МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1995

УДК 539.3

 КУЗНЕЦОВ С. В.

РАССЕЯНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Задачи рассеяния, или дифракции упругих волн в неоднородных средах привлекают внимание в связи с разработкой и использованием неразрушающих методов испытания материалов. В случае композиционных сред, частным случаем которых являются пористые среды и среды с микротрещинами, как правило, исследуются задачи рассеяния гармонических волн в длинноволновом приближении, когда длина упругой волны значительно превосходит период решетки [1—6]. В некоторых работах дополнительно делается предположение о постоянстве поля скоростей в пределах ячейки (рэлеевское приближение) [7, 8]. В [9—11] задачи дифракции исследуются на основе метода двухмасштабных асимптотических разложений.

Некоторые нелинейные аспекты, связанные с распространением плоских гармонических волн в композитах, рассмотрены в [12—15]. В [16] исследована зависимость угла отклонения лучевой скорости от направления распространения плоской волны в волокнистом композите.

Ниже на основе периодических фундаментальных решений и метода двухмасштабных асимптотических разложений получены выражения, характеризующие рассеивающие поперечные сечения [6] системы периодически расположенных пор в анизотропной среде с произвольной упругой анизотропией. В построенном решении предполагается, что длина волны существенно превышает длину периода структурной решетки.

1. Плоские волны в анизотропных средах. Рассматривается первоначально однородная анизотропная упругая среда, уравнения движения которой записываются в виде

$$A(\partial_x, \partial_t)\,\mathbf{u} \equiv -\operatorname{div}_x \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_u \mathbf{u} + \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{C}$ — четырехвалентный тензор упругости, ρ — плотность среды, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений.

Предполагается, что в среде распространяются плоские гармонические волны вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}\exp\left[2\pi i\,(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - \omega t)\right] \tag{1.2}$$

где $\mathbf{m}$ — (комплексная) амплитуда, или поляризация, k — волновое число, $\mathbf{n}$ — вектор единичной длины, характеризующий направление распространения волны, ω — фазовая частота.

Подстановка выражения (1.2) в (1.1) дает уравнение распространения плоской волны

$$A^{\vee}(k\mathbf{n}, \omega)\cdot\mathbf{m} = 0 \tag{1.3}$$

где $A^{\vee}$ — символ дифференциального оператора уравнений динамики, представимый в виде

$$A^{\vee}(k\mathbf{n}, \omega) = (2\pi)^2\left[k^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} - \rho\omega^2 I\right] \tag{1.4}$$

В выражении (1.4) и далее I обозначает единичную диагональную матрицу.

Оператор напряжений $T(\nu, \partial_x) \equiv \nu \cdot C \cdot \nabla_x$, примененный к волне (1.2), приводит к следующему выражению для потока энергии, распространяющегося в направлении ν:

$$\dot{E} \equiv \dot{u} \cdot T(\nu, \partial_x)\, u = -(2\pi)^2 k\omega \nu \otimes m \cdot\cdot C \cdot\cdot m \otimes n \exp[4\pi i (kn \cdot x - \omega t)] \qquad (1.5)$$

Для дальнейшего потребуется также вектор потока энергии (вектор Умова — Пойнтинга) $\dot{p} \equiv \nabla_\nu \dot{E}$.

Интегральный поток энергии, протекающий в направлении ν за единицу времени, определяется по (1.5) следующим выражением

$$E = \int_0^1 \dot{E} dt = k\pi i\, \nu \otimes m \cdot\cdot C \cdot\cdot m \otimes n \exp(4\pi i k n \cdot x) \qquad (1.6)$$

Аналогичным образом определяется и интегральный вектор потока энергии

$$p = \int_0^1 \dot{p} dt = k\pi i\, m \cdot\cdot C \cdot\cdot m \otimes n \exp(4\pi i k n \cdot x) \qquad (1.7)$$

2. Периодические фундаментальные решения. Рассматривается задача построения периодического по пространственной и временной переменным фундаментального решения уравнений (1.1), разыскиваемого в виде $E_p(x, t) = E_p(x, \omega) \exp(2\pi i \omega t)$.

Подстановка этого фундаментального решения в (1.1) дает

$$A(\partial_x, \partial_t) E_p(x, t) = A(\partial_x, \omega) E_p(x, \omega) \exp(2\pi i \omega t) = \delta_p(x) \exp(2\pi i \omega t)$$

$$A(\partial_x, \omega) = -\nabla_x \cdot C \cdot \nabla_x - \rho (2\pi\omega)^2 I \qquad (2.1)$$

где δ_p — периодическая (по пространственным переменным) δ-функция.

Предположим, что в узлах некоторой пространственной решетки Λ расположены δ-образные особенности. Пусть a_i $(i = 1, 2, 3)$ — линейно независимые векторы главных периодов Λ, так что любой из узлов Λ представим в виде $m = m_i a_i$, $m_i \in Z$ — целочисленные координаты узла m. Периодическая δ-функция, отвечающая решетке Λ, может быть представлена в виде [18]:

$$\delta_p(x) = \frac{1}{V_Q} \sum_{m^* \in \Lambda^*} \exp(-2\pi i\, m^* \cdot x) \qquad (2.2)$$

где Λ^* — решетка сопряженного базиса, образованная векторами a_i^*, такими что для любого узла $m \in \Lambda$, $m \cdot a_i^* = m_i$, V_Q — объем фундаментальной области (ячейки периодичности).

Разыскивая E_p также в виде тригонометрического ряда, из (2.1), (2.2) получим

$$E_p(x, \omega) = \frac{1}{V_Q} \sum_{m^* \in \Lambda^*} E^\nu(m^*, \omega) \exp(-2\pi i m^* \cdot x), \quad E^\nu(m^*, \omega) = A^{\nu-1}(m^*, \omega) \qquad (2.3)$$

$E^\nu(m^*, \omega)$ — символ непериодического (по пространственным переменным) фундаментального решения уравнений теории колебаний.

Методами [17] можно показать, что при любых $\omega \neq 0$ ряд в правой части (2.3) сходится в L^1-топологии, определяя собой периодическое фундаментальное решение класса $L^1(Q, R^3 \otimes R^3)$. При $\omega = 0$ фундаментальное решение E_p определяется с точностью до постоянного тензора [18].

3. **Асимптотические разложения.** Представим поле перемещений в периодической среде в виде асимптотического ряда

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathbf{u}_n(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \exp(2\pi i \omega t), \quad \mathbf{Y} = \frac{\mathbf{x}}{\lambda} \tag{3.1}$$

где переменные $\mathbf{Y}$ — «быстрые» переменные, характеризующие пространственные осцилляции поля $\mathbf{u}$.

Переход к переменным $\mathbf{x}$, $\mathbf{Y}$ в (2.1) дает [9]:

$$\begin{gathered} A(\partial_x, \partial_y, \omega) \equiv \lambda^{-2} A_1(\partial y) + \lambda^{-1} A_2(\partial_x, \partial_y) + \lambda^0 A_3(\partial_x, \omega) \\ A_1(\partial_y) \equiv -\nabla_y \cdot \mathbf{C}(\mathbf{Y}) \cdot \nabla_y \\ A_2(\partial_x, \partial_y) \equiv -\nabla_x \cdot \mathbf{C}(\mathbf{Y}) \cdot \nabla_y - \nabla_y \cdot \mathbf{C}(\mathbf{Y}) \cdot \nabla_x \\ A_3(\partial_x, \omega) \equiv -\nabla_x \cdot \mathbf{C}(\mathbf{Y}) \cdot \nabla_x - p(2\pi\omega)^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{C}(\mathbf{Y}) = \mathbf{C}, \ \mathbf{Y} \in Q \backslash \Omega, \quad \mathbf{C}(\mathbf{Y}) = 0, \quad \mathbf{Y} \in \Omega \end{gathered} \tag{3.2}$$

В выражениях (3.2) и далее переменные $\mathbf{x}$ и $\mathbf{Y}$ считаются независимыми; Ω — это собственно регулярная область, занятая порами в Q. Подстановка асимптотического ряда (3.1) в (3.2) дает

$$\begin{gathered} A_1(\partial_y) \mathbf{u}_0 = 0, \quad A_1(\partial_y) \mathbf{u}_1 = -A_2(\partial_x, \partial_y) \mathbf{u}_0 \\ A_1(\partial_y) \mathbf{u}_2 = -A_2(\partial_x, \partial_y) \mathbf{u}_1 - A_3(\partial_x, \omega) \mathbf{u}_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{3.3}$$

Обозначим через W подпространство в $H(Q \backslash \Omega, R^3 \otimes R^3)$ такое, что $\Phi \in W$ эквивалентно Φ — периодично и $\mathbf{T}(\mathbf{v}_y, \partial_y) \Phi dY|_{\partial\Omega} = 0$, где $\mathbf{T}$ — оператор напряжений на $\partial\Omega$ с вектором единичной внешней нормали $\mathbf{v}$ направленным из $Q \backslash \Omega$.

По аналогии с [9] нетрудно показать, что имеют место следующие утверждения

Предложение (a) Единственным периодическим решением первого уравнения (3.3) в $Q \backslash \Omega$ является решение вида $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$; (b) общее решение второго уравнения (3.3) в $Q \backslash \Omega$ имеет вид

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \mathbf{H}(\mathbf{Y}) \cdot\cdot\, \varepsilon_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1^{\mathrm{V}}(\mathbf{x}) \tag{3.4}$$

где $\mathbf{H}$ — тензорное поле третьего ранга, представляющее собой решение уравнения $A_1 \mathbf{H} = 0$ в $Q \backslash \Omega$ и $\mathbf{T}\mathbf{H}|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}$, тензорное поле деформаций ε_0 в (3.4) имеет вид $\varepsilon_0 = \mathrm{sym}(\nabla \mathbf{u}_0)$; (c) для разрешимости третьего уравнения (3.3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{Q\backslash\Omega} A_3(\partial_x, \omega) \mathbf{u}_0 dY + \int_{Q\backslash\Omega} A_2(\partial_x, \partial_y) \mathbf{u}_1 dY = 0 \tag{3.5}$$

Непосредственно из (3.4) следует

$$\int_{Q\backslash\Omega} A_2(\partial_x, \partial_y) \mathbf{u}_1 dY = -\mathrm{div}_x \int_{Q\backslash\Omega} \mathbf{C} \cdot\cdot\, \nabla_y \mathbf{H}(\mathbf{Y})\, dY \cdot\cdot\, \varepsilon_0 \tag{3.6}$$

При получении этого выражения учитывалось, что слагаемое $\mathbf{u}_1^{\mathrm{V}}$ не входит в третье уравнение (3.3). Принимая во внимание (3.6), из (3.5) получаем

$$(1 - f) A(\partial_x, \omega) \mathbf{u}_0 + \mathrm{div}_x \mathbf{K} \cdot\cdot\, \nabla_x \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{K} = V_Q^{-1} \int_{\partial\Omega} \mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{v}_Y \otimes \mathbf{H}(\mathbf{Y})\, dY \tag{3.7}$$

где f — объемный коэффициент пористости. Здесь и в дальнейшем $\partial\Omega$ рассматривается, как ориентируемое многообразие с ориентацией, индуцированной из области $Q \backslash \Omega$. В дальнейшем осредненное поле смещений $\mathbf{u}_0$ естественно отождествить с плоской волной распространяющейся в гомогенизированной среде.

Уравнение (3.7) представляет собой искомое уравнение теории распространения плоских упругих волн в гомогенизированной среде. Из (3.7) следует, что корректирующий тензор $\mathbf{K}$ совпадает с соответствующим тензором, определяемым из уравнений статики [19].

4. Определение корректирующего тензора. Формула Сомильяны, записанная для $\partial\Omega$ по аналогии с [19], дает

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{S})\,\mathbf{H}(Y') = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{E}_p'(Y' - Y'') \otimes \mathbf{v}_{Y''} \cdot\cdot \mathbf{C}\,dY'' + \mathbf{H}_a$$

$$\mathbf{H}_a = V_Q^{-1} \int_{Q\setminus\Omega} \mathbf{H}(Y)\,dY \tag{4.1}$$

где $\mathbf{S}$ — матричный сингулярный оператор, получаемый сужением потенциала двойного слоя уравнений статики на несущую поверхность $\partial\Omega$, $\mathbf{E}_p'(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{E}_p'(\mathbf{x}, \omega)|_{\omega=0}$ — периодическое (по пространственным переменным) фундаментальное решение уравнений статики. Необходимость введения $\mathbf{H}_a$ в правую часть (4.1) связана с тем обстоятельством, что фундаментальное решение $\mathbf{E}_p'(\mathbf{x}, \omega)|_{\omega=0}$ определено с точностью до постоянного тензора. Однако, ввиду формулы (3.7) для корректора $\mathbf{H}_a$ не оказывает влияния на значения корректирующего тензора.

Лемма. Если область Ω центрально симметрична относительно начала координат, то

$$\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \mathbf{E}_p'(Y' - Y'') \otimes \mathbf{v}_{Y''} \cdot\cdot \mathbf{M}\,dY'dY'' = 0 \tag{4.2}$$

где $\mathbf{M}$ — произвольный тензор n-го ранга, $n \geq 2$. Доказательство леммы имеется в [19].

Определение. Спектром оператора $\mathbf{S}$ будем называть множество тех λ, при которых оператор $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{S}$ необратим в классе непрерывных операторов, действующих в подходящем функциональном пространстве.

Это определение совпадает с принятым в спектральной теории и незначительно отличается от определения спектра в теории интегральных уравнений. Анализ периодических решений второй краевой задачи с заданными на $\partial\Omega$ поверхностными напряжениями, показывает, что точки $|\lambda| = 1/2$ лежат за пределами спектрального круга оператора $\mathbf{S}$, действующего в соболевских пространствах $\overline{H^s}(\partial\Omega, R^3)$ $s > 0$ функций с нулевым средним значением на $\partial\Omega$. Однако, в пространствах H^s спектральная окружность уже содержит точку $\lambda = 1/2$, с соответствующим спектральным пространством, состоящим из «жестких» смещений контура.

Из формулы Сомильяны, леммы и последующих замечаний вытекает

Предложение. В условиях леммы ряд Неймана

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{S}\right)^{-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-2\mathbf{S})^n \tag{4.3}$$

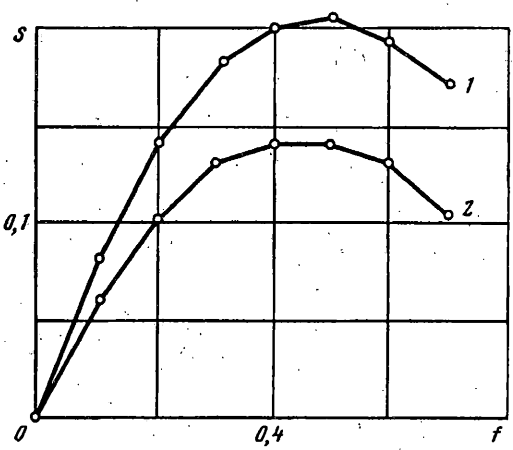
абсолютно сходится в операторной топологии $(\overline{H^s}, \overline{H^s})$, $s \geq 0$.

В формулировке этого предложения $(-2\mathbf{S})^n$ — матричный интегральный оператор, представляющий собой композицию n сингулярных интегральных операторов $(-2\mathbf{S})$. Скорость сходимости этого ряда можно оценивать через мажоранту $p = \|2\mathbf{S}\|_s$. Если $p < 1$, то ряд (4.3) сходится быстрее геометрического ряда со знаменателем p.

Подставляя (4.1), (4.3) в выражение для корректора (3.7) и преобразуя поверхностные интегралы по $\partial\Omega$ в объемные, получим

$$\mathbf{K} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^{n+1} (2\pi)^{2n+2} V_Q^{-n-2} \times$$

$$\times \sum_{\mu^* \in \Pi_n} \chi_\Omega^\vee(\mu_0^*)\, \chi_\Omega^\vee(\mu_1^* - \mu_0^*) \cdots \chi_\Omega^\vee(\mu_n^* - \mu_{n-1}^*)\, \chi_\Omega^\vee(-\mu_n^*) \times$$



$$\times\, \mathbf{C}\cdot\cdot\mu_0^* \otimes \mathbf{E}^{\vee}(\mu_0^*) \otimes \mu_0^*\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot \ldots \cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mu_n^* \otimes \mathbf{E}^{\vee}(\mu_n^*) \otimes \mu_n^*\cdot\cdot\mathbf{C} + \mathbf{r}_n$$

$$\mu_p^* \in \Lambda_0^*, \quad p = 0, \ldots, n, \quad \Pi_n = \prod_{p=0}^{n} \Lambda_0^* \tag{4.4}$$

Выражение (4.4) представляет собой искомую формулу для корректирующего тензора. Принимая во внимание альтернирующие знаки у членов ряда по n и ограничиваясь первым членом, отвечающим $n = 0$, получим следующее приближение снизу для корректора:

$$\mathbf{K} = -8\pi^2 V_Q^{-2} \sum_{m^* \in \Lambda_0^*} |\chi_\Omega^{\vee}(\mathbf{m}^*)|^2\, \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}^* \otimes \mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}^*) \otimes \mathbf{m}^*\cdot\cdot\mathbf{C} \tag{4.5}$$

Теорема. Ряд (4.5) абсолютно сходится.

Доказательство. Следует из асимптотической оценки

$$|\chi_\Omega^{\vee}(|\xi|)| = o(|\xi|^{-3/2}), \quad |\xi| \to \infty$$

выполняющейся, поскольку $\chi_\Omega^{\vee} \in L^2(R^3)$. Далее остается заметить, что символ $\mathbf{m}^* \otimes \mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}^*) \otimes \mathbf{m}^*$, положительно однороден по $\mathbf{m}^*$ степени 0.

5. Рассеивающие поперечные сечения. С учетом введенных двух масштабов оператор напряжений имеет вид

$$\mathbf{t}(\partial_x, \partial_Y) = \mathbf{C}\cdot\nabla_x + \lambda^{-1}\mathbf{C}\cdot\nabla_Y \tag{5.1}$$

Подстановка асимптотического разложения (3.1) в (5.1) дает тензорное поле напряжений

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathbf{t}_n(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \exp(2\pi i\omega t) \tag{5.2}$$

$$\mathbf{t}_0(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_x\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_Y\mathbf{u}_1$$

Выражение для $\mathbf{t}_0$ показывает, что в отличие от усредненных по пространственным переменным смещений $\mathbf{u}_0$, соответствующая составляющая $\mathbf{t}_0$ содержит быстроосциллирующее слагаемое $\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_Y\mathbf{u}_1$.

Полный поток энергии, поглощаемый или излучаемый поверхностью $\partial\Omega$, с использованием (3.4), (3.7), (5.2) определяется выражением

$$\dot{E} = \lim_{\lambda\to 0} V_Q^{-1} \int_{\partial\Omega} \dot{\mathbf{u}}\cdot\mathrm{T}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\omega V_Q} \int_{Q\setminus\Omega} \mathbf{t}_0\cdot\cdot[\varepsilon_0 + \mathrm{sym}(\nabla_Y\mathbf{u}_1)]\, dv \exp(4\pi i\,\omega t) = \dot{E}_0 + \dot{E}_s \tag{5.3}$$

$$\dot{E}_0 = (2\pi i\omega)^{-1}(1-f)\,\varepsilon_0\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\varepsilon_0 \exp(4\pi i\,\omega t), \quad \dot{E}_s = (2\pi i\omega)^{-1}\,\varepsilon_0\cdot\cdot\mathbf{K}\cdot\cdot\varepsilon_0 \exp(4\pi i\,\omega t)$$

Но в соответствии с (1.5) поток энергии падающей на $\partial\Omega$ плоской волны (1.2), распространяющейся в исходном материале (без учета дифракции на порах), определяется выражением $\dot{E}_0$ из (5.3). Таким образом, слагаемое $\dot{E}_s$ в (5.3) представляет собой поток энергии рассеяния.

Используя терминологию, принятую в квантовой механике, определим рассеивающее поперечное сечение S:

$$S \equiv \left| \frac{\dot{E}_s}{\dot{E}_0} \right| = (1-f)^{-1} \left| \frac{\varepsilon_0\cdot\cdot\mathbf{K}\cdot\cdot\varepsilon_0}{\varepsilon_0\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\varepsilon_0} \right| \tag{5.4}$$

Выражение (5.4) показывает, что в длинноволновом приближении рассеивающее поперечное сечение не зависит от фазовой частоты и полностью определяется «статическими» тензорами K, C, поляризацией и направлением распространения плоской волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bose S. K., Mal A. K.* Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite//Intern. J. Solids Structures. 1973. V. 9. N 9. P. 1075—1085.
2. *Datta S. K.* Diffraction of plane elastic waves by ellipsoidal inclusions//J. Acoust. Soc. Amer. 1977. V. 61. N 6. P. 1432—1437.
3. *Piau M.* Attenuation of a plane compressional wave by a random distribution in thin circular cracks//Intern. J. Engng. Sci. 1979. V. 17. N 2. P. 151—167.
4. *Sadina F. J., Willis J. R.* A simple self-consistent analysis of wave propagation in particulate composites//Wave Motion. 1988. V. 10. N 2. P. 127—142.
5. *Varadan V. K., Varadan V. V., Pao Y.-H.* Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. I. SH waves//J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. N 5. P. 1310—1319.
6. *Willis J. R.* A polarization approach to the scattering of elastic waves — II. Multiple scattering from inclusions//J. Mech. Phys. Solids. 1980. V. 28. N 5/6. P. 307—327.
7. *Gubernatis J. E.* Long-wave approximations for the scattering of elastic waves from flaws with applications to ellipsoidal voids and inclusions//J. Appl. Phys. 1979. V. 50. N 6. P. 4046—4058.
8. *Gubernatis J. E., Domany E., Krumhansl J. A.* Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flows in elastic materials//J. Appl. Phys. 1977. V. 48. N 7. P. 2804—2811.
9. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland. 1978. 700 p.
10. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний М.: Мир, 1984. 472 с.
11. *Бердичевский В. Л.* Пространственное осреднение периодических структур//Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 3. С. 565—567.
12. *Рущицкий Я. Я., Остраков И. А.* Искажение плоской гармонической волны при ее распространении в композиционном материале//Докл. АН УССР. 1991. № 11. С. 51—54.
13. *Рущицкий Я. Я., Остраков И. А.* Генерация новых гармоник нелинейных упругих волн в композитном материале//Докл. АН УССР. Матем. Естеств. 1991. № 10. С. 64—68.
14. *Waterman P. C.* Matrix theory of elastic wave scattering//J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 60. N 3. P. 567—580.
15. *Willis J. R.* A polarization approach to the scattering of elastic waves I. Scattering by a single inclusion//J. Mech. Phys. Solids. 1980. V. 28. N 5/6. P. 287—305.
16. *Wu T.-T., Ho Z.-H.* Anisotropic wave propagation and its applications to NDE of composite materials//Exp. Mech. 1990. V. 30. No. 4. P. 313—318.
17. *Wainger S.* Special trigonometric series in K-dimensions//Mem. Amer. Math. Soc. 1965. N 59. 102 p.
18. *Кузнецов С. В.* Периодические фундаментальные решения статики анизотропных упругих сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 99—104.
19. *Кузнецов С. В.* Эффективные тензоры упругости дисперсных композитов//ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 103—109.
20. *Кузнецов С. В.* Микроструктурные напряжения в пористых средах//Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 8. С. 23—28.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1993