

УДК 531.3

© 1995 г. Р. А. МУСАРСКИЙ, Н. А. ФУФАЕВ

КОНЦЕПЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНЫХ ЭКИПАЖЕЙ

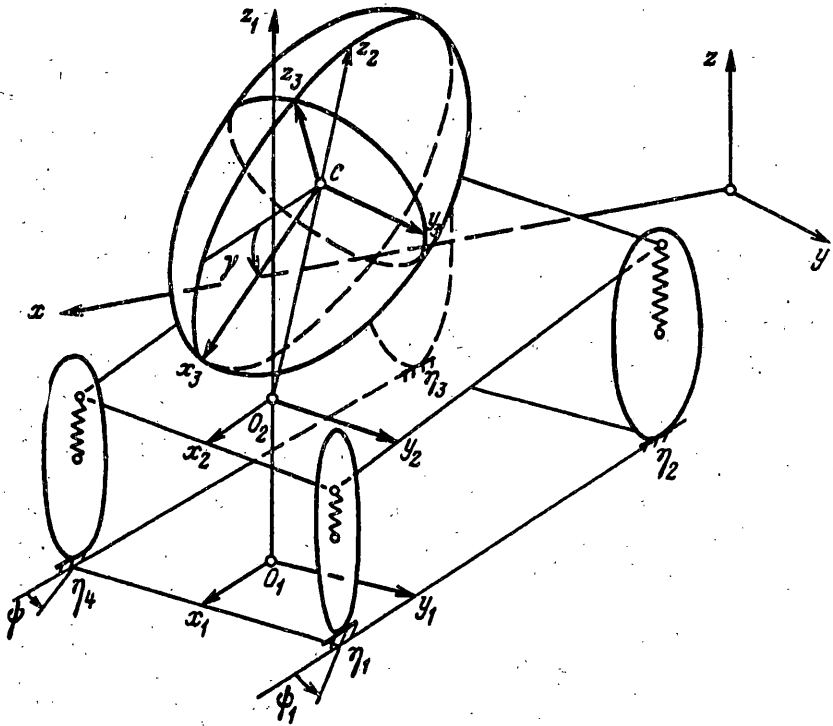
Под концепцией твердого тела понимается последовательное использование известной в механике идеализации: представление реальных объектов в виде абсолютно твердых тел. Изучение динамики колесных экипажей с помощью концепции твердого тела позволяет учесть влияние инерционных свойств машины на ее движение, оставаясь в рамках классической механики. Как и в случае твердого тела с закрепленной точкой, при составлении уравнений движения колесной машины особенно эффективным оказывается метод квазиординат или метод подвижных осей. Действительно, выбрав в качестве квазискоростей проекции скорости центра масс экипажа на продольное и поперечное направление машины, а проекции мгновенной угловой скорости — на главные оси центрального эллипсоида инерции, можно значительно упростить уравнения динамики.

Обзор литературы по теории движения колесных транспортных машин показывает, что обычно рассматриваются такие расчетные модели и, соответственно, уравнения движения, которые описывают либо только колебания масс относительно поверхности дороги (проблемы колебаний и виброзащиты) [1], либо движение экипажа вдоль дороги, если изучается управляемость или курсовая устойчивость экипажа [2], либо прямолинейное движение, если рассматривается проблема тяговой динамики экипажа и его топливная экономичность [3]. Все эти модели исследуются независимо одна от другой, и в результате связь между отдельными типами движений оказывается искусственно разорванной. Тем самым динамика колесного экипажа в целом остается по существу неизученной.

В связи с изложенным возникает задача: опираясь на концепцию твердого тела, построить достаточно простую пространственную модель колесного экипажа, которая позволила бы установить взаимосвязь между существующими моделями, найти условия, при выполнении которых получаются используемые ранее модели, а также выявить новые динамические эффекты и общие закономерности движения колесного экипажа.

Для решения этой задачи ниже предлагается сравнительно простая модель четырехколесного экипажа, выводятся уравнения движения и указываются условия, при выполнении которых полученные уравнения разбиваются на отдельные группы, которые описывают движение расчетных моделей, известных ранее.

1. Вывод уравнений динамики колесного экипажа. Рассмотрим модель четырехколесного экипажа (фиг. 1), который состоит из кузова, представляющего абсолютно твердое тело, и одинаковых колес с независимой подвеской. Задние колеса являются ведущими, а передние — управляемыми. Центральный эллипсоид инерции кузова — трехосный и расположен так, что при покое экипажа на горизонтальной плоскости две главные оси эллипсоида лежат в средней продольной вертикальной плоскости экипажа, образуя некоторый угол наклона. Кузов опирается на четыре вязко упругие опоры — подвески. Эластичность колес в поперечном направлении учитывается с помощью гипотезы нелинейного увода [4], по существу описывающей качение колеса как без скольжения, так и со скольжением. Предполагается, что колесный экипаж движется по горизонтальной плоскости с заданным микропрофилем под действием тягового момента двигателя, тормозного момента, сил аэродинамического давления и сил взаимодействия колес с дорогой; инерционность колес и углы отклонения осей колес от



Фиг. 1

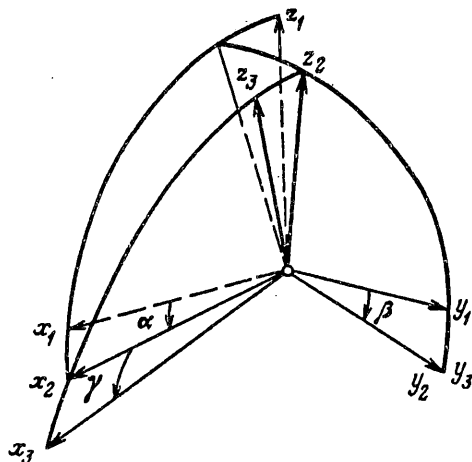
горизонтальной плоскости пренебрежимо малы; углы наклона кузова достаточно малы.

Введем системы декартовых координат (см. фиг. 1, 2): $Oxyz$ — неподвижная система координат, xu — горизонтальная плоскость, по которой катится экипаж, а ось z направлена вверх; $O_1x_1y_1z_1$ — система координат, связанная с движущейся машиной; точка O_1 совпадает с проекцией точки O_2 на плоскость xu ; плоскости xu и x_1y_1 совпадают, ось x_1 направлена вперед вдоль экипажа; $O_2x_2y_2z_2$ — система координат, скрепленная с кузовом; x_2y_2 — плоскость, проходящая через верхние точки крепления упругих элементов подвески; точка O_2 совпадает с проекцией центра масс кузова C на плоскость x_2y_2 ; ось x_2 направлена вдоль экипажа вперед; $Sx_3y_3z_3$ — система координат с началом в центре масс C кузова; ее оси ориентированы вдоль главных осей центрального эллипсоида инерции.

Введем следующие обозначения: x, y, z — координаты точки O_2 ; α, β — углы продольного и поперечного крена кузова; θ — угол между продольной осью экипажа x_1 и неподвижной осью x ; ψ — угол поворота плоскости правого переднего колеса; ψ_1 — угол поворота плоскости левого переднего колеса. Он связан с углом ψ при помощи следующего соотношения:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = (1 - 2a^{-1}b \operatorname{tg} \psi)^{-1} \operatorname{tg} \psi$$

которое получается из условия качения без бокового скольжения экипажа с жесткими колесами; $2b$ — ширина колеи экипажа; a_1 — расстояние от точки O_1 до прямой, соединяющей точки контакта передних колес с плоскостью качения; a_2 — расстояние от точки O_1 до прямой, соединяющей точки контакта задних колес с плоскостью качения; $a = a_1 + a_2$ — база колесного экипажа; φ_i ($i = \overline{1, 4}$) — углы поворота колес при их собственном вращении; p, q, r —



Фиг. 2

проекции мгновенной угловой скорости вращения кузова на главные оси его центрального эллипсоида инерции; h — расстояние от центра масс кузова C до плоскости x_2y_2 ; r_0 — радиус колес; γ — угол между осями x_2 и x_3 (угол наклона эллипсоида инерции); F_i — сила сопротивления боковому уводу i -го колеса; k_i — коэффициент сопротивления уводу колеса ($k_1 = k_4$, $k_2 = k_3$); V_i , U_i — скорость смещения центра i -го колеса в горизонтальном направлении в плоскости диска и вдоль нормали к этой плоскости; ν — коэффициент трения скольжения колеса по опорной поверхности; M_T — тяговой момент, приложенный к задним колесам; M_{ci} — суммарный момент сопротивления собственному вращению колеса; N_i — нормальная нагрузка на i -ое колесо; (P_{xi}, P_{yi}, P_{zi}) , (M_{yi}, M_{yi}, M_{zi}) — результирующие сила и момент ветровой нагрузки на экипаж, приведенные к центру масс; m — масса кузова; A, B, C — главные центральные моменты инерции кузова; c_i, h_i — коэффициенты упругости и демпфирования элементов подвески; l_i — длины недеформированных пружин подвески ($l_1 = l_4$, $l_2 = l_3$) плюс радиус r_0 ; η_i — высота неровности дороги под i -м колесом; P_i — продольная составляющая реакции дороги, приложенной к колесу; s_i — деформация пружины i -го элемента подвески.

В этих обозначениях обобщенными координатами рассматриваемой модели четырехколесного экипажа являются: $x, y, z, \alpha, \beta, \theta, \psi$. Однако, в дальнейшем будем считать ψ известной функцией времени, т. е. управляемым параметром. Согласно сделанным упрощающим предположениям углы φ_i ($i = \overline{1, 4}$) оказываются исключенными из рассмотрения, потому что моменты продольных реакций дороги, действующие на передние колеса, уравниваются тормозящими моментами

$$r_0 P_1 = M_{c1}, \quad r_0 P_4 = M_{c4} \quad (1.1)$$

а для задних (ведущих) колес имеют место соотношения

$$2(r_0 P_2 + M_{c2}) = M_T, \quad 2(r_0 P_3 + M_{c3}) = M_T \quad (1.2)$$

откуда определяются выражения для P_i ($i = \overline{1, 4}$). В этих выражениях величины M_{ci} и M_T тоже предполагаются управляемыми параметрами.

Как известно [5—7], уравнения движения колесного экипажа имеют наиболее простой вид в сопровождающей системе координат и, следовательно, должны

записываться в форме уравнений в квазикоординатах. Введем квазикоординаты π_j ($j = 1, 6$) посредством соотношений:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= z^* \\ \pi_2 &\equiv v = x^* \cos \theta + y^* \sin \theta + h\alpha^* - h\beta\theta^* \\ \pi_3 &\equiv u = -x^* \sin \theta + y^* \cos \theta + h\beta^* + h\alpha\theta^* \\ \pi_4 &\equiv p = -\beta^* - (\alpha + \gamma)\theta^* \\ \pi_5 &\equiv q = \alpha^* - \beta\theta^*, \quad \pi_6 \equiv r \equiv \omega = \theta^*\end{aligned}\tag{1.3}$$

Здесь π_1, π_6 оказываются истинными координатами, а $\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ являются квазикоординатами. Величины π_1, π_2, π_3 — это проекции вектора скорости центра масс кузова на вертикаль, на продольное и на поперечное направление экипажа; π_4, π_5, π_6 — это проекция вектора мгновенной угловой скорости вращения кузова на направление главных осей его центрального эллипсоида инерции.

Разрешая уравнения (1.3) относительно обобщенных скоростей, получаем соотношения, которые нужны в дальнейшем

$$\begin{aligned}x^* \cos \theta + y^* \sin \theta &= \pi_2 - h\pi_3 \\ -x^* \sin \theta + y^* \cos \theta &= \pi_3 + h\pi_4 + h\gamma\pi_6 \\ \alpha^* &= \pi_3 + \beta\pi_6, \quad \beta^* = -\pi_4 - (\alpha + \beta)\pi_6\end{aligned}\tag{1.4}$$

Вспользуемся уравнениями в квазикоординатах в общей форме [6]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \pi_i} - \frac{\partial L}{\partial \pi_i} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial L}{\partial \pi_j} \left(\sum_{k=1}^6 \gamma_{jk} \pi_k + \gamma_j \right) = \Pi_i - \frac{\partial R}{\partial \pi_i} \quad (i = \overline{1, 6})\tag{1.5}$$

Здесь $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа; T — выражение кинетической энергии, в котором все обобщенные скорости выражены через π_i ; Π — потенциальная энергия системы; R — функция Релея; Π_i — непотенциальные обобщенные силы, действующие на систему; $\partial L / \partial \pi_i$ — оператор, который для истинных координат совпадает с операцией обычного частного дифференцирования. Коэффициенты γ_{ijk} и γ_{ij} вычисляются, исходя из соотношений (1.3), (1.4) и равны $\gamma_{326} = \gamma_{632} = \gamma_{546} = \gamma_{654} = -\gamma_{236} = -\gamma_{623} = -\gamma_{456} = -\gamma_{645} = 1$, $\gamma_{ij} \equiv 0$. В квазикоординатах, введенных соотношениями (1.3), выражение кинетической энергии имеет наиболее простой вид, а именно

$$T = 1/2 m [(\pi_1)^2 + (\pi_2)^2 + (\pi_3)^2] + 1/2 [A (\pi_4)^2 + B (\pi_5)^2 + C (\pi_6)^2]\tag{1.6}$$

Потенциальная энергия экипажа складывается из потенциальной энергии кузова в поле силы тяжести и энергии пружин подвески

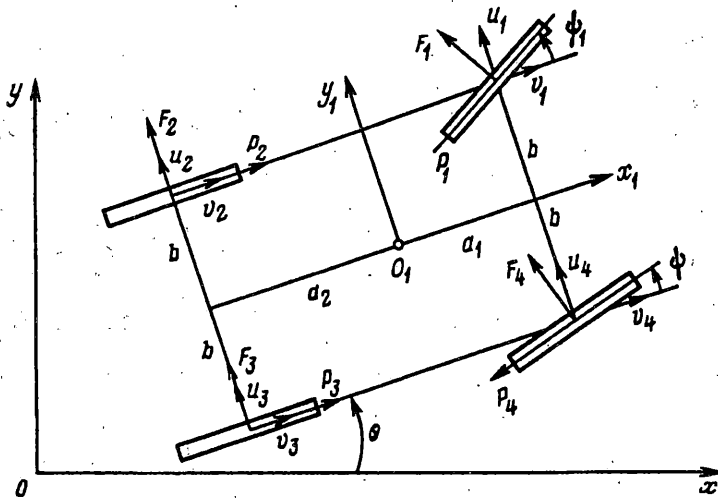
$$\Pi = mg \left[z - \frac{1}{2} h (\alpha^2 + \beta^2) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 c_i s_i^2\tag{1.7}$$

$$s_1 = z - a_1 \alpha - b \beta - \eta_1 - l_1, \quad s_2 = z - a_2 \alpha - b \beta - \eta_2 - l_2$$

$$s_3 = z + a_2 \alpha + b \beta + \eta_2 - l_2, \quad s_4 = z - a_1 \alpha + b \beta - \eta_4 - l_1$$

Функция Релея, с помощью которой учитываются силы вязкого трения в амортизаторах подвески, имеет вид

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 h_i (s_i)^2\tag{1.8}$$



Фиг. 3

Для нахождения обобщенных непотенциальных сил составим выражение виртуальной работы. Согласно соотношениям (1.3) и обозначениям на фиг. 3 имеем следующие выражения:

$$u_1 = u_4 = \pi_3 + h\pi_4 + (a_1 + \gamma h) \pi_6 \quad (1.9)$$

$$u_2 = u_3 = \pi_3 + h\pi_4 - (a_2 - \gamma h) \pi_6$$

$$v_1 = v_2 = \pi_2 - h\pi_5 - b\pi_6$$

$$v_3 = v_4 = \pi_2 - h\pi_5 + b\pi_6$$

Поэтому виртуальная работа записывается в виде

$$\begin{aligned} \delta A = & P_{x1} \delta \pi_1 + P_{x2} \delta \pi_2 + P_{y1} \delta \pi_3 + M_{x1} [\delta \pi_4 + \\ & + (\alpha + \gamma) \delta \pi_6 + M_{y1} (\gamma \pi_5 + \beta \delta \pi_6) + M_{z1} \delta \pi_6 + \\ & + (F_{x1} \cos \psi_1 + F_4 \cos \psi - P_1 \sin \psi_1 - P_4 \sin \psi) [\delta \pi_3 + h\pi_4 + \\ & + (a_1 + h\gamma) \delta \pi_6] + (F_2 + F_3) [\delta \pi_3 + h\delta \pi_4 - (a_2 - \gamma) \delta \pi_6] + \\ & + (P_2 - P_1 \cos \psi_1 - F_1 \sin \psi_1) (\delta \pi_2 + h\delta \pi_5 - b\delta \pi_6) + \\ & + (P_3 - P_4 \cos \psi - F_4 \sin \psi) (\delta \pi_2 - h\delta \pi_5 + b\delta \pi_6) \end{aligned}$$

Отсюда находим выражения обобщенных непотенциальных сил

$$\Pi_1 = P_{x1}, \Pi_2 = Q_1 + P_{x2}, \Pi_3 = Q_2 + P_{y1}, \Pi_4 = hQ_2 + M_{x1}$$

$$\begin{aligned} \Pi_5 = & -hQ_2 + M_{y1}, \Pi_6 = b(Q_1 + 2P_1 \cos \psi_1 + 2F_1 \sin \psi - 2P_2) + (a_1 + \gamma h) Q_2 - \\ & - a(F_2 + F_3) + (\alpha + \gamma) M_{x1} + \beta M_{y1} + M_{z1} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$Q_1 = P_2 + P_3 - P_1 \cos \psi_1 - P_4 \cos \psi - F_1 \sin \psi_1 - F_4 \sin \psi$$

$$Q_2 = F_2 + F_3 + F_2 \cos \psi_1 + F_4 \cos \psi - P_1 \sin \psi_1 - P_4 \sin \psi$$

Величины P_j ($j = \overline{1, 4}$) определяются выражениями (1.1), (1.2), а силы F_i ($i = \overline{1, 4}$) согласно гипотезе нелинейного увода связаны с величиной увода $W_i = U_i V_i^{-1}$ при помощи соотношений

$$F_i - k_i W_i [1 + (k_i W_i / \sqrt{N_i})^2]^{-1/2} \quad (i = \overline{1, 4})$$

$$V_1 = v_1 \cos \psi_1 + u_1 \sin \psi_1, \quad U_1 = -v_1 \sin \psi_1 + u_1 \cos \psi_1 \quad (1.11)$$

$$V_2 = v_2, \quad U_2 = U_3 = u_3, \quad V_3 = v_3$$

$$V_4 = v_4 \cos \psi + u_4 \sin \psi, \quad U_4 = -v_4 \sin \psi + u_4 \cos \psi$$

где u_i, v_i определяются выражениями (1.9). В соотношениях (1.11) нормальная нагрузка N_i на i -ое колесо выражается через деформацию пружин элементов подвески

$$N_i = -(c_i s_i + h_i s_i') \quad (i = \overline{1, 4}) \quad (1.12)$$

При безотрывном качении колес все величины N_i положительны.

Составляя уравнения в квазикоординатах (1.5), в которых использованы выражения (1.6)—(1.12), получаем уравнения динамики рассматриваемой модели четырехколесного экипажа

$$mz'' + mg + R_1 + R_2 = \Pi_1 \quad (1.13)$$

$$m\dot{v} - m\omega u = \Pi_2, \quad m\dot{u} + m\omega v = \Pi_3$$

$$A\dot{p}' - B\omega q + mgh\beta + bR_3 = \Pi_4$$

$$Bq' + A\omega p - mgh\alpha + a_2 R_1 - a_1 R_2 = \Pi_5$$

$$C\omega' + (B - A) pq - R_4 = \Pi_6$$

$$R_1 = -N_2 - N_3, \quad R_2 = -N_1 - N_4, \quad R_3 = N_3 + N_4 - N_1 - N_2$$

$$R_4 = \beta (a_1 R_2 - a_2 R_1) - \bar{b} (\gamma + \alpha) R_3$$

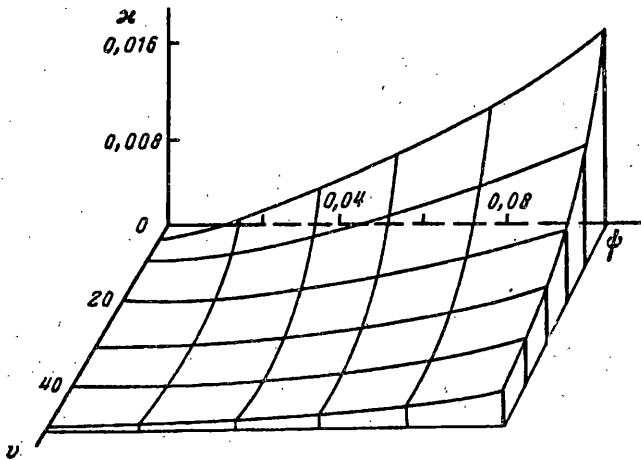
Уравнения динамики (1.13) вместе с уравнениями

$$\alpha' = q + \beta\omega, \quad \beta' = -p - (\alpha + \gamma)\omega \quad (1.14)$$

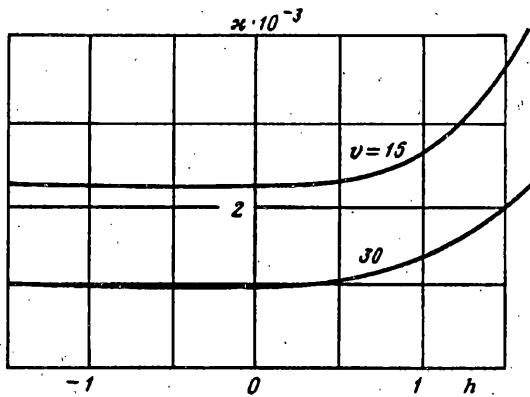
которые следуют из соотношений (1.4), представляют замкнутую систему восьми дифференциальных уравнений для определения неизвестных $z, \alpha, \beta, \omega, p, q, u, v$ как функций времени и, следовательно, являются уравнениями движения рассматриваемой модели.

Поскольку полученные уравнения записаны по существу в нормальной форме Коши, они очень удобны для исследования с помощью ЭВМ.

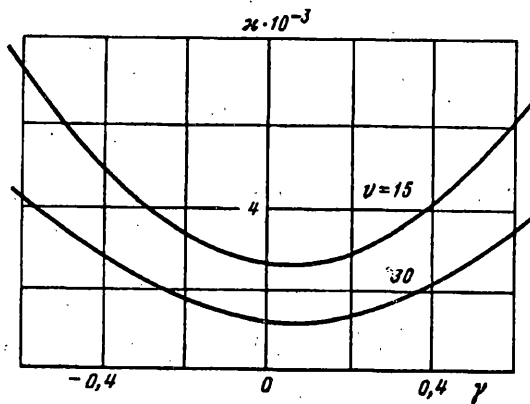
С целью иллюстрации возможностей, которые предоставляет предложенная модель, были рассмотрены стационарные движения конкретной гипотетической машины по горизонтальной плоскости в отсутствие сил аэродинамического давления. Путем численного решения уравнений с помощью ЭВМ получены графики зависимости кривизны κ [рад/м] траектории, которую описывает точка Q_1 (см. фиг. 3), от представляющих интерес физических параметров. Результаты вычислений приведены на фиг. 4—6. Поверхность на фиг. 4 отображает зависимость κ от параметров управления экипажем: скорости движения v [м/с] и угла ψ [рад] поворота передних колес. Вид полученной зависимости указывает на то, что с увеличением v и уменьшением ψ кривизна κ траектории точки



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

κ , уменьшается, что вполне согласуется с экспериментальными данными. На фиг. 5 показан график зависимости кривизны κ от высоты h [м] расположения центра масс эпижа. Из этого графика следует, что при отрицательных и малых положительных значениях h кривизна κ практически не зависит от h . На фиг. 6 изображен график зависимости κ от угла γ наклона центрального

эллипсоида инерции кузова относительно плоскости x_2y_2 . Согласно этому графику существует минимальное значение κ , которое в рассмотренном примере достигается при $\gamma = 2^\circ$.

2. Условия, при выполнении которых уравнения движения распадаются на независимые группы. Рассмотрим уравнения (1.13) и (1.14) в случае, когда величины z, v остаются конечными, а величины $z', \alpha, \beta, \gamma, p, q, u, \omega, \eta, \eta', \psi$ настолько малы, что их произведениями можно пренебречь. Предположим, что аэродинамическими силами также можно пренебречь, а тормозящие моменты, приложенные к колесам, $M_{c1} = M_{c4}, M_{c2} = M_{c3}$. Вычислим R_i ($i = \overline{1, 4}$) и Π_j ($j = \overline{1, 6}$), в уравнениях (1.13):

$$\begin{aligned} R_1 &= c_2 (s_2 + s_3) + h_2 (s_2^* + s_3^*) = c_2 [2 (z + a_2 \alpha - l_2) - \eta_2 - \eta_3] + h_2 [2 (z' + \\ &+ a_2 \alpha') - \eta_2^* - \eta_3^*] \\ R_2 &= c_1 [2 (z - a_1 \alpha - l_1) - \eta_1 - \eta_4] + h_1 [2 (z' - a_1 \alpha' - \eta_1^* - \eta_4^*)] \\ R_3 &= c_1 (s_1 - s_4) + h_1 (s_1^* - s_4^*) + c_2 (s_2 - s_3) + h_2 (s_2^* - s_3^*) = 2b (c_1 + c_2) \beta - \\ &- 2b (h_1 + h_2) \beta^* - f_2 (\eta, \eta') \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} f_1 (\eta, \eta') &= c_1 (\eta_1 + \eta_4) + c_2 (\eta_2 + \eta_3) + h_1 (\eta_1^* + \eta_4^*) + h_2 (\eta_2^* + \eta_3^*) \\ f_2 (\eta, \eta') &= c_1 (\eta_1 - \eta_4) + c_2 (\eta_2 - \eta_3) + h_1 (\eta_1^* - \eta_4^*) + h_2 (\eta_2^* - \eta_3^*) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} a_2 R_1 - a_1 R_2 &= 2 (a_2 c_2 - a_1 c_1) z + 2 (a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2) \alpha + 2 (a_2 h_2 - a_1 h_1) z' + \\ &+ 2 (a_1^2 h_1 + a_2^2 h_2) \alpha' + a_1 c_1 l_1 - a_2 c_2 l_2 - f_3 (\eta, \eta') \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$f_3 (\eta, \eta') = a_2 c_2 (\eta_2 + \eta_3) - a_1 c_1 (\eta_1 + \eta_4) + a_2 h_2 (\eta_2^* + \eta_3^*) - a_1 h_1 (\eta_1^* + \eta_4^*)$$

$$R_4 = -2 [2z_0 (a_2 c_2 - a_1 c_1) + a_1 c_1 l_1 - a_2 c_2 l_2] \beta$$

где z_0 — значение z при покое экипажа. Согласно определению (1.11) в рассматриваемом случае имеем

$$F_1 = F_4 = -k_1 v^{-1} (u + a_1 \omega - b \beta^* - v \psi)$$

$$F_2 = F_3 = -k_2 v^{-1} (u - a_2 \omega - h \beta^*)$$

При вычислении этих выражений и далее принято во внимание, что в рассматриваемом случае уравнения (1.14) вырождаются в соотношения $q = \alpha^*, p = -\beta^*$. Из уравнений (1.1), (1.2) следует, что $P_1 = P_4 = r_0^{-1} M_{c1}, P_2 = P_3 = (2r_0)^{-1} (M_T - 2M_{c2})$, поэтому

$$\begin{aligned} Q_1 &= r_0^{-1} [M_T - 2 (M_{c1} + M_{c2})], Q_2 = -2v^{-1} (k_1 + k_2) u + \\ &+ 2v^{-1} (a_2 k_2 - a_1 k_1) \omega + 2h v^{-1} (k_1 + k_2) \beta^* + 2 (k_1 - r_0^{-1} M_{c1}) \psi \end{aligned} \quad (2.4)$$

Согласно выражениям (1.10) обобщенные силы Π_j равны

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= 0, \Pi_2 = Q_1, \Pi_3 = Q_2, \Pi_4 = h Q_2, \Pi_5 = -h Q_1 \\ \Pi_6 &= 2v^{-1} (a_2 k_2 - a_1 k_1) u - 2v^{-1} (a_1^2 k_1 + a_2^2 k_2) \omega - 2h v^{-1} (a_2 k_2 - a_1 k_1) \beta^* + \\ &+ 2a_1 (k_1 - r_0^{-1} M_{c1}) \psi \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя найденные выражения R, Π , в уравнения (1.13) получаем

$$mz'' + 2(h_1 + h_2)z' + 2(c_1 + c_2)z + 2(a_2h_2 - a_1h_1)\alpha' + 2(a_2c_2 - a_1c_1)\alpha + mg - 2(c_1l_1 + c_2l_2) = f_1(\eta, \eta') \quad (2.6)$$

$$mv' = r_0^{-1} [M_T - 2(M_{c_1} + M_{c_2})] \quad (2.7)$$

$$mu' + 2v^{-1}(k_1 + k_2)u + [mv - 2v^{-1}(a_2k_2 - a_1k_1)]\omega - 2hv^{-1}(k_1 + k_2)\beta' = -2(k_1 - r_0^{-1}M_{c_1})\psi \quad (2.8)$$

$$A\beta'' + 2b^2(h_1 + h_2)\beta' + [2b^2(c_1 + c_2) - mgh]\beta = -hQ_2 - bf_2(\eta, \eta') \quad (2.9)$$

$$B\alpha'' + 2(a_1^2h_1 + a_2^2h_2)\alpha' + [2(a_1^2c_1 + a_2^2c_2) - mgh]\alpha + 2(a_2h_2 - a_1h_1)z' + 2(a_2c_2 - a_1c_1)z + 2(a_1c_1l_1 - a_2c_2l_2) = f_3(\eta, \eta') - hQ_1 \quad (2.10)$$

$$C\omega' = \Pi_6 + r_4 \quad (2.11)$$

где Q_1, Q_2, Π_6 определяются выражениями (2.4) и (2.5).

Отсюда непосредственно следует, что система уравнений (2.6)–(2.11) разделяется на три независимые группы:

Уравнение (2.7) относительно продольной составляющей скорости движения v . Это уравнение обычно применяется для расчета тяговой динамики экипажа;

Уравнения (2.6), (2.10) относительно z и угла продольного крена кузова α . Эта система уравнений, в которых отсутствуют члены, содержащие множителем h , широко применяется для изучения случайных колебаний экипажа. Однако структура уравнения (2.10) указывает на то, что при $h = 0$ система (2.6), (2.10) перестает отображать зависимость колебаний по z и α от характера управления движением экипажа, хотя в действительности такая зависимость обычно наблюдается;

Уравнения (2.8), (2.9) и (2.11) относительно поперечной составляющей скорости u , угловой скорости ω вращения экипажа вокруг вертикали и угла бокового крена кузова β . В этих уравнениях, описывающих криволинейное движение экипажа вдоль дороги, микропрофиль дороги обычно не учитывается, $f_2(\eta, \eta') \equiv 0$, а продольная составляющая скорости v предполагается заданной и конечной величиной. При $h = 0$ эта группа уравнений разделяется на группу из двух уравнений относительно u, ω и уравнение относительно β . В этом случае исследование устойчивости прямолинейного движения экипажа с постоянной скоростью v сводится к изучению решения системы дифференциальных уравнений

$$mvu' + 2(k_1 + k_2)u + [mv^2 - 2(a_2k_2 - a_1k_1)]\omega = 0$$

$$C\omega' + 2(a_1^2k_1 + a_2^2k_2)\omega - 2(a_2k_2 - a_1k_1)u = 0$$

Эти уравнения описывают движение так называемой «плоской модели» колесного экипажа при его малых отклонениях от прямолинейного стационарного движения и приводит к известному выражению критической скорости

$$v_*^2 = 2a^2k_1k_2 [m(a_1k_1 - a_2k_2)]^{-1}$$

Если $a_1k_1 > a_2k_2$, то движение устойчиво лишь при скоростях $v < v_*$, а в случае $a_1k_1 < a_2k_2$ устойчиво при любой скорости v .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского конкурсного центра грантов по фундаментальным исследованиям в области транспортных наук по разделу «Теоретические проблемы транспорта». Проект № 8 (4.53), 1993 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ротенберг Р. В.* Подвеска автомобиля. Колебания и плавность хода. М.: Машиностроение, 1972. 392 с.
2. *Литвинов А. С.* Управляемость и устойчивость автомобиля. М.: Машиностроение, 1971. 416 с.
3. *Токарев А. А.* Топливная экономичность и тягово-скоростные качества автомобиля. М.: Машиностроение, 1982. 222 с.
4. *Левин М. А., Фуфаев Н. А.* Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 271 с.
5. *Мартынюк А. А., Лобас Л. Г., Никитина Н. В.* Динамика и устойчивость движения колесных транспортных машин. Киев. Техніка, 1981. 223 с.
6. *Фуфаев Н. А.* Теория движения систем с качением. // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 56—65.
7. *Журавлев В. Ф., Фуфаев Н. А.* Механика систем с неударяющими связями. М.: Наука, 1993. 240 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
18.VI.1993