МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1995

УДК 531.8

© 1995 г. В. В. ФИЛИППОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ РОТОРА В УПРУГИХ ПОДШИПНИКАХ

Исследуется устойчивость установившихся плоско-параллельных движений ротора в нелинейно упругих подшипниках относительно различных групп переменных в случае совместного действия сил внешнего и внутреннего трения. Показано, что уравновешенный ротор может совершать асимптотически устойчивые движения типа асинхронных прецессий.

Условия устойчивости равномерно вращающегося неуравновешенного ротора на линейно гибком валу (случай двигателя неограниченной мощности) с учетом сил внешнего и внутреннего трения получены в [1]. Анализ измененной потенциальной энергии в этой задаче проведен в [2]. Необходимые условия устойчивости установившихся движений ротора в нелинейно упругих подшипниках получены в [3], достаточные условия — в [4]. Устойчивость в точке бифуркации изучена в [5], где показано, что в ней, как правило, имеет место неустойчивость. В [6] показано, что включение в систему квадратичного внешнего трения приводит к коренному изменению поведения ротора (в предыдущих работах трение было линейным). Такой ротор не обладает свойством самоцентрирования, но зато диапазон его неустойчивых скоростей ограничен сверху.

Стационарные движения неуравновешенного ротора рассматривались в [7—9]. Условия устойчивости этих движений получены в случае линейно упругого вала с учетом сил внутреннего трения в [7], для нелинейно упругих подшипников, удовлетворяющих условию Герца,— в [8]. Методами гамильтоновой механики эта задача изучалась в [9], где получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости движений ротора в случае подшипников, обладающих нелинейной упругой характеристикой, выпуклой снизу. Устойчивость движений ротора в случае резонансов до четвертого порядка исследовалась в [10]. Достаточные условия устойчивости движений ротора в нелинейно упругих подшипниках как системы с квазициклическими координатами получены в [4].

Дестабилизирующее влияние двигателя ограниченной мощности на устойчивость установившихся движений ротора при отсутствии сил трения показано в первом приближении в [3] и после анализа нелинейных уравнений движения в [4]. С учетом сил внешнего трения устойчивость этих движений исследована в [3, 5].

Закон управления моментом привода для стабилизации закритических вращений неуравновешенного ротора на линейно гибком валу с учетом сил внутреннего трения получен в [11]. Управляемость и наблюдаемость в случае совместного действия сил внешнего и внутреннего трения для данной задачи проанализирована в [12].

В [13] методом Хори построено асимптотическое решение задачи о движении равномерно вращающегося вертикального неуравновешенного ротора в поле линейной центральной силы с учетом неоднородности гравитационного поля в нерезонансном случае.

Устойчивость установившихся движений уравновешенного ротора изучалась в работах [8, 9, 14—19].

В [14] проведен анализ условий устойчивости движения равномерно вращающегося уравновешенного ротора под действием сил внутреннего трения. В [15] показано, что упругий вал, вращающийся равномерно, представляет собой типичную неконсервативную систему. В этой работе дан анализ влияния сил внутреннего трения различной природы на существование асинхронных прецессий сбалансированного диска на невесомом упругом валу. Исходя из бифуркационных соображений устанавливаются области устойчивости перманентных вращений и асинхронных прецессий.

В [16] получены достаточные условия устойчивости перманентных вращений уравновешенного ротора на нелинейно упругом валу относительно различных групп переменных. А. Ю. Ишлинским

(1980) исследован фазовый портрет системы, описывающей движение уравновешенного ротора в нелинейно упругих подшипниках с характеристикой, заданной формулой Герца, когда силы трения отсутствуют, а момент сил сопротивления компенсируется моментом привода. Некоторые из полученных им результатов представлены в [8]. Достаточные условия устойчивости перманентных вращений уравновешенного ротора с учетом сил трения получены Д. Р. Меркиным в [17]. В [9] показано, что при отсутствии сил трения перманентное вращение уравновешенного ротора в нелинейно упругих подшипниках устойчиво при любом гамильтоновом возмущении. Квазистационарные движения уравновешенного ротора на линейно гибком валу описаны в [18, 19].

1. Уравнения движения. Рассмотрим плоскопараллельное движение вертикального абсолютно твердого ротора на абсолютно твердом валу общей массы m в нелинейно упругих подшипниках, установленных на неподвижном основании.

Следуя [3], предположим, что нелинейные упругие реакции подшипников приводятся к равнодействующей — центральной притягивающей силе $mF(\rho)$, где $\rho = O_1O$ — расстояние от оси вращения ротора O до точки O_1 пересечения плоскости движения центра масс C ротора и жестко связанных с ним твердых тел с осью недеформированных подшипников, причем $F(0) = 0$, $\partial F/\partial\rho > 0$, а $\partial^2 F/\partial\rho^2$ — непрерывна в пределах допустимых деформаций подшипников.

Введем неподвижную систему координат $O_1\xi\eta\zeta$ с вертикальной осью ζ. Обозначим абсолютную угловую скорость вращения ротора через $\dot\psi$. В качестве обобщенных координат выберем ρ, θ, ψ. Здесь $\theta = \psi - \varphi$, а φ — угол между осью ξ и отрезком O_1O. В дальнейшем движение точки O будем также описывать ее координатами ξ, η в системе $O_1\xi\eta$ и координатами x, y в системе O_1xy, вращающейся со скоростью $\dot\psi$.

При исследовании установившихся движений ротора будем предполагать, что на ротор действуют сила внешнего трения $\mathbf{F}_1 = -mk_1(\dot\rho, \rho(\dot\psi - \dot\theta))$, пропорциональная абсолютной скорости точки O, а также сила внутреннего трения $\mathbf{F}_2 = mk_2(-\dot\rho, \rho\dot\theta)$, пропорциональная относительной скорости точки O. Рассмотрим также модель сил трения $\mathbf{F}_3 = -mk_3(\dot\rho, 0)$, пропорциональных радиальному смещению оси вращения ротора [17]. Здесь k_i $(i = 1, 2, 3)$ — положительные постоянные.

Рассмотрим случай двигателя неограниченной мощности, который во все время движения поддерживает угловую скорость ротора постоянной $\dot\psi = \omega$. Тогда функцию Лагранжа можно представить в виде суммы трех однородных относительно $\dot\rho$ функций $L = L_2 + L_1 + L_0$, где

$$L_0 = \frac{m\,[\rho^2\omega^2 + 2e\rho\omega^2\cos\theta]}{2} - m\int_0^\rho F(\rho)\,d\rho$$

а уравнения движения ротора записать в виде

$$\ddot\rho - \rho(\omega - \dot\theta)^2 - \omega^2 e\cos\theta = -F - (k_1 + k_2 + k_3)\dot\rho \tag{1.1}$$

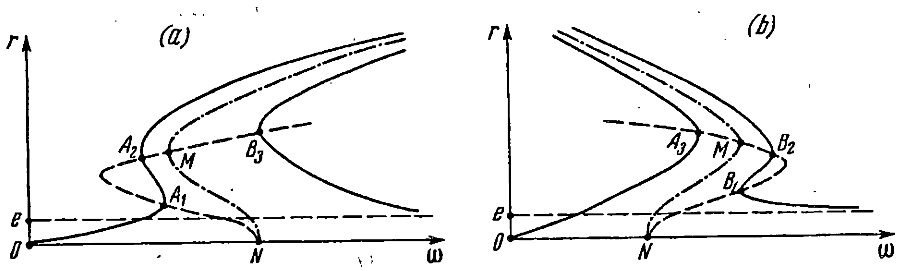
$$\rho\ddot\theta + 2\dot\rho(\dot\theta - \omega) + \omega^2 e\sin\theta = -k_1\rho(\dot\theta - \omega) - k_2\rho\dot\theta$$

2. Множество установившихся движений неуравновешенного ротора. При $e \neq 0$ уравнения (1.1) имеют частное решение

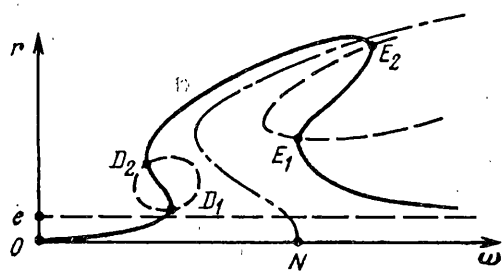
$$\rho = r = \text{const}, \quad \theta = \gamma = \text{const} \tag{2.1}$$

описывающее множество G_1 установившихся движений неуравновешенного ротора (синхронных прецессий), которые существуют при выполнении соотношений

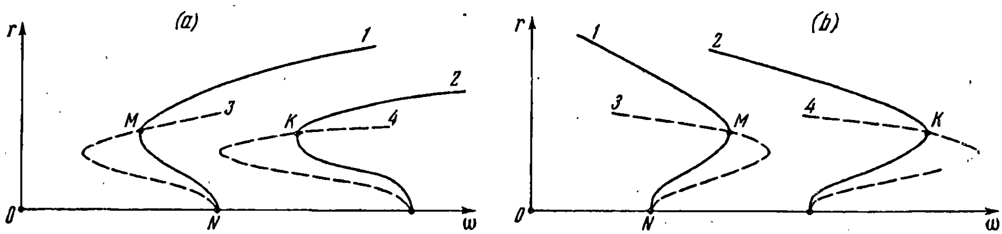
$$r\omega^2 + e\omega^2\cos\gamma = F(r), \quad \omega^2 e\sin\gamma = k_1 r\omega \tag{2.2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На плоскости (r, ω) уравнения (2.2) при $k_1 = 0$ определяют кривую $r = r_1(\omega, e)$, состоящую из двух ветвей. Ветвь, лежащая слева от скелетной кривой

$$c_2(r, \omega) = F/r - \omega^2 = 0 \qquad (2.3)$$

соответствует первой форме установившихся движений ротора, при которых $\gamma = \gamma_1 = 0$. Ветвь, лежащая справа от (2.3), соответствует второй форме, при которой $\gamma = \gamma_2 = \pi$. На фиг. 1 представлен вид функции $r_1 = r_1(\omega, e)$ для $F = ar^5 + br^3 + cr$ при $9b^2 < 20ac$. Фиг. 1, a соответствует случаю $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, фиг. 1, b — случаю $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$. Кривые r_1, соответствующие другим видам силы F с линейной, мягкой и жесткой характеристиками представлены на фиг. 1 работы [3]. При $k_1 \neq 0$ уравнения (2.2) определяют кривые $r = r_2(\omega, e, k_1)$, которые лежат внутри кривых r_1 (фиг. 2).

На режимах r_1 все три точки O_1, O, C лежат на одной прямой. На режимах r_2 имеем $\sin\gamma > 0$ и центр масс C «обгоняет» ось вращения O. При $\omega \to \infty$ имеем $r_i \to e$ $(i = 1, 2)$ (свойство самоцентрирования).

Точки бифуркации A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ при $k_1 = 0$ и D_j, E_j $(j = 1, 2)$ при $k_1 \neq 0$, в которых касательные к кривым r_1 и r_2 вертикальны, определяются как точки пересечения кривой r_1 с кривой бифуркаций

$$c_1(r, \omega) = \partial F/\partial\rho - \omega^2 = 0 \qquad (2.4)$$

и, соответственно, как точки пересечения r_2 с кривой бифуркаций

$$a_4(r, \omega) = c_1 c_2 + k_1^2 \omega^2 = 0 \tag{2.5}$$

На фиг. 1, 2 скелетные кривые изображены штрихпунктирной линией, а кривые (2.4), (2.5) — штриховой.

Нетрудно заметить, что замкнутая ветвь кривой (2.5) существует только при достаточно малой величине параметра k_1 (при достаточно малой интенсивности сил внешнего трения). При $k_1 \to 0$ кривая (2.5) стремится совпасть с кривыми (2.3) и (2.4).

Существует «малое» значение $e_0(k_1)$ такое, что при фиксированном значении k_1 и $e < e_0(k_1)$ кривая r_2 не имеет точек бифуркаций. Обозначим для удобства такие кривые r_2 через r_3. Значение e_0 в явном виде найдено в [3] для силы F, заданной формулой Герца.

При $e \to 0$ точки бифуркаций A_2, B_3 и A_3, B_2 движутся по кривым бифуркаций к точке M, в которой скелетная кривая имеет вертикальную касательную, а точки бифуркаций A_1, B_1 к точке N пересечения скелетной кривой с осью абсцисс. При $e \to 0$ кривая r_1 стремится к скелетной кривой (2.3), которую обозначим через $r = r_4(\omega)$, и к оси абсцисс $r = r_0 = 0$. При достаточно малых e каждому ω, лежащему между ω_0 и ω_4, соответствуют пять установившихся режимов движения r_1 — два при γ_1 и три при γ_2. Здесь ω_0 и ω_4 — значения ω, соответствующие точкам N и M.

При $e \to 0$ кривая r_2 сначала переходит в кривую r_3 и затем стремится к r_0. При $e > e_0$ и достаточно малом значении k_1 различным значениям ω может соответствовать от одного до пяти установившихся режимов r_2. При $e < e_0$ каждому ω соответствует только одно значение r_3.

3. Множество установившихся движений уравновешенного ротора. Уравнения движения (1.1) при $e = 0$ допускают частное решение

$$\rho = r = \text{const}, \quad \theta = \omega - \Omega = \text{const} \tag{3.1}$$

описывающее множество G_0 установившихся движений уравновешенного ротора. Параметры этих движений определяются соотношениями

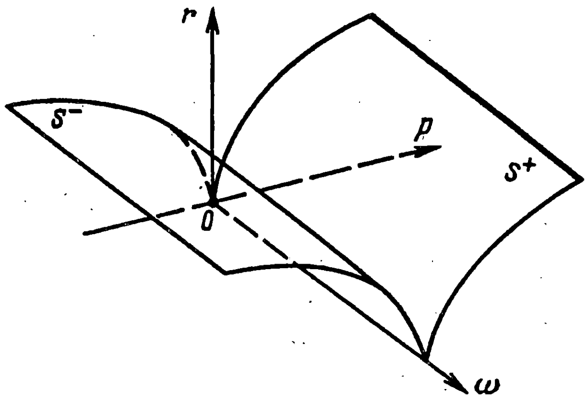
$$r\Omega^2 = F, \quad k_1 r\Omega + k_2 r(\Omega - \omega) = 0 \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что для любых ω и k_i $(i = 1, 2, 3)$ существуют режимы перманентных вращений ротора $r_0 = 0$. При $k_1 = k_2 = 0$ множество G_0 содержит, кроме того, подмножество $r = r_5(\Omega) : r_5\Omega^2 = F(r_5)$, состоящее из асинхронных прецессий при $\Omega \neq \omega$ и синхронных прецессий $r_4 = r_5(\omega)$ при $\Omega = \omega$. При $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$ множество G_0 содержит лишь режимы r_0 и r_4. При $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$ существуют только режимы r_0. В общем случае $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ множество G_0 кроме режимов r_0 содержит еще подмножество асинхронных прецессий r_6 (автоколебаний), частоты которых зависят от частоты вращения ротора

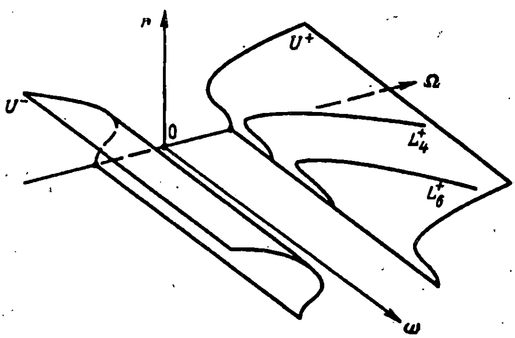
$$\Omega = k_2\omega/(k_1 + k_2), \quad F(r_6)/r_6 = \Omega^2 \tag{3.3}$$

На фиг. 3 цифрами *1*, *2* обозначены кривые r_4, r_6 для $F = ar^5 + br^3 + cr$ при $9b^2 < 20ac$. Фиг. 3*а* соответствует $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, фиг. 3, *в* — $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Заметим, что при отсутствии сил трения ($k_1 = k_2 = 0$) данная механическая система имеет циклический интеграл (координата θ циклическая), который на решениях (3.1) представляется в виде $p = r^2\Omega$. Таким образом, режимы r_4, r_5 представляют собой стационарные движения ротора.



Фиг. 4



Фиг. 5

В пространстве параметров (r, ω, p) множество $r = r_s(p)$: $p^2 = r_s^3 F(r_s)$ заполняет поверхность S, состоящую из двух симметричных относительно плоскости $p = 0$ поверхностей S^+ и S^- (фиг. 4). Каждой точке поверхности S^+ (S^-) соответствует прямая (обратная) прецессии ротора. Подмножество перманентных вращений r_0 изображается прямой $r = 0$, $p = 0$.

В пространстве параметров (r, ω, Ω) множеству G_0 соответствуют поверхности U^+ и U^-, симметричные относительно плоскости $\Omega = 0$ (фиг. 5). Сечения L_4^+, L_6^+ поверхности U^+ плоскостями $\Omega = \omega$ и $\Omega = k_1\omega/(k_1 + k_2)$ представляют собой подмножества синхронных r_4 и асинхронных r_6 прецессий.

4. Устойчивость установившихся движений неуравновешенного ротора. Из (1.1) следует, что уравнения первого приближения имеют вид $(z_1 = \rho - r,\ z_2 = r(\theta - \gamma))$:

$$\ddot{z}_1 + (k_1 + k_2 + k_3)\dot{z}_1 + 2\omega\dot{z}_2 + c_1 z_1 + k_1\omega z_2 = 0 \qquad (4.1)$$

$$\ddot{z}_2 - 2\omega\dot{z}_1 + (k_1 + k_2)\dot{z}_2 - k_1\omega z_1 + c_2 z_2 = 0$$

Уравнения первого приближения в переменных x, y при $k_3 = 0$ имеют вид уравнений (4.1), в которых необходимо поменять знаки у гироскопических и неконсервативных позиционных сил на противоположные, заменить c_1, c_2 на c_1^*, c_2^* и добавить в левые части первого и второго уравнений слагаемые $c_{12}^* z_2$ и $c_{12}^* z_1$, где

$$c_1^* = c_2 + \frac{(c_1 - c_2)\,x_*^2}{r^2}, \quad c_2^* = c_2 + \frac{(c_1 - c_2)\,y_*^2}{r^2}$$

$$c_{12}^* = (c_1 - c_2)\,x_* y_*/r^2$$

$$x_* (\omega) = \omega^2 e c_2/(c_2^2 + k_1^2\omega^2), \quad y_* (\omega) = \omega^3 e k_1/(c_2^2 + k_1^2\omega^2)$$

$$c_1 = c_1 (r (\omega), \omega), \quad c_2 = c_2 (r (\omega), \omega), \quad r^2 = x_*^2 + y_*^2$$

В случаях совместного действия сил внешнего и внутреннего трения $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ $(\mathbf{F}_3 = 0)$ и сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3$ $(\mathbf{F}_2 = 0)$, условия асимптотической устойчивости режимов r_2, r_3 относительно ρ, $\dot\rho$, θ, $\dot\theta$, а в случае действия сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и относительно x, y, $\dot x$, $\dot y$, сводятся к неравенствам

$$a_4 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \Delta_3 > 0 \tag{4.2}$$

где a_3, a_4 — третий и четвертый коэффициенты характеристического уравнения, Δ_3 — определитель Гурвица. При смене знака хотя бы у одного из неравенств (4.2) на противоположный, режимы r_2, r_3 становятся неустойчивыми. По сравнению со случаем действия одной силы внешнего трения области асимптотической устойчивости режимов r_2, r_3 сужаются за счет появления силы внутреннего трения $\mathbf{F}_2$ или диссипативной силы $\mathbf{F}_3$. В результате к неравенству $a_4 > 0$, которое является условием асимптотической устойчивости при $k_1 \neq 0$, $k_2 = k_3 = 0$ [3, 5] и которое выделяет участки, лежащие между точками бифуркаций, добавляются еще два неравенства. Последние, согласно (4.2), можно записать в следующем виде:

$$\omega < \omega_{21} (r, k_1, k_2), \quad \omega < \omega_{22} (r, k_1, k_2) \tag{4.3}$$

$$\omega < \omega_{31} (r, k_1, k_3), \quad \omega < \omega_{32} (r, k_1, k_3) \tag{4.4}$$

$$\omega_{21}^2 = (k_1 + k_2) f [2 (k_2 - k_1)]^{-1}$$

$$\omega_{31}^2 = [k_1 (f - h)/2 + k_3 f] (k_3 - 2k_1)^{-1}$$

$$\omega_{22}^2 = (k_1 + k_2)^2/(4k_2^2) \{(f - k_2^2/2) + [(f + k_2^2/2)^2 +$$
$$+ 4k_2^2 h^2/(k_1 + k_2)^2]^{1/2}\}$$

$$\omega_{32}^2 = [\mu_2 + (\mu_2^2 + 16k_3^2\mu_3)^{1/2}]/(8k_3^2)$$

$$f = \partial F/\partial\rho + F/r = f (r), \quad h = \partial F/\partial\rho - F/r = h (r)$$

$$\mu_2 = 8fk_1 (k_1 + k_3) + 2k_3^2 (f - h) - k_1 k_3^2 (k_3 + 2k_1) = \mu_2 (r)$$

$$\mu_3 = k_1 (k_1 + k_3) h + k_1 (k_1 + k_3) (k_3 + 2k_1) [k_1 f + k_3 (f - h)/2]$$

При $k_1 \geq k_2$ и $2k_1 \geq k_3$ условие $a_3 > 0$ выполняется для любых ω и первые неравенства в (4.3), (4.4) следует игнорировать.

При отсутствии силы внешнего трения $(k_1 = 0)$ неравенства (4.2) эквивалентны следующим

$$c_1 > 0, \; c_2 > 0 \tag{4.5}$$

Неравенства (4.5) разными способами получены и исследовались в [2—4, 17, 20]. Для линейной упругой силы $F = cr$ из (4.3) следует известное условие асимптотической устойчивости [1, 20]: $\omega < \omega_{22} (0) = c^{1/2} (k_1 + k_2)/k_2$.

Из анализа неравенств (4.3), (4.4) следует, что режимы r_2, r_3 асимптотически устойчивы в случаях действия сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3$, соответственно, при $\omega < \omega_2^*$ и $\omega < \omega_3^*$, за исключением участков D_1D_2 и E_1E_2, лежащих между точками бифуркаций (фиг. 2). Здесь $\omega_i^* = \min (\omega_{i1}^*, \omega_{i2}^*)$ $(i = 2, 3)$, где ω_{ij}^* $(j = 1, 2)$ — точки пересечения кривых $\omega = \omega_{ij} (r)$ с кривой $r = r_2 (\omega)$. Функции $\omega = \omega_{ij} (r)$ — монотонны. При $k_1 \neq 0$ и уменьшении k_2 и k_3 до нуля величины ω_2^* и ω_3^* стремятся к бесконечности.

Заметим, что если скелетная кривая выходит из начала координат, то из этой же точки выходят и кривые $\omega = \omega_{ij}(r)$ ($i = 2, 3$; $j = 1, 2$), т. е. $\omega_{ij}(0) = 0$. Если скелетная кривая выходит из точки $\omega_0 = c^{1/2}$, где $c = \partial F/\partial\rho$ при $\rho = 0$, то $\omega_{2i}(0) > \omega_{22}(0) > \omega_0$, $\omega_{3i}(0) > \omega_0$.

При $e \neq 0$, $e \to 0$ режимы r_1, r_2, r_3 сохраняют указанные свойства устойчивости и неустойчивости относительно $\rho, \dot\rho, \theta, \dot\theta$ и относительно $x, y, \dot x, \dot y$.

5. Устойчивость установившихся движений уравновешенного ротора. *1.* Исследуем сначала устойчивость режимов прецессий r_4, r_5, r_6. Диссипативная сила $\mathbf{F}_3$ ($k_1 = k_2 = 0$, $k_3 \neq 0$) не нарушает устойчивости стационарного движения $\rho = r_4, r_5$ (достаточные условия устойчивости r_4, r_5 относительно $\rho, \dot\rho, \dot\theta$ при $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ получены в [17, 18]), а всякое достаточно близкое к нему возмущенное движение стремится асимптотически к стационарному движению, соответствующему минимуму измененной потенциальной энергии $W = \Pi(\rho) + mp^2/(2\rho^2)$ при возмущенном значении $p + \delta p$. Если же значение величины p не возмущается, то режимы r_4, r_5 при добавлении силы $\mathbf{F}_3$ становятся асимптотически устойчивыми.

В случае действия сил внешнего $\mathbf{F}_1$ и внутреннего $\mathbf{F}_2$ трения ($k_3 = 0$) переменная θ становится псевдоциклической (квазициклической), а множество G_0 при $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$ содержит режимы синхронных прецессий r_4 и при $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ режимы асинхронных прецессий r_6.

В силу уравнений возмущенного движения имеем соотношение:

$$dH^{(3)}/dt = -(k_1 + k_2)(\dot z_1^2 + r^2\dot z_2^2) \tag{5.1}$$

$$H^{(3)} = L_2(r + z_1, \dot z_1, \dot z_2) - \delta^2 L_0(z_1) = m(\dot z_1^2 + r^2\dot z_2^2 + c_1 z_1^2)/2$$

$$z_1 = \rho - r,\ \dot z_2 = \dot\theta + \Omega - \omega,\ c_1 = F'(r) - \Omega^2,\ F'(r) = \partial F/\partial\rho \text{ при } \rho = r$$

Из (5.1) следует, что прецессии r_4 асимптотически устойчивы (неустойчивы) относительно $\rho, \dot\rho, \dot\theta$ при выполнении неравенства

$$c_1(r_4(\omega), \omega) = F'(r_4(\omega)) - \omega^2 > 0 \quad (c_1 < 0) \tag{5.2}$$

а прецессии r_6 асимптотически устойчивы (неустойчивы) относительно $\rho, \dot\rho, \dot\theta$ при выполнении неравенства

$$c_1(r_6(\Omega), \Omega) = F'(r_6(\Omega)) - \Omega^2 > 0 \quad (c_1 < 0) \tag{5.3}$$

Следовательно, участки кривой $r = r_4(\omega)$, лежащие слева от кривой $c_1(r, \omega) = 0$, асимптотически устойчивы (участок выше точки бифуркации M на фиг. 3, *a* и участок NM, лежащий между точками бифуркаций N и M, на фиг. 3, *b*), а участки, лежащие справа от этой кривой — неустойчивы.

На плоскости (r, ω) кривая $c_1(r, \Omega(\omega)) = 0$ согласно (3.3) выходит из той же точки оси абсцисс, что и кривая $r = r_6(\omega)$, и пересекает последнюю в точке бифуркации K (фиг. 3). Таким образом, асимптотически устойчивыми (неустойчивыми) будут режимы r_6, лежащие слева (справа) от кривой $c_1(r_6, \Omega(\omega)) = 0$. Для случая, изображенного на фиг. 3, *a*, ими являются режимы r_6, соответствующие точкам, лежащим выше (ниже) точки бифуркации K, а для случая (фиг. 3, *b*), лежащие ниже (выше) точки K. Кривые $c_1(r, \omega) = 0$, $c_1(r, \Omega(\omega)) = 0$ обозначены на фиг. 3, соответственно, цифрами 3, 4.

2. Поскольку полярные координаты при $\rho = 0$ вырождаются, для исследования устойчивости решения r_0 воспользуемся декартовыми координатами ξ, η центра масс ротора (точки O) в системе координат $O_1\xi\eta$ и координатами x, y в системе O_1xy.

2.1. При отсутствии сил трения ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$) данная механическая система имеет интеграл энергии V_{1j} ($j = 1, 2$) и интеграл площадей V_2 относительно точки O_1:

$$V_{11} = 1/2m\,(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \Pi\,[(\xi^2 + \eta^2)^{1/2}] = \mathrm{const} \tag{5.4}$$

$$V_{12} = 1/2m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - L_0\,[(x^2 + y^2)^{1/2}] = \mathrm{const}$$

$$V_2 = m\,(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = m\,[x\dot{y} - y\dot{x} + \omega\,(x^2 + y^2)] = mp = \mathrm{const}$$

Устойчивость режима r_0 относительно ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ для любого ω при сделанных предположениях относительно силы F показана в [8, 9, 16, 17].

Исследуем устойчивость режима r_0 относительно $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ и ρ, $\dot{\rho}$. Если при $\rho = 0$ имеем $F' = c \geq 0$, то при выполнении неравенства

$$\omega < \omega_0 = c^{1/2} \tag{5.5}$$

функция V_{12} является определенно-положительной по $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, а режим r_0 при отсутствии сил трения устойчив относительно $x, y, \dot{x}, \dot{y}$.

Для перманентного вращения r_0 согласно (5.4) имеем $V_2 = mp_0 = 0$, а для прецессий $r_4, r_5 - V_2 = mp \neq 0$.

При $\omega > \omega_0$ функция V_{12} может принимать отрицательные значения, однако функция

$$V_*\,(\rho, \dot{\rho}) = V_{12} + \omega V_2 = 1/2\dot{\rho}^2 + \Pi\,(\rho) + 1/2mp^2/\rho^2 = 1/2\dot{\rho}^2 + W$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$, определенно-положительна по ρ, $\dot{\rho}$ для любых ω как при данной величине интеграла $p = p_0 = 0$, так и при всяких достаточно близких величинах $p = \delta p_0 \neq 0$. Поскольку $\dot{V}_* = 0$, а значение r_0 является непрерывной функцией величины p, то согласно теореме Рауса с дополнением Ляпунова режим r_0 устойчив относительно ρ, $\dot{\rho}$ для любых ω при всяких возмущениях.

2.2. Случай действия только силы внешнего трения $\mathbf{F}_1$ ($k_1 \neq 0$, $k_2 = k_3 = 0$) рассмотрен в § 10.3 [17].

2.3. В случае действия силы внутреннего трения $\mathbf{F}_2$ ($k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, $k_3 = 0$) переменная θ является псевдоциклической.

Поскольку силы внутреннего трения $\mathbf{F}_2$ являются производными от определенно-отрицательной формы $2f_2 = -mk_2\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ и в силу уравнений возмущенного движения $\dot{V}_{12} = 2f_2$, то выводы об устойчивости и неустойчивости режима r_0 относительно $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ следуют из утверждений, приведенных в [4].

2.4. В случае действия силы трения $\mathbf{F}_3$ ($k_1 = k_2 = 0$, $k_3 \neq 0$) переменная θ является циклической, поскольку интеграл площадей V_2 сохраняется. В силу уравнений возмущенного движения имеем $\dot{V}_{11} = 2f_3$, где $2f_3 = -mk_3\,(\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta})^2/(\xi^2 + \eta^2)$. На множестве $f_3 = 0$, которое суть $\xi^2 + \eta^2 = r^2 = \mathrm{const}$, уравнения возмущенного движения ротора принимают вид

$$(F/r - \Omega^2)\,\xi = 0, \quad (F/r - \Omega^2)\,\eta = 0 \tag{5.6}$$

Поэтому, если значение $p_0 = 0$ не возмущается, то уравнения (5.6) имеют единственное решение $\xi = \eta = 0$, множество $f_3 = 0$ не содержит других решений уравнений возмущенного движения ротора кроме тривиального r_0 и по теореме Барбашина — Красовского режим r_0 под действием силы $\mathbf{F}_3$ асимптотически устойчив относительно ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ при любых ω.

Если же значение p_0 возмущается, то $V_2 = m\,(p_0 + \delta p_0) = m\delta p_0 \neq 0$, уравнения (5.6) и множество $f_3 = 0$ кроме решения $\xi = \eta = 0$ имеют также решение r_4 или r_5, соответствующее значению δp_0 и обращающее в нуль первые сомножители в (5.6). При этом устойчивость режима r_0 относительно ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ сохраняется, т. к. $\dot{V}_{11} \leq 0$, а всякий достаточно близкий к нему возмущенный режим стремится асимптотически по ρ, $\dot{\rho}$, $\dot{\theta}$ к стационарному движению r_4 или r_5, соответствующему минимуму функции W при условии $V_2 = m\delta p_0$.

В § 10.3 [17] без анализа множества $f_3 = 0$ отмечается устойчивость режимов r_0 относительно ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ под действием силы трения F_3.

2.5. Выводы об устойчивости режима r_0 относительно ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, полученные в *п. 2.4*, сохраняются при $\omega < \omega_0$ и относительно переменных x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, поскольку функция V_{12} при $\omega < \omega_0$ определенно-положительна по x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, а ее производная $\dot{V}_{12} = 2f_3(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ и уравнения возмущенного движения ротора на множестве $f_3 = 0$ имеют тот же вид, что и в переменных ξ, η.

При $\omega > \omega_0$, как уже отмечалось выше, функция V_{12} может принимать отрицательные значения, однако функция V_* определенно положительна по ρ, $\dot{\rho}$ для любых ω. Поскольку $\dot{V}_* = -mk_3\dot{\rho}^2$, а значение r_0 является непрерывной функцией величины p, то режим r_0 асимптотически устойчив относительно ρ, $\dot{\rho}$ для любых ω, если значение $p_0 = 0$ не возмущается. Если же значение p_0 возмущается, режим r_0 остается устойчивым относительно ρ, $\dot{\rho}$, а всякий достаточно близкий к нему возмущенный режим стремится асимптотически по ρ, $\dot{\rho}$, $\dot{\theta}$ к стационарному движению r_5, соответствующему минимуму функции W при $p = \delta p_0$. Аналогичные выводы можно сделать, используя функцию V_{**}, определенно-положительную по ρ, $\dot{\rho}$:

$$V_{**}(\rho, \dot{\rho}) = V_{11} - 1/2mp^2/\rho^2 + 1/2mp^2/\rho^2 = 1/2\dot{\rho}^2 + W$$

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

2.6. В случае совместного действия силы внешнего трения F_1 и диссипативной силы F_3 ($k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, $k_3 \neq 0$) множество G_0 содержит только режимы вращений r_0. На множестве $2f_{13}(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) = 2f_1 + 2f_3 = 0$ уравнения возмущенного движения не имеют других решений кроме r_0, а вне этого множества $\dot{V}_{11} = 2f_{13} < 0$. Поэтому по теореме Барбашина — Красовского решение r_0 асимптотически устойчиво относительно ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ для любых ω.

2.7. Если при $\xi = \eta = x = y = 0$ вторые производные от Π по ξ, η и x, y таковы, что

$$\partial^2\Pi/\partial x_1^2 = \partial^2\Pi/\partial x_2^2 = c, \quad \partial^2\Pi/\partial x_1\partial x_2 = 0 \tag{5.7}$$

где вместо x_1, x_2 нужно подставить ξ, η или x, y, то при $k_3 = 0$ можно записать уравнения первого приближения в переменных ξ, η или x, y. Эти уравнения в переменных x, y имеют вид уравнений (4.1), если в последних положить $c_1 = c_2 = c - \omega^2$ и заменить знаки у гироскопических и неконсервативных позиционных сил на противоположные. Уравнения в переменных ξ, η имеют вид уравнений (4.1), если в них положить $c_1 = c_2 = c$, убрать гироскопические силы, а у неконсервативных позиционных сил заменить k_1 на k_2.

Из анализа уравнений первого приближения в переменных x, y и ξ, η следует, что условиями асимптотической устойчивости перманентных вращений r_0 уравновешенного ротора относительно x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ и ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ в случае действия сил трения F_1 и F_2 для упругих сил F, удовлетворяющих условиям (5.7), являются неравенства (4.2).

Заметим, что условия (5.7) для функции $\Pi(\rho)$ удовлетворяются, если упругие силы имеют вид

$$F = c\rho + c_p\rho^p + \ldots + c_q\rho^q + \ldots \tag{5.8}$$

где $q > p \geq 3$, а c, c_p, c_q — постоянные.

6. Динамические реакции на подшипники. При $e \neq 0$, $e \to 0$ режимы синхронных прецессий r_1, r_2, r_3, сохраняя свойства устойчивости и неустойчивости, стремятся к «предельным» (при $e = 0$) режимам: $r_1 \to r_0$ и r_4, а $r_2 \to r_3 \to r_0$.

Сила внутреннего трения $\mathbf{F}_2$ и диссипативная сила $\mathbf{F}_3$ в случае отсутствия сил внешнего трения одинаково влияют на устойчивость синхронных прецессий r_1 неуравновешенного ротора — условия их асимптотической устойчивости (неустойчивости) под действием этих сил совпадают. Кроме того, в случае действия этих сил асимптотически устойчивым режимам синхронных прецессий r_1 неуравновешенного ротора соответствуют (при $e \to 0$) асимптотически устойчивые режимы синхронных прецессий r_4 уравновешенного ротора. Поэтому значения динамических реакций на подшипники со стороны ротора, совершающего движение в виде синхронной прецессии r_1, при $e \to 0$, т. е. после его тщательной балансировки, стремятся к величине $N_4 = mF(r_4) = mr_4\omega^2$. Для $F = dr^{3/2}$ эта величина найдена в [3, 17]: $N_4 = m\omega^6/d^2$.

В § 10.5 [17] модель сил трения $\mathbf{F}_3$ использовалась для объяснения явления разрушения подшипников хорошо отбалансированных роторов. Из приведенного выше анализа следует, что этот эффект может быть объяснен аналогичным образом с помощью модели сил внутреннего трения $\mathbf{F}_2$.

На асинхронных прецессиях r_6 реакции на подшипники ротора равны величине $N_6 = mF(r_6) = mr_6\Omega^2$, которая для силы $F = dr^{3/2}$ суть $N_6 = \beta^6 N_4$, где $\beta = k_2/(k_1 + k_2)$. Если $k_1 \simeq k_2$, то $N_6 \simeq N_4$ и динамические реакции на режимах r_4, r_6 весьма велики даже при не очень высоких ω. Если $k_1 >> k_2$, то $N_6 << N_4$.

Автор благодарит В. А. Самсонова за ценные замечания и обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Диментберг Ф. М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 347 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости равномерных вращений механических систем//Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 6. С. 113—121.
3. *Меркин Д. Р.* Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора, установленного в нелинейных подшипниках//ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 378—384.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости установившихся движений систем с квазициклическими координатами//ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 918—927.
5. *Агафонов С. А.* Об устойчивости установившихся движений вращающегося вала//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 61—65.
6. *Жестков И. Г., Самсонов В. А.* О влиянии внешнего трения на движение ротора на гибком валу//Некоторые задачи динамики управляемых тел. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 82—91.
7. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.;— Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
8. *Ишлинский А. Ю.* Механика относительного движения и силы инерции. М.: Наука, 1981. 191 с.
9. *Журавлев В. Ф.* Об устойчивости стационарных движений плоского тела в поле центральной силы//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 71—76.
10. *Агафонов С. А., Слынько Л. Е.* Об устойчивости стационарного движения плоского твердого тела под действием центральной силы//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 25—29.
11. *Клоков А. С., Самсонов В. А.* Стабилизируемость вращения ротора, эксцентрично закрепленного на гибком валу//Науч. тр. Моск. энерг. инст-та. 1985. № 77. С. 38—42.
12. *Каленова В. И., Морозов В. М., Салмина М. А.* Управляемость и наблюдаемость в задаче стабилизации механических систем с циклическими координатами//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 959—967.
13. *Martynenko Yu. G.* The Electrostatic Gyroscope Motion in the Nonuniform Gravitational Field//1 st Intern. Symposium on inertial technology in Beijing (BISIT). BEIJING, CHINA, 1989. P. 231—236.
14. *Позняк Э. Л.* Влияние сопротивления на устойчивость вращающихся валов//Проблемы прочности в машиностроении. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Вып. 1. С. 3—24.

15. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
16. *Жбанов Ю. К.* Об устойчивости вращающегося вала//Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. С. 157—161.
17. *Кельзон А. С., Циманский Ю. П., Яковлев В. И.* Динамика роторов в упругих опорах. М.: Наука, 1982. 280 с.
18. *Самсонов В. А.* О квазистационарных движениях механических систем//Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 32—35.
19. *Самсонов В. А.* К теории движения ротора на гибком валу//Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. Новосибирск, Наука, 1979. С. 162—166.
20. *Рубановский В. Н., Самсонов В. А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988, 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.II.1994