МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1995

УДК 531.39

 В. Н. ПИЛИПЧУК

ОБ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Введенные в [1] понятия особых направлений в пространстве конфигураций линейных колебательных систем, в частности, главные направления вынужденных колебаний (ВНВК) анализируются с позиций нелинейной теории.

1. Рассмотрим случай свободной колебательной системы с n степенями свободы, описываемой уравнением

$$M\ddot{\mathrm{x}} + B\mathrm{x} + \varepsilon f(\mathrm{x}) = 0, \quad \mathrm{x} \in R^n \tag{1.1}$$

где M, B — постоянные, симметрические положительно определенные $n \times n$-матрицы; $f(\mathrm{x})$ — аналитическая в окрестности нуля вектор-функция, зависящая от координат вектора-столбца x и удовлетворяющая условию $f(-\mathrm{x}) = -f(\mathrm{x})$; точка над x означает дифференцирование по времени t; $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр (предполагается, что масштабные преобразования координат, продиктованные физическим содержанием задачи уже выполнены).

При $\varepsilon = 0$ имеем линейную систему. К ее особым направлениям в пространстве конфигураций относятся, в частности, главные направления собственных колебаний. На соответствующих прямых лежат траектории двухпараметрических семейств решений линейной системы. Еще А. М. Ляпуновым показано, что наличие слабо нелинейных возмущений ($\varepsilon \neq 0$) приводит, вообще говоря, к искривлению траекторий каждого из решений этих семейств [2]. Более того, нельзя ожидать, что все траектории одного семейства будут частью одной и той же линии. Следовательно, главные направления собственных колебаний линейных систем при наличии нелинейного возмущения в общем случае «расщепляются» на семейство искривленных траекторий, именуемых главными траекториями. Такое название для случая свободных колебаний нелинейных систем (не обязательно квазилинейных) используется в [3]. Для завершения схемы изложения и дальнейших сопоставлений воспроизведем вначале алгоритм построения решений А. М. Ляпунова, прибегнув при этом к терминологии теории квазилинейных задач на собственные значения [4]. Термин «собственное значение» трактуется далее расширительно, т. е. специальная форма присутствия соответствующего параметра в уравнении не предполагается, а что именно понимается под собственным значением, поясняется контекстом.

Разыскивается однопараметрическое (не считая сдвига во времени) 2π-периодическое по новому временному параметру $\tau = \omega t$ решение системы (1.1), которое при $\varepsilon \to 0$ вырождается в решение линейной системы, соответствующее одному из ее главных направлений.

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$L\mathrm{x} + \varepsilon f(\mathrm{x}) = 0, \quad L \equiv \omega^2 M d^2/d\tau^2 + B \tag{1.2}$$

где L — оператор, действующий на пространстве вектор-функций $\{\mathrm{x}(\tau)\}$. Ввиду симметрии будем рассматривать уравнение (1.2) на полупериоде, приняв следующие краевые условия

$$d\mathrm{x}/d\tau|_{\tau=0} = d\mathrm{x}/d\tau|_{\tau=\pi} = 0 \tag{1.3}$$

Скалярное произведение при этом определим выражением

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{x}^T\mathrm{y}\, d\tau, \quad \mathrm{x} = \mathrm{x}(\tau), \quad \mathrm{y} = \mathrm{y}(\tau)$$

где $\mathrm{x}^T\mathrm{y}$ — скалярное произведение в R^n.

Решение задачи на собственные значения (1.2), (1.3) будем искать в виде рядов по степеням параметра ε:

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}^0 + \varepsilon\mathrm{x}^1 + \varepsilon^2\mathrm{x}^2 + \ldots \tag{1.4}$$

$$\omega^2 = \lambda/(1 + \gamma_1\varepsilon + \gamma_2\varepsilon^2 + \ldots) \tag{1.5}$$

где $\mathrm{x}^0(\tau)$, $\mathrm{x}^1(\tau), \ldots$ и $\lambda, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — подлежащие определению функции и постоянные величины.

Подставляя (1.4), (1.5) в (1.2), (1.3) и разделяя порядки по ε, получим последовательность уравнений

$$\varepsilon^0\!: \ L_0\mathrm{x}^0 = 0; \qquad \varepsilon^1\!: \ L_0\mathrm{x}^1 = -\gamma_1 B\mathrm{x}^0 - f(\mathrm{x}^0), \ldots$$

и краевых условий

$$d\mathrm{x}^i/d\tau|_{\tau=0} = d\mathrm{x}^i/d\tau|_{\tau=\pi} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots,) \tag{1.6}$$

$$L_0 = L|_{\varepsilon=0} \equiv \lambda M d^2/d\tau^2 + B$$

Не останавливаясь на стандартной технике решения полученной последовательности задач, приведем результат в первом порядке по ε:

$$\mathrm{x} = A\mathrm{e}_\alpha + \varepsilon\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{f^A_{\beta\alpha}\mathrm{e}_\beta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} + \ldots \tag{1.7}$$

$$\omega^2 = \lambda_\alpha\Big/\left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_\alpha A} f^A_{\alpha\alpha} + \ldots\right), \quad (f^A_{\beta\alpha} = \langle \mathrm{e}_\beta, f(A\mathrm{e}_\alpha)\rangle) \tag{1.8}$$

Здесь A — произвольный параметр; λ_α и $\mathrm{e}_\alpha = \mathrm{q}_s \cos j\tau$ — собственное значение и соответствующая вектор-функция, определяемая в исходном (линейном) приложении из уравнений

$$\det(B - \lambda_\alpha j^2 M) = 0 \tag{1.9}$$

$$(B - \lambda_\alpha j^2 M)\,\mathrm{q}_s = 0 \tag{1.10}$$

где $\alpha = (s, j)$, $\beta = (r, i)$ — векторы с целочисленными координатами (волновыми числами), характеризующими интенсивность волнообразования формы колебаний в физическом пространстве ($s, r = 1, \ldots, n$) и во времени τ ($j, i = 1, 2, \ldots$); принято следующее условие нормировки

$$\langle \mathrm{e}_\alpha, B\mathrm{e}_\beta\rangle = \begin{cases}\lambda_\alpha, & \beta = \alpha\\ 0, & \beta \neq \alpha\end{cases} \tag{1.11}$$

Анализ схемы алгоритма и структуры полученных выражений показывает, что все члены разложений (1.4), (1.5) могут быть однозначно определены, если каждой собственной функции линейной задачи соответствует только одно собственное значение (условие отсутствия вырождения):

$$\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta \ \text{ при } \ \alpha \neq \beta \tag{1.12}$$

Тогда в силу теоремы А. Пуанкаре построенные описанным выше способом ряды будут сходиться при достаточно малом ε и давать решение поставленной задачи.

Заметим, что выбор временно́го волнового числа j не влияет на окончательный вид решения (после возврата к переменной t), а условие невырожденности (1.12) приводит к тем же ограничениям на спектр собственных частот линеаризованной системы, что и условие А. М. Ляпунова. В самом деле, из (1.9) следует $\lambda_\alpha \equiv \lambda_{(s,\,i)} = \omega_s^2/i^2$, где через ω_s обозначена s-я собственная частота. Поэтому (1.12) дает систему неравенств $\omega_r/\omega_s \neq i/j$, где номер i принимает значения $j, 3j, 5j, \ldots$, соответствующие ненулевым слагаемым в (1.7). Таким образом, имеем упомянутое условие А. М. Ляпунова для рассматриваемого случая нечетной функции f (x):

$$\omega_r/\omega_s \neq 1, 3, 5, \ldots \quad (r \neq s) \tag{1.13}$$

Отметим существенную для дальнейшего особенность описанной схемы. А именно, обычный для квазилинейной теории колебаний этап разложения возмущения в ряд Фурье по временно́й переменной здесь естественным образом содержится в процедуре проектирования возмущения на элементы собственного пространственно-временного базиса линеаризованной задачи (см. выше выражение для $f^A_{\beta\alpha}$).

2. Рассмотрим систему под действием внешней периодической нагрузки. Пусть уравнение колебаний имеет вид

$$M\ddot{\mathrm{x}} + B\mathrm{x} + \varepsilon f(\mathrm{x}) = \mathrm{p}(\omega t), \quad \mathrm{x} \in R^n \tag{2.1}$$

где функция нагрузки имеет период 2π по аргументу ωt и удовлетворяет следующему условию симметрии: $\mathrm{p}(\omega t + \pi) = -\mathrm{p}(\omega t)$. Главной траекторией вынужденных колебаний будем называть такую траекторию, на которой вектор ускорения и вектор внешней силы коллинеарны, а отношение их величин постоянно во времени

$$\mathrm{p}(\omega t) = -(\mu/\omega^2)\,\ddot{\mathrm{x}}(t) \tag{2.2}$$

Здесь μ — подлежащий определению скалярный множитель; смысл введения дополнительного множителя ω^{-2} ясен из дальнейшего изложения.

Обсудим соотношение (2.2). В случае линейной системы такое определение соответствует введенному в [1] понятию ГНВК. Так, полагая в (2.2) $\mathrm{p}(\omega t) = \mathrm{P}e^{i\omega t}$, $\mathrm{x}(t) = \mathrm{q}e^{i\omega t}$ ($R^n \ni \mathrm{P}$, $\mathrm{q} = \mathrm{const}$), имеем $\mathrm{P} = \mu\mathrm{q}$, что и соответствует [1]. Вместе с тем, в выражении (2.2), допускается не только гармоническая зависимость во времени. Заметим, что возможны и другие варианты определений, допускающих переход к линейному случаю. Аналогичным образом можно было бы связать вектор нагрузки с вектором координат в любой момент времени $\mathrm{p}(\omega t) = \mu\mathrm{x}(t)$. Далее, однако, показано, что вариант (2.2) обеспечивает возможность разделения переменных во всем классе однородных систем (см. п. 3), а не только в линейном случае. Кроме этого, выражение (2.2) позволяет провести аналогию с ньютоновой частицей, если множитель $-\mu\omega^{-2}$ отождествить с массой частицы. А именно, возможна следующая формулировка задачи: требуется найти траектории, на которых векторы внешней силы и ускорение системы связаны уравнением Ньютона в R^n (2.2). Как показано в [1] для линейных систем, величина μ монотонно убывает с ростом ω^2, при этом в дорезонансной области $\mu > 0$, в зарезонансной — $\mu < 0$, а при $\mu = 0$ имеет место резонанс. Таким образом, эффективная масса $-\mu\omega^{-2}$ положительна в зарезонансной области, где преобладают инерционные свойства системы (квазидинамика). В случае гармонического осциллятора, например, эффективная масса равна $-\mu\omega^{-2} = 1 - (\omega_0/\omega)^2$, где ω_0 — собственная частота осциллятора.

Приступим к построению главных траекторий вынужденных колебаний. Подставляя (2.2) в (2.1) придем к следующей задаче на собственные значения при краевых условиях (1.3):

$$Lx + \varepsilon f(x) = -\mu x''(\tau), \quad \tau = \omega t \tag{2.3}$$

где в выражении для оператора L параметр частоты ω известен и соответствует частоте внешней нагрузки, а искомым собственным значением является параметр μ. Представим его в виде разложения по степеням ε:

$$\mu = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \ldots \tag{2.4}$$

Соответственно, разыскивая решение $x(\tau)$ в виде разложения (1.4), после разделения в (2.3) порядков по ε придем к последовательности задач (при краевых условиях (1.6)):

$$\varepsilon^0:\ L_0x^0 = 0; \quad \varepsilon^1:\ L_0x^1 = -\mu_1 x^{0''} - f(x^0) \tag{2.5}$$

$$\varepsilon^2:\ L_0x^2 = -\mu_2 x^{0''} - \mu_1 x^{1''} - f_x'(x^0)\,x^1, \ldots$$

$$L_0 \equiv (\mu_0 E + \omega^2 M)\, d^2/d\tau^2 + B$$

где $f_x'(x^0)$ — матрица частных производных, вычисленных при $x = x^0$.

Выполнив стандартную процедуру [4], с точностью до членов порядка ε^2 включительно находим

$$\mu = \lambda_\alpha + \varepsilon \frac{f_{\alpha\alpha}^A}{Ar_\alpha} + \frac{\varepsilon^2}{Ar_\alpha} \sum_{\beta\neq\alpha} a_\beta^1 \langle e_\alpha, f_x'(Ae_\alpha)\, e_\beta\rangle + \ldots \tag{2.6}$$

$$x = Ae_\alpha + \varepsilon \sum_{\beta\neq\alpha} a_\beta^1 e_\beta + \varepsilon^2 \sum_{\beta\neq a} a_\beta^2 e_\beta + \ldots, \quad f_{\beta\alpha}^A = \langle e_\beta, f(Ae_\alpha)\rangle, \quad r_\alpha = \langle e_\alpha', e_\alpha'\rangle$$

$$a_\beta^1 = \frac{f_{\beta\alpha}^A}{r_\beta(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}, \quad a_\beta^2 = -\frac{f_{\alpha\alpha}^A}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}\frac{a_\beta^1}{Ar_\alpha} + \sum_{\gamma\neq\alpha} a_\gamma^1 \frac{\langle e_\beta, f_x'(Ae_\alpha)\, e_\gamma\rangle}{r_\beta(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}$$

Здесь γ — двумерный вектор с целочисленными координатами; λ_α и $e_\alpha = q_s \cos j\tau$ — собственное значение и соответствующая вектор-функция, определяемые в исходном приближении из уравнений

$$\det(B - \omega^2 j^2 M - \lambda_\alpha j^2 E) = 0 \tag{2.7}$$

$$(B - \omega^2 j^2 M - \lambda_\alpha j^2 E)\, q_s = 0 \tag{2.8}$$

$$\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \begin{cases} 1, & \beta = \alpha \\ 0, & \beta\neq\alpha \end{cases} \tag{2.9}$$

Анализ выражений (2.6) показывает, что все члены разложений могуть быть однозначно определены при условии отсутствия вырождения: $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ (если $\alpha \neq \beta$). Данное условие имеет такой же вид, как и (1.12). Однако, здесь собственные значения, а следовательно — возможность вырождения, зависят не только от свойств самой системы, но и от заданной частоты внешнего воздействия. В подтверждение сказанного рассмотрим пример.

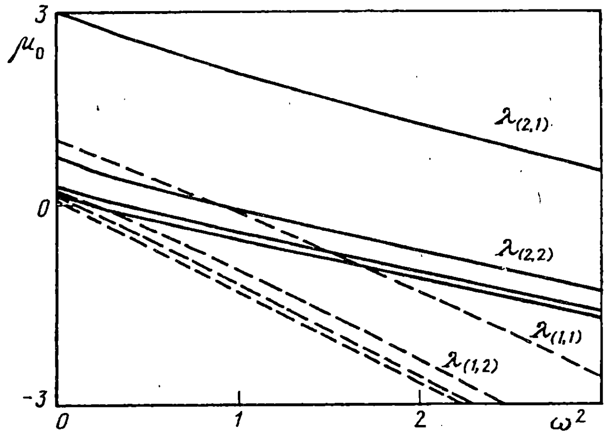
Пример 1. Рассмотрим цепочку из двух масс, с линейно-упругими связями. Пусть уравнения движения имеют вид

$$(1 - \rho)\,\ddot{u}_1 + 2u_1 - u_2 + 2\varepsilon f(u_1, u_2) = g_1(t)$$

$$(1 + \rho)\,\ddot{u}_2 + 2u_2 - u_1 + 2\varepsilon f(u_2, u_1) = g_2(t) \tag{2.10}$$

$$f(u_1, u_2) \equiv u_1^3 + \gamma(u_1 - u_2)^3$$

где u_1, u_2 — смещения масс, отсчитываемые от их равновесного положения;



Фиг. 1

$0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр; ρ — параметр, характеризующий различие масс; g_1, g_2 — функции внешней нагрузки.

Введем переменные, диктуемые симметрией поля упругих сил: $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(u_1 + u_2)$, $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(u_1 - u_2)$, $p_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(g_1 + g_2)$, $p_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(g_1 - g_2)$. Тогда фигурирующие в векторном уравнении (2.1) матрицы будут иметь вид

$$\mathrm{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{p} = \begin{Vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Vmatrix}, \quad f(\mathrm{x}) = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} x_1 (x_1^2 + 3x_2^2) \\ x_1 (3x_1^2 + cx_2^2) \end{Vmatrix}$$

$$c = 1 + 8\gamma, \quad M = \begin{Vmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

В линейном приближении находим собственные значения и векторы

$$\lambda_\alpha = [2 + (-1)^s (1 + \rho^2\omega^4 j^4)^{1/2}]\, j^{-2} - \omega^2 \quad (s = 1, 2; j = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathrm{e}_{(1,j)} = \sqrt{2} \begin{Vmatrix} \cos\theta_j \\ -\sin\theta_j \end{Vmatrix} \cos(j\tau), \quad \mathrm{e}_{(2,j)} = \sqrt{2} \begin{Vmatrix} \sin\theta_j \\ \cos\theta_j \end{Vmatrix} \cos(j\tau)$$

$$\operatorname{tg}\theta_j = \frac{(1 + \rho^2\omega^4 j^4)^{1/2} - 1}{\rho\omega^2 j^2}$$

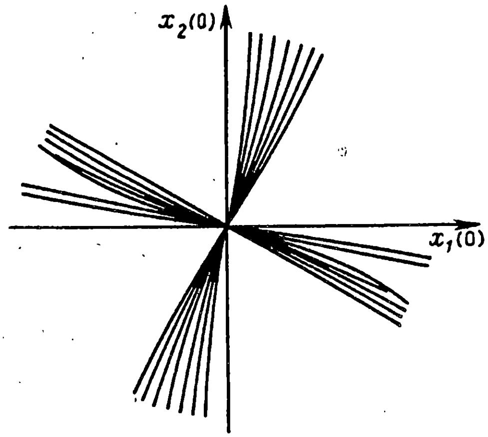
На фиг. 1 показано семейство кривых $\mu_0 = \lambda_\alpha(\omega^2)$ при $\alpha = (2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$ (сплошные линии) и $\alpha = (1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$ (штриховые линии).

При фиксированной координате s вектора $\alpha = (s, j)$ линия с меньшей координатой j располагается выше. Наличие точек пересечения свидетельствует о возможности нарушения условия невырожденности при некоторых значениях внешней частоты ω.

В первом асимптотическом приближении из (2.6) имеем:

$$\mu = \lambda_\alpha + \varepsilon A^2 f^1_{\alpha\alpha} j^{-2}, \quad \mathrm{x} = A\mathrm{e}_\alpha + \varepsilon A^3 \sum_\beta \frac{f^1_{\beta\alpha}}{i^2(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}\, \mathrm{e}_\beta$$

Если в качестве базовой выбрана собственная функция с номером $\alpha = (2,1)$, то суммирование ведется по отличным от α номерам $\beta = (1,1)$, $(1,3)$, $(2,3)$, при которых величины $f^1_{\beta\alpha}$ не равны нулю. На плоскости амплитуд $x_1(0)$, $x_2(0)$ этому случаю соответствуют слегка искривленные линии, проходящие через первую и третью координатные четверти (см. фиг. 2). Вычисления выполнены при следующих значениях параметров: $\varepsilon = 0{,}2$; $\rho = 0{,}4$; $c = 1{,}5$; $\omega = 0{,}9$; $1{,}1$;



Фиг. 2

1,3; 1,5; 1,7. С ростом значения ω линия выпрямляется и поворачивается по часовой стрелке. В исходных переменных это отвечает постепенному переходу к квазидинамическим режимам с возбуждением в основном первой из частиц, с меньшей массой. Регулярный (веерообразный) характер данного семейтсва линий связан с тем, что для выбранного базового α условие отсутствия вырождения выполняется во всем диапазоне значений ω (на фиг. 1 кривая $\lambda_{(2,1)}(\omega^2)$ располагается выше всех других и не имеет с ними точек пересечения). Отметим, что качественно иначе эволюционируют в плоскости амплитуд второе семейство линий при базовом $\lambda_{(1,1)}$, когда на рассматриваемом интервале значений ω имеются точки вырождения. Однако, за точками вырождения, при достаточно больших ω, эволюция второго семейства также приобретает регулярный характер сгущения около биссектрисы второй и четвертой координатных четвертей — квазидинамических режимов с возбуждением в основном второй частицы (имеющей большую массу).

3. Рассмотрим специальный случай сильно нелинейных, однородных систем. Уравнение вынужденных колебаний по действием периодической внешней нагрузки представим в виде

$$M\ddot{\mathrm{x}} + f(\mathrm{x}) = \mathrm{p}\ (t),\ \ f(\mathrm{x}) = \operatorname{grad} \Pi(\mathrm{x}) \tag{3.1}$$

где $\Pi(\mathrm{x})$ — однородная (с четным показателем однородности $m + 1$) форма координат, так что для любой скалярной величины c имеет место равенство

$$f(c\mathrm{x}) = c^m f(\mathrm{x}) \tag{3.2}$$

При $m = 1$ система линейна, при других m имеем сильно нелинейный случай в том смысле, что поле упругих сил вообще не содержит линейной составляющей.

В линейном случае разделение переменных достигается, по-существу, тем, что функция внешней нагрузки и искомое решение предполагаются пропорциональными порожденной также линейной системой гармонической функции времени $\cos(\omega t)$. Проведем подобное согласование внешнего воздействия и системы в нелинейном случае ($m \neq 1$). Положим

$$\mathrm{x}(t) = \alpha(t)\,\mathrm{q},\ \ R^n \ni \mathrm{q} = \mathrm{const} \tag{3.3}$$

и в соответствии с определением (2.2)

$$\mathrm{p}(t) = -\mu\omega^{-2}\ddot{\alpha}(t)\,\mathrm{q} \tag{3.4}$$

где $\alpha(t)$ — периодическая функция, определенная как решение задачи Коши для однородного осциллятора с тем же показателем однородности, что и рассматриваемая система:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha^m = 0, \quad \alpha(0) = 1, \quad \dot{\alpha}(0) = 0 \tag{3.5}$$

Варьируемый параметр ω в (3.4) и (3.5) с точностью до зависящего от m множителя задает частоту основного тона внешнего воздействия.

Подставляя (3.3), (3.4) в (3.1), в силу (3.5) получаем

$$-\omega^2 M\mathrm{q} + f(\mathrm{q}) = \mu\mathrm{q} \tag{3.6}$$

Требуется найти вектор q, а также связь между величинами μ, ω и параметрами вектора q. Заметим, что уравнение (3.6) инвариантно относительно следующего изменения масштабов: $\mathrm{q} \to c\mathrm{q}$, $\omega^2 \to c^{m-1}\omega^2$, $\mu \to c^{m-1}\mu$ (c — скаляр). Отсюда следует, что система допускает главные траектории вынужденных колебаний в виде прямых в пространстве конфигураций (см. далее пример 2). Для случая свободных колебаний аналогичный факт установлен Р. М. Розенбергом (см. [5]).

Пример 2. Вернемся к рассмотренному выше примеру, считая, что в характеристиках связей линейные слагаемые отсутствуют. Примем для определенности $\varepsilon = 1$ и перепишем систему (3.6) в развернутом виде

$$\omega^2(-q_1 + \rho q_2) + q_1(q_1^2 + 3q_2^2) = \mu q_1$$

$$\omega^2(-q_2 + \rho q_1) + q_2(3q_1^2 + cq_2^2) = \mu q_2 \tag{3.7}$$

Для нахождения главных направлений вынужденных колебаний полагаем (ввиду прямолинейности траекторий здесь используется термин «направление») $q_2 = kq_1$. Тогда условие совместности системы (3.7) приводит к уравнению для углового коэффициента k:

$$k - (1 - 4\gamma)k^3 = \tfrac{1}{2}\nu(ck^4 - 1), \quad \nu = \rho\Big/\left(1 + \frac{\mu}{\omega^2}\right) \tag{3.8}$$

Такую же форму имеет уравнение совместности в случае свободных колебаний; роль внешнего воздействия сводится к появлению коэффициента $(1 + \mu/\omega^2)^{-1}$ при параметре асимметрии масс ρ. Если массы одинаковы по величине ($\rho = 0$), то главные направления свободных и вынужденных колебаний, как и в линейном случае, совпадают. Уравнение (3.8) может иметь четыре вещественных корня, а система — четыре главных направления вынужденных колебаний. Поскольку у линеаризованной системы таких направлений два, то это означает, что с ростом амплитуды колебаний (и степени влияния нелинейных членов) возможны эффекты «ветвления» семейства главных траекторий вынужденных колебаний (известно, что в случае свободных колебаний подобные эффекты имеют место [5]).

В следующих двух пунктах описаны итерационные аналитические процедуры для построения главных траекторий свободных (п. 4) и вынужденных (п. 5) колебаний нелинейных систем (не обязательно квазилинейных или однородных). Базовой моделью этих процедур служит простейшая колебательная система в виде свободной материальной точки между двумя жесткими ограничителями. Первый этап включает введение новой временной переменной, зависящей от исходного времени по закону пилообразного синуса [5—7]. Существенная особенность предлагаемых процедур в том, что упомянутые выше (нелокальные) эффекты ветвления семейств траекторий могут быть обнаружены уже в первом приближении. С другой стороны, однако, такое расширение возможностей, по сравнению с квазилинейным подходом (п.п. 1, 2), приводит к значительному усложнению проблемы полного обоснования процедур. В связи с этим в данной работе ограничимся лишь некоторыми замечаниями полукачественного характера.

4. Пусть уравнение движения системы имеет вид

$$M\ddot{\mathrm{x}} + f(\mathrm{x}) = 0, \quad \mathrm{x} \in R^n \tag{4.1}$$

Вектор — функция $f(\mathrm{x})$ предполагается вещественно аналитической и нечетной ($f(-\mathrm{x}) = -f(\mathrm{x})$).

Будем искать однопараметрические (не считая сдвига во времени) семейства периодических решений, симметричных относительно четверти периода $t = a$, т. е. удовлетворяющих соотношению $\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(2a - t)$ при любом t (период колебаний $4a$ в данном случае заранее не известен).

Принимая во внимание свойства симметрии системы, представим искомое решение в виде [7]:

$$\mathrm{x} = \mathrm{X}(\tau), \quad \tau = \tau\left(\frac{t}{a}\right), \quad \tau(\xi) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)\right) \tag{4.2}$$

где $\tau(\xi)$ — пилообразный синус с единичной амплитудой и периодом, равным четырем (такая нормировка периода более удобна для ниже следующих преобразований).

Подставляя (4.2) в (4.1) исключая появляющийся при дифференцировании периодический сингулярный член, придем к следующей краевой задаче

$$M\mathrm{X}'' = -hf(\mathrm{X}), \quad \mathrm{X}'|_{\tau=1} = 0, \quad \mathrm{X}(-\tau) = -\mathrm{X}(\tau) \tag{4.3}$$

Будем искать решение задачи в виде рядов последовательных приближений

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}^0 + \mathrm{X}^1 + \mathrm{X}^2 + \ldots$$

$$a^2 = h = h_0(1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots) \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.3), получим последовательность уравнений

$$M\mathrm{X}^{0\prime\prime} = 0, \quad M\mathrm{X}^{1\prime\prime} = -h_0 f(\mathrm{X}^0) \tag{4.5}$$

$$M\mathrm{X}^{2\prime\prime} = -h_0\,[\gamma_1 f(\mathrm{X}^0) + f_x'(\mathrm{X}^0)\,\mathrm{X}^1], \ldots$$

и краевых условий

$$(\mathrm{X}^{0\prime} + \mathrm{X}^{1\prime})|_{\tau=1} = 0, \quad \mathrm{X}^{2\prime}|_{\tau=1} = 0, \ldots \tag{4.6}$$

В исходном приближении имеем

$$\mathrm{X}^0 = \mathrm{A}^0\tau \tag{4.7}$$

где A^0 — произвольный постоянный вектор, направление которого будет определено на следующем шаге. Тогда, интегрируя второе из последовательности уравнений, получаем

$$\mathrm{X}^1 = \mathrm{A}^1\tau - h_0 M^{-1}\int_0^\tau (\tau - \xi)\, f(\mathrm{A}^0\xi)\, d\xi \tag{4.8}$$

где $\mathrm{A}^1 = \mathrm{const}$ — произвольный n-мерный вектор.

Заметим, что слагаемое $\mathrm{A}^1\tau$ в (4.8) имеет такую же структуру, как исходное приближение, поэтому без дополнительных условий первая же поправка в решении приводит, вообще говоря, к изменению как длины так и направления векторного множителя при первой степени τ: $(\mathrm{A}^0 + \mathrm{A}^1)\,\tau$.

Однако, с точки зрения алгоритма факт корректировки на первом же шаге исходного приближения, по-существу, свидетельствует о том, что выбор последнего не совсем удачен. В связи с этим примем вектор A^1 равным нулю. Так, подставляя (4.7), (4.8) в первое из последовательности условий (4.6), получим векторное уравнение

$$h_0\int_0^1 f(\mathrm{A}^0\xi)\, d\xi = M\mathrm{A}^0 \tag{4.9}$$

и, умножая его скалярно на A^{0T}, соотношение

$$h_0 = A^{0T}MA^0 \Big/ \int_0^1 A^{0T}f(A^0\xi)\,d\xi \tag{4.10}$$

Первое (векторное) уравнение представляет собой нелинейную задачу на собственный вектор, второе определяет связь длины вектора с параметром h_0.

Заметим, что все приближения определяются из (4.5) повторным интегрированием. Решение для X^2 содержит слагаемое вида $A^2\tau$, где постоянный вектор A^2 определяется из краевого условия для X^2 при $\tau = 1$. При этом член разложения γ_1 выбирается так, чтобы выполнялось условие

$$A^{0T}MA^2 = 0 \tag{4.11}$$

Последнее условие приводит к выражению

$$\gamma_1 = -A^{0T} \int_0^1 f_x'(A^0\xi)\,X^1\,d\xi \Big/ \int_0^1 A^{0T}f(A^0\xi)\,d\xi \tag{4.12}$$

Аналогичным образом могуть быть однозначно определены и все высшие приближения.

Предположим, что задача (4.9) имеет решение и, тем самым, исходное приближение построено. Свойства сходимости рядов существенно зависят от характера действия соответствующего (4.3) интегрального оператора Ф:

$$X = \Phi(X)$$

$$\Phi(X) \equiv hM^{-1}\left[\tau\int_\tau^1 f[X(\xi)]\,d\xi + \int_0^\tau \xi f[X(\xi)]\,d\xi\right]$$

$$h = h_0\int_0^1 A^{0T}f(A^0\tau)\,d\tau \Big/ \int_0^1 A^{0T}f(X)\,d\tau$$

Необходимое условие состоит в сжимаемости линеаризованного около X^0 оператора, что может быть выражено неравенством:

$$\|\Phi_x'(X^0)\,\delta X\| / \|\delta X\| < 1 \tag{4.13}$$

где норма введена следующим образом: $\|X\| = \max\limits_{\tau} \|X\|_{R^n}$, где δX — функции из рассматриваемой окрестности ($\|\delta X\| \ll \|X^0\|$).

Например, для линеаризованной системы условие (4.13) приводит к системе неравенств $\omega_i/\omega_j < 1$ при всех $i \neq j$, где ω_j — собственная частота, соответствующая базовой траектории.

5. Для главных траекторий вынужденных колебаний уравнение будет иметь вид

$$M\ddot{x} + f(x) = -\mu\omega^{-2}\ddot{x}(t), \quad x \in R^n \tag{5.1}$$

где параметр μ имеет такой же смысл, как и в (2.1).

После введения осциллирующего временного параметра будем иметь следующую задачу

$$(M + \mu hE)\,X'' = -hf(X), \quad h = \omega^{-2} \tag{5.2}$$

$$X'|_{\tau=1} = 0, \quad X(-\tau) = -X(\tau)$$

где параметр h в отличие от п. 4 известен заранее, а определению подлежит величина μ. Разыскивая эту величину в форме ряда последовательных приближений

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots \tag{5.3}$$

придем аналогично п. 4 к следующей цепочке краевых задач:

$$(M + \mu_0 hE)\, X^{0\prime\prime} = 0, \quad (M + \mu_0 hE)\, X^{1\prime\prime} = -h\, [\mu_1 X^{0\prime\prime} + f(X^0)]$$

$$(M + \mu_0 hE)\, X^{2\prime\prime} = -h\, [\mu_1 X^{1\prime\prime} + \mu_2 X^{0\prime\prime} + f_x'(X^0)\, X^1], \ldots \tag{5.4}$$

при краевых условиях (4.6).

Сохранив последовательность рассуждений п. 4, получим

$$X^0 = A^0 \tau$$

$$X^1 = -h\, (M + \mu_0 hE)^{-1} \int_0^\tau (\tau - \xi)\, f(A^0 \xi)\, d\xi, \ldots \tag{5.5}$$

где вектор A^0 и величина μ_0 связаны уравнениями

$$(M + \mu_0 hE)\, A^0 = h \int_0^1 f(A^0 \xi)\, d\xi \tag{5.6}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{A^{0T} A^0} \left(\int_0^1 A^{0T} f(A^0 \xi)\, d\xi - h^{-1} A^{0T} M A^0 \right) \tag{5.7}$$

На следующем шаге находим

$$(M + \mu_0 hE)(X^2 - A^2 \tau) = -h \left(\mu_1 X^1 + \int_0^\tau (\tau - \xi)\, f_x'(A^0 \xi)\, X^1(\xi)\, d\xi \right)$$

где A^2 — произвольный постоянный вектор.

Из краевого условия для X^2 следует

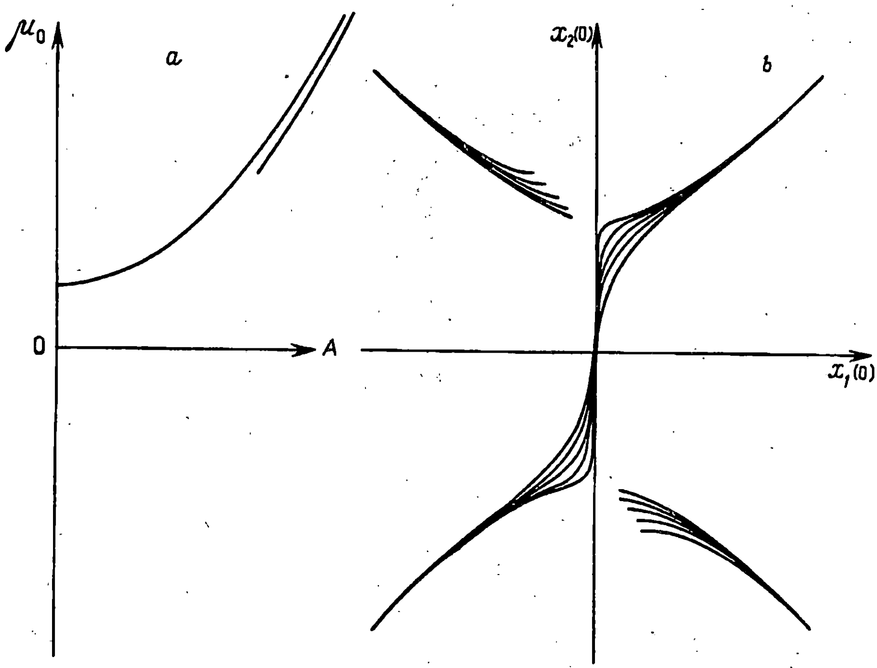
$$(M + \mu_0 hE)\, A^2 + \mu_1 h A^0 = h \int_0^1 f_x'(A^0 \xi)\, X^1(\xi)\, d\xi$$

Принимая для вектора A^2 условие $A^{0T}(M + \mu_0 hE)\, A^2 = 0$, получаем

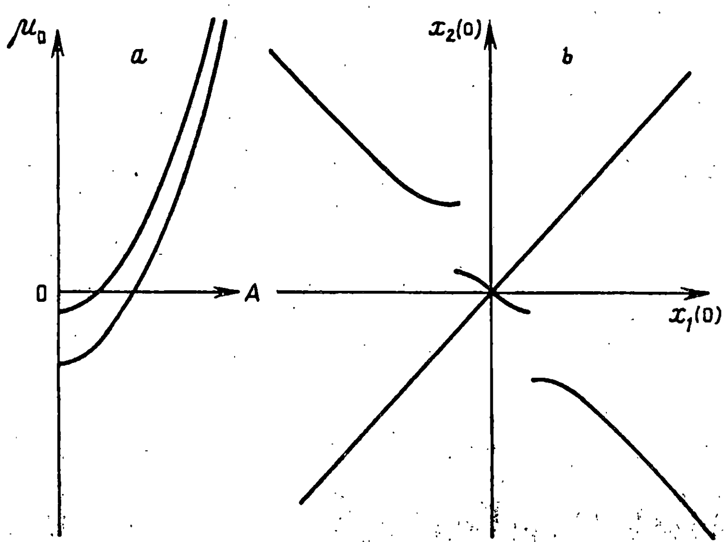
$$\mu_1 = \frac{1}{A^{0T} A^0} \int_0^1 A^{0T} f_x'(A^0 \tau)\, X^1(\tau)\, d\tau \tag{5.8}$$

На фиг. 3, 4 приведены результаты численного анализа алгебраической задачи (5.6), (5.7) для двухмассовой системы (пример 1). Вычисления выполнены при следующих значениях параметров: $\varepsilon = 1$; $\rho = 0{,}4$; $c = 1 + 8\gamma = 1{,}5$; $\omega = 0{,}2$; $0{,}4; \ldots 1{,}0$ (фиг. 3) и $\omega = 3{,}2$ (фиг. 4). На фиг. 3, *a* показана зависимость μ_0 $(A = (x_1^2(0) + x_2^2(0))^{1/2})$ только для $\omega = 1{,}0$. Параметр связи γ находится в диапазоне значений, при которых соответствующая система без линейных членов в поле упругих сил (однородная система третьей степени) имеет четыре главных траектории вынужденных колебаний. Это и приводит к характерному ветвлению решений в плоскости амплитуд (см. пример 2). На рисунках показаны только устойчивые относительно вычислительной процедуры ветви. Увеличение частоты внешнего воздействия приводит к эффективному возрастанию асимметрии масс и характерной эволюции бифуркационной картины. Обратим внимание на эффект локализации [8], т. е. возбуждения, в основном, одной из частиц. Соответствующие точки в плоскости амплитуд располагаются около биссектрис координатных углов. В низкочастотном диапазоне внешнего воздействия локализация наблюдается в сильно нелинейной области больших амплитуд (фиг. 3, *b*, «ответвившиеся» решения). Однако, в высокочастотном диапазоне аналогичный эффект имеет место и в квазилинейной области (фиг. 4, *b*).

Таким образом, главные траектории вынужденных колебаний нелинейных сиистем обладают рядом качественных особенностей, присущих главным траекториям собственных колебаний. Так, соответствующие особые направления линеаризованных систем в общем случае «расщепляются» на семейства



Фиг. 3



Фиг. 4

искривленных траекторий; для однородных систем траектории обоих типов прямолинейны. Возможны эффекты ветвления и нелинейной локализации колебаний.

В связи с нарушением принципа суперпозиции эффекты локализации для нелинейных систем играют особую роль и позволяют в определенном смысле сохранить трактовку главных траекторий как базовых [8].

Автор благодарен В. Ф. Журавлеву за полезное обсуждение постановки задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф.* Об особых направлениях в пространстве конфигураций линейных колебательных систем//ПММ. 1992. Т. 56. № 1. С. 16—23.
2. *Малкин И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Л.— М.: Гостехиздат, 1949. 244 с.
3. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
4. *Коллатц Л.* Задачи на собственные занчения. М.: Наука, 1968. 503 с.
5. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
6. *Пилипчук В. Н.* К расчету сильно нелинейных систем, близких к виброударным//ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 744—751.
7. *Пилипчук В. Н.* Построение периодических решений в сильно нелинейных системах//Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 1. С. 28—31.
8. *Маневич Л. И., Пилипчук В. Н.* Локализация колебаний в линейных и нелинейных цепочках//Успехи механики. 1990. Т. 13. Вып. 3/4. С. 107—134.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
17.IV.1993