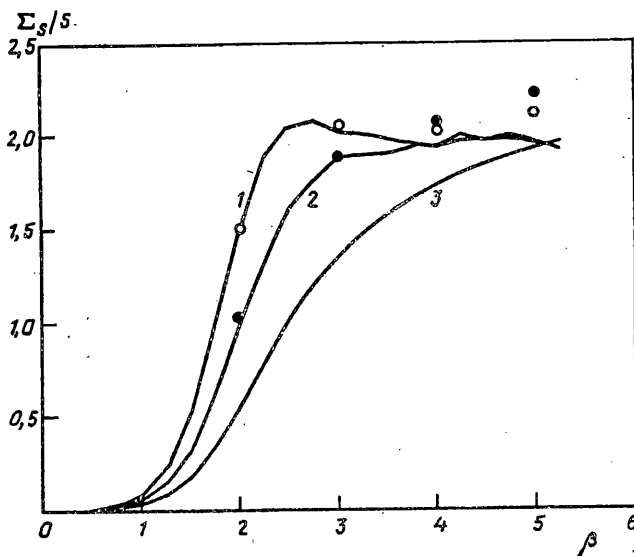


Фиг. 2

[2]. Ниже представлены значения первого максимума на кривых $K_2^*(\beta)$, а также первого максимума и первого минимума на кривых $K_3^*(\beta)$:

	β	$K_2^*_{\max}$	β	$K_3^*_{\max}$	β	$K_3^*_{\min}$
$\nu = 0,1$	1,71	1,31	1,72	1,33	3,76	0,559
$\nu = 0,3$	1,85	1,27	1,77	1,24	3,74	0,614
$\nu = 0,5$	2,05	1,23	1,86	1,17	3,74	0,761

Кривые, представленные на фиг. 1, 2, отвечающие $\nu = 0,3$, хорошо согласуются с результатами расчетов [8], проведенных там для $\nu = 0,25$. Полученные результаты для $\nu = 0,1$ и $\nu = 0,3$ также согласуются с соответствующими результатами [9] вплоть до первого максимума, а затем начинают несколько отличаться. Различие возрастает с ростом β и становится достаточно существенным в области второго максимума для $K_3^*(\beta)$. Согласно [9] второй максимум $K_3^*(\beta)$ для $\nu = 0,3$ превосходит первый. В наших расчетах второй максимум



Фиг. 3

функции $K_3^*(\beta)$ существенно ниже первого, что аналогично случаю падения продольной волны [2].

На фиг. 3 приведены графики зависимости безразмерного полного сечения рассеяния (Σ_s/S , где S — площадь трещины) от волнового числа для тех же значений коэффициента Пуассона: $\nu = 0,1; 0,3; 0,5$ (кривые 1, 2, 3). Здесь кривая, отвечающая $\nu = 0,5$ понимается как результат расчетов по формуле (5.4), которая сохраняет смысл и для несжимаемых материалов. Для сравнения на графике отмечены величины, полученные интерполяцией результатов [10] (светлые точки отвечают $\nu = 0,1$, а темные — $\nu = 0,3$).

7. Решение нестационарной динамической задачи. Полученные результаты для гармонических воздействий позволяют построить решения и в общем случае нестационарных динамических нагрузок. Через $f^v(\zeta)$ будем обозначать преобразование Фурье функции $f(\tau)$ по времени τ :

$$f^v(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\zeta\tau) d\tau$$

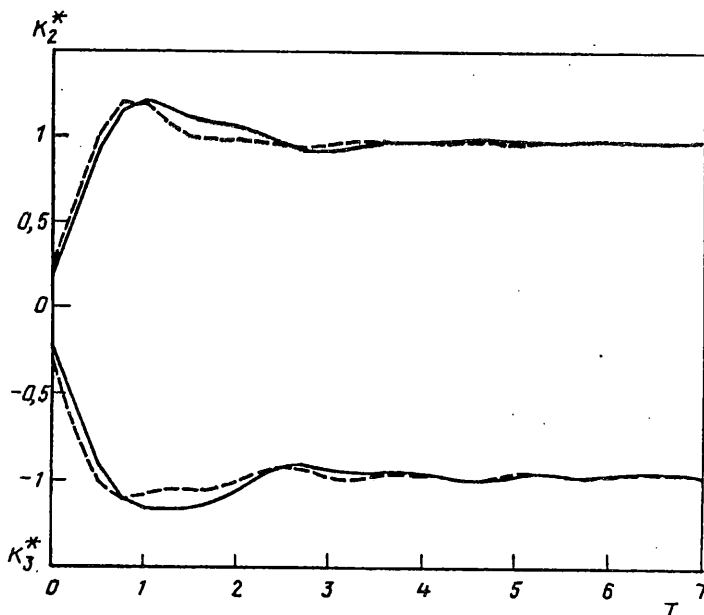
Предположим, что к поверхностям трещины приложены равные по величине и противоположно направленные усилия. Обозначим усилия, приложенные к верхней поверхности трещины, через $t(\tau) = (t_1(\tau), 0)$. Применим преобразование Фурье к уравнениям Навье; тогда получим

$$(\lambda + \mu) u_{i,j}^v + \mu u_{i,j}^v = -\rho \zeta^2 u_i^v \quad (7.1)$$

Усилия, приложенные к поверхности трещины приобретут вид $t^v(\zeta) = (t_1^v(\zeta), 0)$. Уравнения (7.1) с соответствующими граничными условиями полностью аналогичны задаче о гармоническом воздействии с заменой частоты ω на переменную ζ , а нагрузка $t^v(\zeta)$ соответствует амплитуде прикладываемых усилий.

Таким образом, если в результате решения преобразованной задачи определяем коэффициенты интенсивности напряжений $K_j^v(\zeta)$ ($j = 2, 3$), то в исходных переменных получим

$$K_j(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_j^v(\zeta) \exp(i\zeta\tau) d\zeta \quad (7.2)$$



Фиг. 4

Обозначим коэффициенты интенсивности напряжений, соответствующие задаче о гармонических воздействиях с амплитудой приложенных усилий (1,0) через $K_j^0(\omega)$. Следовательно $K_j^*(\zeta) = t_1^*(\zeta) K_j^0(\zeta)$. Отсюда и из (7.2) имеем

$$K_j^*(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t_1^*(\zeta) K_j^0(\zeta) \exp(i\zeta\tau) d\zeta \quad (7.3)$$

Пусть a — характерный размер трещины. Введем безразмерные переменные $T = C_s\tau/a$, $\lambda = \zeta a/C_s$. Обозначим $K_j(\tau) = K_j(aT/C_s) = K_j^*(T)$, $K_j^0(\zeta) = K_j^0(C_s\lambda/a) = K_j^{0*}(\lambda)$, $t_1^*(\zeta) = t_1^*(C_s\lambda/a) = t_1^{0*}(\lambda)$. С учетом этих замен (7.3) примет вид

$$K_j^*(T) = \frac{C_s}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} t_1^{0*}(\lambda) K_j^{0*}(\lambda) \exp(i\lambda T) d\lambda \quad (7.4)$$

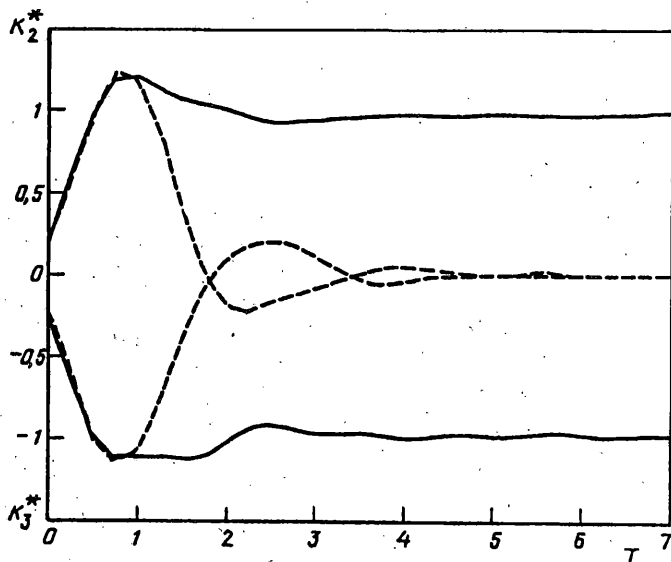
Пусть $H(s)$ — функция Хевисайда ($H(s) = 1$ при $s > 0$, $H(s) = 0$ при $s < 0$). Будем рассматривать нагрузки вида $t_1(\tau) = H(\tau) - H(\tau - \tau_0)$. Для такой нагрузки $t_1^*(\zeta) = (1 - \exp(-i\zeta\tau_0))/(i\zeta) = a(1 - \exp(-i\lambda T_0))/(iC_s\lambda)$ ($T_0 = C_s\tau_0/a$). Подставляя это выражение в (7.4), получим

$$K_j^*(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \exp(-i\lambda T_0))}{i\lambda} K_j^{0*}(\lambda) e^{i\lambda T} d\lambda \quad (7.5)$$

Из (7.5) с учетом того, что $K_j^{0*}(\lambda) = \overline{K_j^{0*}(-\lambda)}$ при $\lambda < 0$, будем иметь

$$K_j^*(T) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda T_0/2) \operatorname{Re}(K_j^{0*}(\lambda) \exp(i\lambda(T - T_0/2)))}{\lambda} d\lambda \quad (7.6)$$

Для рассмотрения решения задачи, отвечающего нагрузке $t_1(\tau) = H(\tau)$ на



Фиг. 5

некотором интервале времени, очевидно достаточно использовать нагрузки указанного выше вида с величиной τ_0 , превышающей интересующий нас интервал времени. На фиг. 4 приведены результаты расчетов коэффициентов интенсивности напряжений для задачи о круговой трещине радиуса $a = 1$, отвечающие нагрузке $t(\tau) = (H(\tau), 0)$. Значения K_2 берутся в точке контура $\theta = 0$, а значения K_3 — в точке контура $\theta = \pi/2$ и нормируются на коэффициенты интенсивности напряжений, соответствующие статической задаче с нагрузкой $(1, 0)$. На фиг. 4 представлены расчеты, отвечающие коэффициентам Пуассона $\nu = 0,1$ (сплошные линии) и $\nu = 0,5$ (штриховые линии). Для наглядности на графике у K_3 изменен знак. Кривая, отвечающая $\nu = 0,5$ понимается как результат расчетов по формуле (7.4), которая сохраняет смысл и для несжимаемых материалов.

Аналогичным образом можно получать решения для произвольных, зависящих от времени нагрузок. В качестве примера на фиг. 5 представлены результаты расчетов тех же величин для ступенчатой нагрузки конечной длины ($T_0 = 1$, штриховые линии) и бесконечной ступеньки (сплошные линии), отвечающие коэффициенту Пуассона $\nu = 0,3$. Здесь так же для наглядности у K_3 изменен знак.

Из-за погрешностей интегрирования в (7.6), в частности связанных с тем, что бесконечный интервал заменялся конечным, в окрестности точки $T = 0$ расчеты недостаточно точны (решения не стремятся к нулю при $T \rightarrow 0$). В расчетах интервала (7.6) верхний предел интегрирования доводился до 6. Согласно проведенным вычислениям, при изменении верхнего предела интегрирования от 4,5 до 6 не было отмечено существенных отличий в результатах для $T > 0,1$. Поэтому, начиная с этого значения результаты можно считать надежными.

Заметим, что область устойчивых численных результатов включает в себя промежутки времени, в котором КИН достигают максимальных значений. Поскольку для линейной механики разрушения наибольший интерес представляет зависимость КИН от времени в окрестности максимума, использованный способ получения приближенных решений достаточен для оценки возможности распространения трещины при ударных нагрузках.

Разумеется с научной точки зрения поведение решения в начальный период нагружения также весьма интересно. Для уточнения решения в этом временном

интервале возможны несколько путей: получение высокочастотной асимптотики решения для гармонической нагрузки и ее использование при обращении преобразования Фурье; применение более эффективных методов обращения преобразования Фурье или Лапласа; непосредственное решение граничных уравнений в пространственно-временной области.

Реализация каждого из указанных путей встречает значительные затруднения. Высокочастотные асимптотики в пространственных задачах строились лишь для трещин простейших форм (круг, эллипс, см. например [11, 12]), причем коэффициенты интенсивности напряжений не были вычислены.

Оценка эффективности различных способов численного обращения преобразования Лапласа, проведенная в [13], показала, что наиболее точные результаты дает метод, разработанный в [14]. Однако, этот метод требует вычисления образа Лапласа для комплексных значений параметра преобразования, или иначе, решения задачи для гармонической нагрузки при комплексных значениях частот. Поскольку решение задач для комплексных частот в вычислительном плане более трудно, чем для вещественных, оно может приводить к дополнительным погрешностям.

Численная реализация граничных уравнений в пространственно-временной области также весьма сложна и к настоящему времени осуществлена только в случае круговой трещины и простых условий нагружения [15, 16].

В силу указанных причин уточнение решений в начальный период времени представляет из себя предмет отдельного исследования и в данной работе не рассматривается.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 93-011-16035.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шифрин Е. И. О приближенном решении уравнений некоторых смешанных задач теории упругости//Механика деформируемого тела. Сер. Прочность и вязкоупругопластичность: М.: Наука, 1986. С. 154—164.
2. Капцов А. В., Шифрин Е. И. О рассеянии плоской трещиной нормально падающей продольной гармонической волны//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 106—112.
3. Ito S. Three-dimensional wave propagation in a cracked elastic solid//Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1978. V. 45. No 4. P. 807—811.
4. Ito S. Dynamic stress concentration around rectangular crack in an infinite elastic medium//ZAMM. 1980. V. 60. No. 8. P. 317—322.
5. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения//Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. С. 204—335.
6. Barratt P. J., Collins W. D. The scattering cross-section of an obstacle in an elastic solid for plane harmonic waves//Proc. Camb. Phil. Soc. 1965. V. 61. Pt. 4. P. 969—981.
7. Gubernatis J. E., Domany E., Krumhansl J. A. Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials//J. Appl. Phys. 1977. V. 48. No. 7. P. 2804—2811.
8. Jia Z. H., Shippy D. J., Rizzo F. J. Boundary-element analysis of wave scattering from cracks//Commun. Appl. Numer. Methods. 1990. V. 6. No. 8. P. 591—601.
9. Мухаськив В. В., Хай М. В. Прочность бесконечного тела с дискообразной трещиной, находящегося под действием циклических нагрузок//Проб. прочности, 1987. № 1. С. 13—16.
10. Krenk S., Schmidt H. Elastic wave scattering by a circular crack//Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1982. V. A308. No. 1502. P. 167—198.
11. Keogh P. S. High-frequency scattering of a normally incident plane compressional wave by a penny-shaped crack//Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1986. V. 39. Pt. 4. P. 535—566.
12. Gautesen A. K. Asymptotic solution to the crack-opening displacement integral equations for the scattering of plane waves by cracks. I. The symmetric problem//J. Acoust. Soc. America. 1990. V. 87. No. 3. P. 937—942.
13. Manolis G. D., Beskos D. E. Boundary element methods in elastodynamics. London: Unwin Hyman Ltd, 1988. 282 p.

14. *Durbin F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method//*Computer J.* 1974. V. 17. No. 4. P. 371—376.
15. *Hirose S., Achenbach J. D.* Application of BEM to transient analysis of a 3-D crack//*Boundary Element Methods in Applied Mechanics: Proc. 1st Joint Japan/US Sympos. on Boundary Element Methods*, Tokyo, Japan, 1988. Eds. M. Tanaka, T. A. Cruse. Oxford: Pergamon Press, 1988. P. 255—264.
16. *Hirose S., Achenbach J. D.* Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack//*Intern. J. Numer. Methods in Engng.* 1989. V. 28. No 3. P. 629—644.

Москва

Поступила в редакцию
8.XII.1992