МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1995

УДК 531.38

© 1995 г. С. М. РАМОДАНОВ

К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Рассматривается задача о пространственном движении твердого тела в идеальной жидкости. Предполагается, что на тело действует сила, постоянная по величине и имеющая постоянное относительно тела направление. Исследуется качественная картина движения тела в некоторых частных случаях.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении твердого тела в жидкости, покоящейся на бесконечности и совершающей безвихревое движение. Предположим, что тело имеет три взаимно ортогональные плоскости симметрии (форма тела и распределение его массы инвариантны при отражении относительно любой из них). Пусть O — точка пересечения этих плоскостей. Свяжем с телом декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$; ее оси направлены вдоль линий пересечения плоскостей симметрии. Пусть x, y, z оси неподвижной декартовой системы координат. Положение тела определяется декартовыми координатами (x, y, z) точки O. Будем предполагать, что к телу приложена сила с компонентами $(0, 0, F)$, $F = \mathrm{const}$, в базисе $O\xi\eta\zeta$ (фигура).

2. Уравнения движения. Для описания движения тела воспользуемся уравнениями, предложенными Кирхгофом. Пусть u, v, w — проекции скорости точки O; p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси ξ, η, ζ. Кинетическая энергия системы «тело + жидкость» имеет вид $T = 0{,}5\,(a_1u^2 + a_2v^2 + a_3w^2 + c_1p^2 + c_2q^2 + c_3r^2)$, где a_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ — постоянные коэффициенты, включающие в себя присоединенные массы и присоединенные моменты инерции.

Движение твердого тела описывается уравнениями Кирхгофа

$$
\begin{aligned}
&a_1\dot u = a_2vr - a_3wq + F, \quad a_2\dot v = a_3wp - a_1ur\\
&a_3\dot w = a_1uq - a_2vp, \quad c_1\dot p = (a_2 - a_3)\,vw + (c_2 - c_3)\,qr\\
&c_2\dot q = (a_3 - a_1)\,uw + (c_3 - c_1)\,pr\\
&c_3\dot r = (a_1 - a_2)\,uv + (c_1 - c_2)\,pq
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Пусть $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — орты декартовой системы координат, а $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ — орты трехгранника $O\xi\eta\zeta$. Пусть C — матрица перехода, т. е.

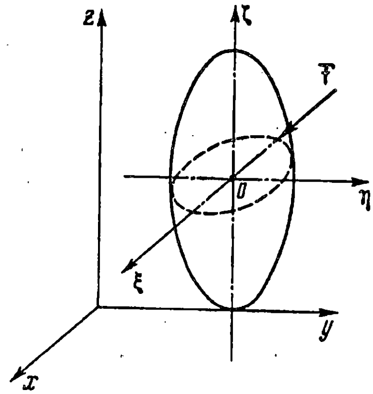
$$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = C^T(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta) \tag{2.2}$$

Несложно получить, что C удовлетворяет следующему матричному уравнению:

$$\dot C = C \begin{Vmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

Тогда, если $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ — компоненты скорости точки O в неподвижной системе координат, то

$$(\dot x, \dot y, \dot z) = (u, v, w)\,C^{-1} \tag{2.4}$$



Фиг. 1

Таким образом, соотношения (2.4) определяют движение точки O тела, а соотношения (2.2) его ориентацию. Анализ поведения решений (1.1) сложен, поэтому ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев.

3. Частные движения. Система (2.1) допускает решения

$$u = Ft/a_1, \quad v = w = 0, \quad p = q = r = 0 \tag{3.1}$$

$$u = Ft/a_1, \quad v = w = 0, \quad p = p^* = \text{const}, \quad q = r = 0, \quad p^* \neq 0 \tag{3.2}$$

Решению (3.1) соответствует поступательное, равноускоренное движение тела вдоль оси ξ. Движение, соответствующее (3.2), отличается от (3.1) наличием вращения с постоянной угловой скоростью вокруг оси ξ.

4. Возмущенные движения. Исследуя движение тела в жидкости по инерции, Томсон, Тэт и Гринхилл показали [1], что поступательное движение широкой стороной вперед (т. е. той, которой соответствует большая присоединенная масса) устойчиво. Нетрудно показать, что движение, описываемое формулами (3.1), также устойчиво, если $a_1 > a_2$ и $a_1 > a_3$. Для этого возьмем в качестве функции Ляпунова V комбинацию первых интегралов невозмущенной задачи ($F = 0$):

$$V = 2Ta_1 - G^2, \quad G^2 = a_1^2u^2 + a_2^2v^2 + a_3^2w^2$$

где T, G — кинетическая энергия и квадрат импульса системы «тело + жидкость». Функция V представляет собой положительно определенную квадратичную форму переменных v, w, p, q, r ее производная в силу системы (2.1) равна нулю. Значит движение, описываемое формулами (3.1), устойчиво по отношению к этим переменным. Это соображение позволяет рассматривать движения с малыми начальными возмущениями по переменным v, w, p, q, r. Линеаризуем уравнения (2.1) в окрестности решения (3.1):

$$a_2\dot{v} = -rFt, \quad a_3\dot{w} = qEt, \quad c_2\dot{q} = wFt\,(a_3 - a_1)/a_1$$

$$c_3\dot{r} = vFt\,(a_1 - a_2)/a_1 \tag{4.1}$$

Делая замену времени $\tau = t^2/2$ и, обозначая штрихом производную по τ, получим $a_2v'' = a_1F^2c_3\,(a_2 - a_1)\,v$, $a_3w'' = a_1F^2c_2\,(a_3 - a_1)\,w$. Видно, что если $a_2 > a_1$ или $a_3 > a_1$, то рассматриваемое движение неустойчиво. Решения системы (4.1) имеют вид:

$$a_2v = K_1 \cos\,(\tfrac{1}{2}\,\Omega_1t^2) + K_2 \sin\,(\tfrac{1}{2}\,\Omega_1t^2) \tag{4.2}$$

$$r = (K_1\Omega_1/F)\sin\,(\tfrac{1}{2}\,\Omega_1t^2) - (K_2\Omega_1/F)\cos\,(\tfrac{1}{2}\,\Omega_1t^2)$$

$$a_3 w = K_3 \cos(\tfrac{1}{2}\Omega_2 t^2) + K_4 \sin(\tfrac{1}{2}\Omega_2 t^2)$$

$$q = -(K_3\Omega_2/F)\sin(\tfrac{1}{2}\Omega_2 t^2) + (K_4\Omega_2/F)\cos(\tfrac{1}{2}\Omega_2 t^2)$$

$$\Omega_1 = F((a_1 - a_2)/(a_2 a_1 c_3))^{1/2}, \quad \Omega_2 = F((a_1 - a_3)/(a_3 a_1 c_2))^{1/2}$$

где K_i $(i = 1—4)$ — произвольные постоянные.

Определим качественную картину движения тела. Исходя из (2.3), для первой строки матрицы C можно записать

$$\dot c_{11} = c_{12} r - c_{13} q, \quad \dot c_{12} = -c_{11} r + c_{13} p, \quad \dot c_{13} = c_{11} q - p c_{12} \tag{4.3}$$

Полагая, что при $t = 0$ обе системы координат совпадают, т. е. $C(0)$ — единичная матрица, можно считать c_{12} и c_{13} малыми величинами. В силу устойчивости решения (3.1), величины p, q, r также малы. Отбрасывая величины второго порядка малости в правых частях уравнений (4.3), найдем

$$c_{11} = 1, \quad c_{12} = -\int_0^t r\,dt, \quad c_{13} = \int_0^t q\,dt \tag{4.4}$$

Таким же способом можно найти остальные элементы матрицы C:

$$c_{22} = c_{33} = 1, \quad c_{31} = c_{13}, \quad c_{32} = -c_{23} = \int_0^t p\,dt, \quad c_{12} = -c_{21} \tag{4.5}$$

Компоненты скорости точки O в неподвижной системе координат, согласно (2.4), запишутся в виде

$$\dot x = u - v\int_0^t r\,dt + w\int_0^t q\,dt, \quad \dot y = v + u\int_{-0}^t r\,dt - w\int_0^t q\,dt$$

$$\dot z = w + v\int_0^t p\,dt - u\int_0^t q\,dt \tag{4.6}$$

Подставив в эти выражения формулы (4.2) и пользуясь асимптотическим представлением при больших t:

$$\int_0^t \sin ht\,dt = 0{,}5\left(\frac{\pi}{2h}\right)^{1/2} - \frac{\cos(ht^2)}{2ht} + \frac{\sin(ht^2)}{4h^2t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right)$$

можно получить формулы, описывающие движение точки O:

$$x = (\tfrac{1}{2}F/a_1)t^2 + O(1), \quad y = ((\tfrac{1}{4}\pi\Omega_1)^{1/2}/a_1)(K_1 - K_2)t^2 + O(1)$$

$$z = -((\tfrac{1}{4}\pi\Omega_2)^{1/2}/a_1)(K_4 - K_3)t^2 + O(1) \tag{4.7}$$

Отсюда следует, что движение точки O, отвечающее решению (3.1), устойчиво по отношению к переменным v, w, p, q, r, если соответствующие возмущения удовлетворяют условиям $K_1 = K_2$ и $K_3 = K_4$, что эквивалентно тому, что

$$\int_0^\infty r\,dt = \int_0^\infty q\,dt = 0$$

Несложно определить ориентацию тела. Радиус-вектор $\mathbf{R}_0$ точки O можно, согласно (4.7), представить в виде суммы двух векторов: $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} + \mathbf{B}$, $\mathbf{R} = (\tfrac{1}{2}t^2/a_1)(F, (\pi\Omega_1)^{1/2}(K_1 - K_2)/2, (\pi\Omega_2)^{1/2}(K_3 - K_4)/2)$, где $\mathbf{B}$ — вектор, компоненты которого — ограниченные функции.

На основании (4.2) и (4.6) вектор $\mathbf{R}$ можно записать как $\mathbf{R} = \tfrac{1}{2}(Ft^2/a_1)(1, c_{21\infty}, c_{31\infty})$, где $c_{ij\infty} = \lim c_{ij}$ при $t \to \infty$. Отсюда и из (2.2) следует, что вектора $\mathbf{R}$ и $\mathbf{e}_\xi$ в пределе коллинеарны.

Рассмотрим теперь движение, описываемое соотношениями (3.2). Удалось доказать его устойчивость только в первом приближении. Для удобства дальнейших выкладок, сделаем замены:

$$v_1 = a_1 u, \quad v_2 = a_2 v, \quad v_3 = a_3 w, \quad \xi = c_1 p, \quad \eta = c_2 q, \quad \zeta = c_3 r \tag{4.8}$$

Выполним еще одну замену, обозначив величины, обратные к a_i, c_i ($i = 1, 2, 3$), этими же буквами. Тогда решение (3.2) перепишется в виде $v_1 = Ft$, $\xi = \xi^* = p^*/c_1$, $v_2 = v_3 = 0$, $\eta = \zeta = 0$. Уравнения (2.1), линеаризованные в окрестности этого решения, в новых обозначениях примут вид

$$\dot{v}_2 = c_1 \xi^* v - c_3 F t \zeta, \quad \dot{\eta} = (a_1 - a_3)\, F t v_3 + (c_1 - c_3)\, \xi^* \zeta$$

$$\dot{v}_3 = c_2 F t - c_1 \xi^* v_2, \quad \dot{\zeta} = (a_2 - a_1)\, F t v_2 + (c_2 - c_1)\, \xi^* \eta \tag{4.9}$$

Отметим, что эту систему, в отличие от системы (4.1), не удается никакой заменой времени свести к стационарной. Запишем уравнения (4.9) в матричном виде

$$\dot{X} = AX + BXt \tag{4.10}$$

где $X^T = (v_2, v_3, \eta, \zeta)$, A и B — квадратные матрицы, элементы которых не зависят от времени. Введем обозначения $\varkappa_1 = c_3 F$, $\varkappa_2 = c_2 F$, $\varkappa_3 = (a_3 - a_1)\, F$, $\varkappa_4 = (a_2 - a_1)\, F$, тогда собственные числа матрицы B запишутся в виде $\lambda_{1,2} = \pm\, i\, (\varkappa_2 \varkappa_3)^{1/2}$, $\lambda_{3,4} = (\varkappa_1 \varkappa_4)^{1/2}$. Необходимое условие устойчивости системы (4.10) состоит в том, что все $\varkappa_i \geq 0$ (или, что то же самое, $a_1 \geq a_2$ и $a_1 \geq a_3$). Докажем это. Выполним в (4.10) замену времени $\tau = t^2$, тогда, заменяя коэффициенты системы (4.10) их предельными значениями при $\tau \to \infty$ получим систему $dX/d\tau = BX$. Если не все $\varkappa_i \geq 0$, то среди собственных чисел матрицы B есть положительное, а значит, по теореме из [2], решения системы (4.10) неустойчивы.

Предполагая $a_2 \neq a_3$ и $c_2 \neq c_3$, будем считать, что собственные числа матрицы B различны. Тогда для каждого собственного числа λ можно пытаться искать решение в виде ряда:

$$X = \exp\left(\frac{\lambda t^2}{2} + \beta t\right) t^{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{t^j} \tag{4.11}$$

Здесь λ, β, μ — скалярные величины, b_i ($i = 0, \infty$) $\in R^4$. По теореме из [3], если такой ряд формально удовлетворяет системе (4.10), то он является асимптотическим представлением решения. Докажем теперь, что решение в виде (4.11) может быть найдено [1].

Подставим ряд (4.11) в систему (4.10) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t. Тогда получим

$$\begin{aligned}
&(B - \lambda E)\, b_0 = 0 && \text{при} \quad t^{\mu} \\
&(B - \lambda E)\, b_1 + A b_0 = \beta b_0 && \text{при} \quad t^{\mu-1} \\
&(B - \lambda E)\, b_2 + A b_1 = \mu b_0 + \beta b_1 && \text{при} \quad t^{\mu-2} \\
&(B - \lambda E)\, b_n + A b_{n-1} = (\mu - n + 2)\, b_{n-2} + \beta b_{n-1} && \text{при} \quad t^{\mu-n}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Пусть вектор u ортогонален множеству значений оператора $(B - \lambda E)$, $\forall \mathrm{x} \in R^4$, $\mathrm{u}\,(B - \lambda \cdot E)\, \mathrm{x} = 0$. Так как λ простой корень, то $(\mathrm{u}, \mathrm{b}_0) \neq 0$, где b_0, как видно из первого уравнения системы (4.12), собственный вектор матрицы B. Для разрешимости второго уравнения относительно b_1 необходимо и достаточно

[1] Это доказательство было предоставлено автору профессором МГУ Филлиповым А. Ф.

потребовать выполнения равенства: $(\mathfrak{u}, A\mathfrak{b}_0 - \beta\mathfrak{b}_0) = 0$, откуда $\beta = (\mathfrak{u}A\mathfrak{b}_0)/ /(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_0)$. Вектор $\mathfrak{b}_1$ определяется с точностью до проекции на $\mathfrak{b}_0$, т. е. $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_1^* + \gamma_1\mathfrak{b}_0$, где $\mathfrak{b}_1^*$ — некоторое решение второго уравнения, γ_1 — пока неизвестная константа. Определим μ из условия разрешимости третьего уравнения относительно $\mathfrak{b}_2$. Оно разрешимо, если $((A - \beta E)\,\mathfrak{b}_1 - \mu\mathfrak{b}_0, u) = 0$, значит $\mu = (\mathfrak{u}, A\mathfrak{b}_1^* - \beta\mathfrak{b}_1^*)/(u, b_0)$. Представим $\mathfrak{b}_2$, как и $\mathfrak{b}_1$, в виде $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_2^* + \gamma\mathfrak{b}_0$, γ_2 — константа, которую предстоит определить. Константу γ_1 найдем из условия разрешимости четвертого уравнения относительно b_3. Умножив его скалярно на $\mathfrak{u}$, получим $(\mathfrak{u}, (A - \beta E)\,\mathfrak{b}_2^*) = ((\mu - 1)\,\mathfrak{b}_1^*, \mathfrak{u}) + \gamma_1 (\mu - 1)\,(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_0)$. Отсюда γ_1 может быть найдена, если, конечно, $\mu \neq 1$. Тем же путем, при условии $\mu \neq 2$, константа γ_2 может быть найдена из условия разрешимости пятого уравнения относительно $\mathfrak{b}_4$ и так далее. Таким образом, разрешимость системы (4.12) доказана, при условии, что μ не является натуральным числом.

Опуская громоздкие выкладки, запишем результаты вычислений по вышеуказанному алгоритму, для системы (4.10). Ограничимся случаем $\lambda = \lambda_1$. Имеем

$$\beta = 0, \quad \mu = i\mu_1, \quad \mu_1 = (0{,}5\xi^{*2}/D)\,((c_1 - c_3)\,(c_1\,(\varkappa_2^3\varkappa_3/\varkappa_1^2)^{1/2} -$$

$$- (c_2 - c_1)\,(\varkappa_2\varkappa_3))^{1/2} - c_1\,(c_2 - c_1)\,(\varkappa_3\varkappa_1^2/\varkappa_2)^{1/2} + c_1^2\,(\varkappa_2\varkappa_3)^{1/2}),$$

$$D = \varkappa_1\varkappa_4 - \varkappa_2\varkappa_3, \quad \mathfrak{b}_0 = (0, -i, (\varkappa_3/\varkappa_2)^{1/2}, 0)$$

$$\mathfrak{b} = (b_{11}, 0, 0, ib_{14}), \quad b_{11} = (\xi^*/D)\,(-c_1\,(\varkappa_2\varkappa_3)^{1/2} - \varkappa_1\,(\varkappa_3/\varkappa_2)^{1/2}\,(c_1 - c_2))$$

$$b_{14} = (\xi^*/D)\,(\varkappa_3\,(c_1 - c_2) + c_1\varkappa_4)$$

Выпишем теперь решение с точностью до слагаемых порядка $O\,(t^{-2})$:

$$X = \cos\left(\frac{\lambda_1}{2}t^2 + \mu_1 \ln t\right) \begin{Vmatrix} b_{11} \\ 0 \\ (\varkappa_3/\varkappa_2)^{1/2} \\ 0 \end{Vmatrix} + \sin\left(\frac{\lambda_1}{2}t^2 + \mu_1 \ln t\right) \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -b_{14}/t \end{Vmatrix}$$

Отметим, что другим собственным числам матрицы B соответствуют решения качественно такие же как и для $\lambda = \lambda_1$ (для них также $\beta = 0$ и μ — чисто мнимое число).

Определим теперь движение точки O. Если возмущения отсутствуют, т. е. $v = w = 0$, $q = r = 0$, то уравнение (2.3) имеет решение:

$$c_{11} = 1, \quad c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{31} = 0, \quad c_{22} = c_{33} = \cos p^*t, \quad -c_{23} = c_{32} = \sin p^*t.$$

В случае ненулевых возмущений, отбросим, как это уже делалось при исследовании решения (3.1), в правых частях системы (2.3) слагаемые второго порядка малости. Предполагая, что при $t = t_0 = 2k\pi > 0$ подвижная и неподвижная системы координат совпадают, найдем

$$c_{11} = 1, \quad c_{22} = c_{33} = \cos p^*t, \quad c_{32} = c_{23} = \sin p^*t \tag{4.13}$$

$$c_{13} = \int_{t_0}^{t} \sin\,(p^*\,(t - s))\,(p^*r + q)\,(s)/p^*ds$$

$$c_{12} = \int_{t_0}^{t} \sin\,(p^*\,(t - s))\,(p^*q - r)\,(s)/p^*ds$$

$$c_{21} = \int_{t_0}^{t} (r \cos (p^* t) + q \sin (p^* t))\, dt, \quad c_{31} = \int_{t_0}^{t} (r \sin (p^* t) - q \cos (p^* t))\, dt$$

В силу полученных решений системы (4.9), (η и ζ отличаются от q и r постоянными множителями) можно утверждать, что интегралы в соотношениях (4.13) сходятся. Введем обозначения $c_{ij\infty} = \lim c_{ij}$ при $t \to \infty$. Тогда, на основании (2.4), движение точки O описывается следующими асимптотическими формулами:

$$x = 1/2\, Ft^2/a_1 + O(1), \quad y = 1/2\, c_{21\infty} Ft^2/a_1 + O(1) \tag{4.14}$$

$$z = 1/2\, c_{31\infty} Ft^2/a_1 + O(1)$$

Ввиду того, что $e_\xi = c_{11} e_x + c_{21} e_y + c_{31} e_z$, вектора $(1/2\, Ft^2/a_1)(1, c_{21\infty}, c_{31\infty})$ и e_ξ вдоль которого направлена сила F, в пределе коллинеарны. Сравнивая формулы (4.7) и (4.14), можно заключить, что добавление постоянного вращения вокруг оси e_ξ не вызвало качественных изменений движения точки O.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176 с.
3. *Hukuhara M.* Sur les points singulier des équations différentielles linéaire; domaine réel//J. Faculty Sci. Hokkaido Univ. 1934. V. 1. No. 2. P. 13—88.

Москва

Поступила в редакцию
6.IV.1993