

УДК 531.383

© 1995 г. В. Н. ВАСИЛЬЕВ

УПРАВЛЕНИЕ КРАТНОЙ МИНИМАЛЬНО ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМОЙ ГИРОДИНОВ

Рассматривается гиросиловая система (ГСС) ориентации космического аппарата, в состав которой входят две ортогонально расположенные группы двухстепенных силовых гироскопов — гиросилов [1]. Каждая типовая группа объединяет по два одинаковых гиросилов с параллельными осями прецессии и может создавать управляющие моменты относительно двух осей космического аппарата [2]. В кратных ГСС [3] возникает задача о распределении функций управления между отдельными группами [4] или задача о выборе критерия самонастройки [5]. В [6] предложен алгоритм управления гиросиловыми, основанный на разложении программного вектора кинетического момента ГСС на два одинаковых вектора, каждый из которых реализуется отдельной группой. Анализ показывает, что принцип равномодульного управления неосуществим во всей области S изменения вектора кинетического момента ГСС [6]. Этому недостатку позволяют избежать критерии настройки, оптимизирующие размеры области W изменения вектора управляющего момента ГСС. В статье предлагается алгоритм управления гиросиловыми, обеспечивающий настройку на максимум площади области W типовой группы. Алгоритм реализуется во всей области S .

1. Предположим, что оси прецессии первой группы гиросилов параллельны оси Oz , а оси второй группы параллельны оси Oy связанной системы координат $Oxyz$. Положение векторов кинетических моментов гиросилов G_i ($i = 1 - 4$) в связанной системе координат определяется углами прецессии β_i , которые отсчитываются от оси Ox , или единичными векторами $g_1 = G_1/G = (x_1, y_1, 0) = (\cos \beta_1, \sin \beta_1, 0)$, $g_2 = G_2/G = (x_2, y_2, 0) = (\cos \beta_2, \sin \beta_2, 0)$, $g_3 = G_3/G = (x_3, 0, z_3) = (\cos \beta_3, 0, \sin \beta_3)$, $g_4 = G_4/G = (x_4, 0, z_4) = (\cos \beta_4, 0, \sin \beta_4)$, где G — кинетический момент одного гиросилов. Положительному направлению отсчета углов прецессии соответствует вращение векторов g_1, g_2 в сторону оси Oy , а векторов g_3, g_4 в сторону оси Oz . Схема установки гиросилов на космическом аппарате изображена на фиг. 1.

Вектор кинетического момента первой группы $H_{12} = Gg_{12}$, $g_{12} = g_1 + g_2$, перемещается в координатной плоскости Oxy , вектор кинетического момента второй группы $H_{34} = Gg_{34}$, $g_{34} = g_3 + g_4$ перемещается в плоскости Oxz . Проекции вектора кинетического момента ГСС $H = Gg$, $g = g_{12} + g_{34}$ на оси $Oxyz$ равны

$$H_x = Gx, \quad x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad H_y = Gy, \quad y = y_1 + y_2; \quad H_z = Gz, \quad z = z_3 + z_4 \quad (1.1)$$

где $g = (x, y, z)$ — вектор кинетического момента ГСС в относительных единицах.

Поверхность области S изменения вектора g описывается системой уравнений [1, 7]:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2[(4 - y^2)(4 - z^2)]^{1/2} - 8 = 0, \quad x^2 + y^2 \geq 4, \quad x^2 + z^2 \geq 4$$

$$|y| - 2 = 0, \quad x^2 + z^2 \leq 4, \quad |z| - 2 = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

Проекция вектора управляющего момента системы гироскопов, установленной на неподвижном основании, $M = Gm$, $m = -dg/dt$ можно получить дифференцированием равенств (1.1)

$$M_x = G\dot{x}, \quad \dot{x} = y_1\dot{\beta}_2 + y_2\dot{\beta}_2 + z_3\dot{\beta}_3 + z_4\dot{\beta}_4$$

$$M_y = G\dot{y}, \quad \dot{y} = -x_1\dot{\beta}_1 - x_2\dot{\beta}_2$$

$$M_z = G\dot{z}, \quad \dot{z} = -x_3\dot{\beta}_3 - x_4\dot{\beta}_4$$

Задача управления гиродинамики заключается в нахождении скоростей прецессии $\lambda_i = \dot{\beta}_i$, обеспечивающих реализацию требуемого вектора управления космическим аппаратом. Искомые скорости прецессии λ_i должны удовлетворять избыточной системе уравнений [1]:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4 = m_1, \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = -m_2, \quad \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = -m_3 \quad (1.2)$$

где $m = (m_1, m_2, m_3)$ — вектор управления, отнесенный к кинетическому моменту гироскопа.

Система уравнений (1.2), дополненная уравнением настройки, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - \lambda_3 z_3 - \lambda_4 z_4 = m_4$ распадается на две подсистемы

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = m_{12}, \quad \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4 = m_{34}, \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = -m_2, \quad \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = -m_3$$

$$m_{12} = (m_1 + m_4)/2, \quad m_{34} = (m_1 - m_4)/2 \quad (1.3)$$

где m_4 — подлежащая определению функция управления.

Компоненты вектора управления m_{12} и m_2 реализуются первой группой гироскопов, компоненты m_{34} и m_3 реализуются второй группой. Область W_1 изменения вектора управляющего момента первой группы площадью $F_1 = 4G^2\lambda^2 |g_1 \times g_2|$, где λ — максимальная скорость прецессии, расположена в плоскости Oxy , имеет форму ромба, подобного ромбу, построенному на векторах g_1 и g_2 , и повернутого относительно последнего на угол $\pi/2$ [8, 9]. Аналогично, область W_2 второй группы площадью $F_2 = 4G^2\lambda^2 |g_3 \times g_4|$ расположена в плоскости Oxz и имеет форму ромба, подобного ромбу, построенному на векторах g_3 и g_4 .

Возможности самонастройки минимально избыточной ГСС весьма ограничены и сводятся к распределению кинетического ГСС по оси Ox между двумя группами. Пусть x_{12}^* и x_{34}^* — оптимальные значения кинетических моментов первой и второй групп по оси Ox , а $\Delta = x_{12}^* - x_{34}^*$ — оптимальная разность. Если вектор кинетического момента ГСС $g = (x, y, z)$ задан и оптимальная разность известна, то из равенств (1.1) получим систему уравнений для определения углового положения векторов g_i :

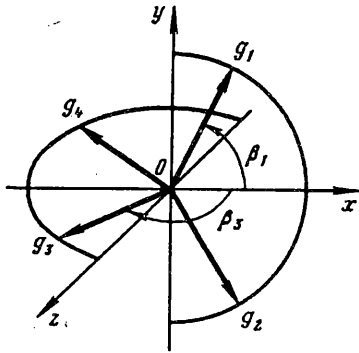
$$x_1 + x_2 = x_{12}^*, \quad x_3 + x_4 = x_{34}^*$$

$$y_1 + y_2 = y, \quad z_3 + z_4 = z$$

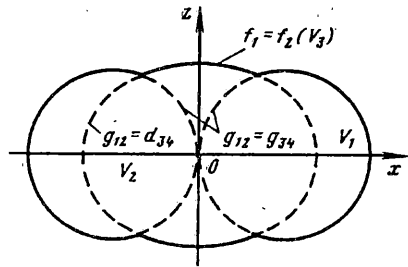
$$x_{12}^* = (x + \Delta)/2, \quad x_{34}^* = (x - \Delta)/2$$

Отсюда будем иметь

$$\cos \beta_{1,2} = \frac{1}{2} x_{12}^* \pm y \left[\frac{1}{(x_{12}^*)^2 + y^2} - \frac{1}{4} \right]^{1/2}, \quad \cos \beta_{3,4} = \frac{1}{2} x_{34}^* \pm z \left[\frac{1}{(x_{34}^*)^2 + z^2} - \frac{1}{4} \right]^{1/2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Рассмотрим задачу нахождения оптимальной разности $\Delta = \Delta(x, y, z)$ из условия $\min_{\Delta} \{F_1, F_2\} = \max$. Оно равносильно условию

$$\min_{\Delta} \{f_1, f_2\} = \max \quad (2.1)$$

где $f_1 = |g_1 \times g_2|$, $f_2 = |g_3 \times g_4|$ — площади ромбов, построенных на векторах g_1, g_2 и g_3, g_4 , численно равные определителям двух систем уравнений (1.3).

В частном случае условие (2.1) совпадает с условием $f_1(x, y, \Delta) = f_2(x, z, \Delta)$ или

$$|g_{12} \cdot d_{12}| = |g_{34} \cdot d_{34}|, \quad d_{12} = g_1 - g_2, \quad d_{34} = g_3 - g_4 \quad (2.2)$$

где d_{12}, d_{34} — диагонали ромбов, построенных на векторах g_1, g_2 и g_3, g_4 . Подставляя в (2.2) соотношения $g_{12}^2 = x_{12}^2 + y^2$, $g_{34}^2 = x_{34}^2 + z^2$, $d_{12}^2 = 1 - g_{12}^2/4$, $d_{34}^2 = 1 - g_{34}^2/4$, $x_{12} = (x + \Delta)/2$, $x_{34} = (x - \Delta)/2$, получим уравнение, которому удовлетворяет оптимальная разность

$$x\Delta^3 + (y^2 - z^2)\Delta^2 + x(x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 8)\Delta + (y^2 - z^2)(x^2 - 8) + 2(y^4 - z^4) = 0 \quad (2.3)$$

В качестве оптимальной разности выбирается один из трех корней уравнения (2.3), обеспечивающий максимальные площади ромбов f_1 и f_2 . Решения уравнения (2.3) можно найти, если воспользоваться вытекающими из (2.2) равенствами

$$g_{12} = g_{34} \quad (2.4)$$

или

$$g_{12} = d_{34} \quad (2.5)$$

Искомая разность

$$\Delta = (z^2 - y^2)/x \quad (2.6)$$

найденная из равенства (2.4), реализует принцип равномодульного управления. Подставляя (2.6) в соотношения

$$g_{12} = [(x + \Delta)^2/4 + y^2]^{1/2} \leq 2, \quad g_{34} = [(x - \Delta)^2/4 + z^2]^{1/2} \leq 2$$

получим неравенства $(x^2 + z^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 \leq 16x^2$, $(x^2 + y^2 - z^2)^2 + 4x^2z^2 \leq 16x^2$, определяющие область V_1 допустимости равномодульного управления [6].

Обозначим через \bar{V}_1 область, в которой принцип равномодульного управления не выполняется. В частности, принцип равномодульного управления не позволяет найти оптимальную разность при нулевом кинетическом моменте ГСС.

Другие корни уравнения (2.3) находятся из условия (2.5):

$$\Delta = \pm [8 - x^2 - 2y^2 - 2z^2]^{1/2} \quad (2.7)$$

Для определенности полагаем, что в исходном состоянии при нулевом кинетическом моменте ГСС $\Delta = 2\sqrt{2}$, при этом $x_{12} > 0$, $x_{34} < 0$, векторы g_1 , g_2 и g_{12} расположены справа от плоскости Oyz , а векторы g_3 , g_4 и g_{34} слева от этой плоскости (фиг. 1).

Равенство (2.7) сохраняет смысл, пока подкоренное выражение остается положительным. Следовательно, равенство (2.5) и оптимальная разность (2.7) могут быть реализованы внутри области V_2 , ограниченной поверхностью эллипсоида

$$(x/2\sqrt{2})^2 + (y/2)^2 + (z/2)^2 = 1 \quad (2.8)$$

Равенство площадей ромбов (2.2) выполнимо внутри области $V_3 = V_1 \cup V_2$. Сечение области V_3 координатной плоскостью Oxz изображено на фиг. 2.

Обозначим через $V_{12} = V_1 \cap V_2$ — пересечение областей V_1 и V_2 , а через $V_4 = V_2 \cap \bar{V}_1$ — пересечение областей V_2 и \bar{V}_1 . В области V_{12} могут быть выполнены как равенство (2.4), так и равенство (2.5). Величины, полученные из равенства (2.4), будем обозначать одним штрихом, а найденные из равенства (2.5) двумя штрихами. Из двух разностей Δ' (2.6) и Δ'' (2.7) в качестве оптимальной следует выбрать ту, которая обеспечит большую площадь ромбов, построенных на векторах g_i .

3. Исследуем движение вектора g кинетического момента ГСС из некоторой исходной точки, расположенной в координатной плоскости Oyz , до границы области S . Полагаем, что конец вектора g перемещается по прямой, параллельной оси Ox ($x > 0$), при этом переменные y, z рассматриваются как параметры. Исходная точка расположена в области $V_4 \in V_2$, если ее координаты удовлетворяют условию $y^2 + z^2 \leq 4$. Предположим вначале, что это условие выполнено и $|y| < |z| < \sqrt{2}$. По мере нарастания x вектор g переходит из области V_4 , где выполняется условие (2.5), в область V_{12} . В этой области площади f_1'' , f_2'' , найденные из равенства (2.5), как функции x возрастают, достигают максимума $f_{1\max}'' = f_{2\max}'' = 1$ при $x = (2 - y^2)^{1/2} - (2 - z^2)^{1/2}$, затем убывают и достигают минимума $f_{1\min}'' = f_{2\min}'' = |z| (4 - z^2)^{1/2} / 2$ при $x_{34}'' = 0$. Площади f_1' , f_2' , найденные из равенства (2.4), как функции x возрастают и достигают максимума при $x = (2 - y^2)^{1/2} + (2 - z^2)^{1/2}$. Величина x , начиная с которой реализуется равенство (2.4), определяется условием $f_2'' = f_2'$, что эквивалентно $g_{34}'' = g_{34}'$ или $x_{34}'' = -x_{34}'$. Отсюда

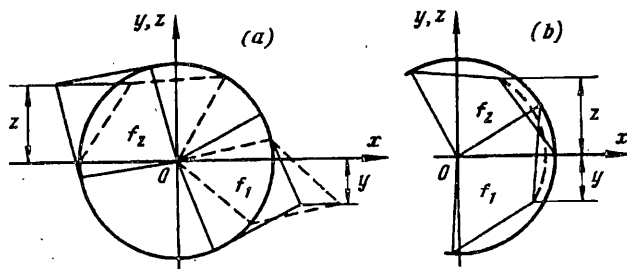
$$x = (\Delta' - \Delta'')/2 \quad (3.1)$$

Подставляя в (3.1) соотношения для Δ' (2.6) и Δ'' (2.7), найдем координату точки перехода от равенства (2.5) к равенству (2.4):

$$x_n^2 = [4 + z^2 - 3y^2 + [(4 + z^2 - 3y^2)^2 - 5(y^2 - z^2)^2]^{1/2}] / 5 \quad (3.2)$$

Переход осуществляется раньше, чем площадь f_2'' достигнет своего минимума. Дальнейшее движение до границы области S осуществляется за счет равномодульного управления при оптимальной разности (2.6).

Взаимное положение ромбов, построенных на векторах g_i , удобно изображать на одной плоскости, условно совместив координатные плоскости Oxy и Oxz . Исходное положение ромбов при $x = 0$ и $|z| > |y|$ изображено на фиг. 3, *a*. Положение ромбов в точке перехода (3.2) от оптимальной разности (2.7) к оптимальной разности (2.6) показано на фиг. 3, *a* штриховой линией. Положение ромбов после перехода к равномодульному управлению изображено на фиг. 3, *b*.



Фиг. 3

Исследуем область параметров $|z| \geq \sqrt{2} > |y|$. С увеличением x векторы g_{12} и g_{34} поворачиваются в сторону оси Ox , площадь f_2'' возрастает и достигает максимума $f_{2\max}'' = |z|(4 - z^2)^{1/2}/2$ при $x = \Delta$ ($x_{34}'' = 0$). Дальнейшее выполнение равенства (2.5) возможно лишь за счет встречного движения векторов, что приводит к вырождению ромбов и уменьшению площадей f_1, f_2 до нуля. Поэтому в точке $x = \Delta$ целесообразно перейти к условию (2.1). Подставляя в равенство $x = \Delta$ соотношение (2.7), получим условие такого перехода

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 4 \quad (3.3)$$

После точки перехода увеличение вектора g осуществляется только за счет вектора g_{12} . Вектор g_{34} остается неподвижным и площадь f_2 сохраняет максимальное значение. Площадь f_1 увеличивается, достигает максимума $f_{1\max} = 1$ при $x = x_{12} = (2 - y^2)^{1/2}$, затем уменьшается. На этом участке реализуется оптимальная разность $\Delta = x$. При выполнении условия

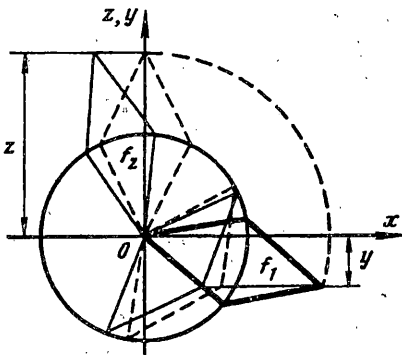
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (3.4)$$

площадь f_1 уменьшится до f_2 . Затем до границы области S осуществляется равномодульное управление.

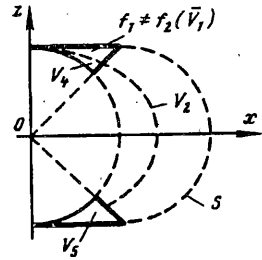
Положение ромбов в характерных точках изображено на фиг. 4. Положение ромбов в исходном состоянии изображено сплошной линией, положение при переходе к оптимальной разности $\Delta = x$ — штриховой линией, положение первого ромба при переходе к равномодульному управлению — линией двойной толщины.

Таким образом, внутри области V_2 существует область \bar{V}_2 , в которой критерий оптимальности (2.1) обеспечивает большую площадь ромбов, чем критерий (2.2). Область \bar{V}_2 расположена внутри конуса (3.4) между поверхностями эллипсоида (2.8) и сферы (3.3).

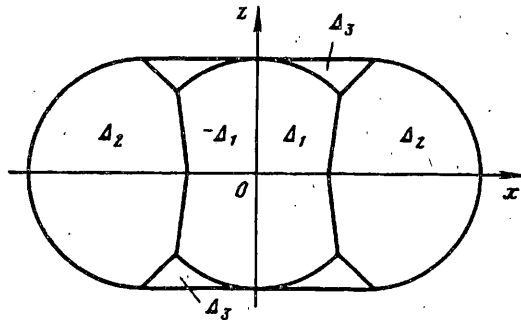
Если $y^2 + z^2 > 4$, то исходная точка из области V_3 перемещается в область \bar{V}_3 , в которой равенство площадей ромбов не выполнимо. В исходном состоянии векторы g_{12} и g_{34} вытянуты вдоль осей Oy и Oz . Когда $|z| > |y|$, то $f_1 > f_2$. Начальное движение вектора g осуществляется только за счет изменения одного вектора g_{12} , а вектор g_{34} остается неподвижным. При выполнении условия (3.4) площади ромбов становятся равными, траектория кинетического момента из области \bar{V}_3 переходит в область V_1 , и далее до границы области S осуществляется равномодульное управление. В диапазоне $0 < x < (z^2 - y^2)^{1/2}$ оптимальная разность реализуется в виде $\Delta = x$. Область \bar{V}_3 расположена внутри конуса (3.4) между поверхностями области S и эллипсоида (2.8).



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Оптимальная разность $\Delta = x$ реализуется внутри области V_3 , образуемой за счет суммирования областей \bar{V}_2 и \bar{V}_3 . Сечение области V_3 координатной плоскостью Oxz для $x > 0$ изображено на фиг. 5.

Обобщим полученные результаты. При $x > 0$ и $|z| > |y|$ оптимальная разность может принимать три значения: $\Delta_1 = (8 - x^2 - 2y^2 - 2z^2)^{1/2}$, если выполняется одно из двух условий $x < x_n$ и $|z| < \sqrt{2}$ или $x^2 + y^2 + z^2 < 4$ и $|z| \geq \sqrt{2}$; $\Delta_2 = |z^2 - y^2|/x$, если выполняется одно из двух условий $x \geq x_n$ и $|z| < \sqrt{2}$ или $x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$ и $|z| \geq \sqrt{2}$; $\Delta_3 = x$, если одновременно выполняются условия $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4$, $x^2 + y^2 - z^2 < 0$ и $|z| \geq \sqrt{2}$.

4. Исследуем движение векторов g_{12} и g_{34} при $x < 0$. В отличие от предыдущего случая движение вектора кинетического момента ГСС вдоль отрицательного направления оси Ox вызывает уменьшение площадей ромбов, построенных на векторах g_i . Чтобы этого не происходило, целесообразно изменить исходное положение векторов, т. е. вектор g_{12} расположить слева от координатной плоскости Oyz , а вектор g_{34} справа. Для определения оптимальных разностей можно воспользоваться результатами, полученными выше. В расчетной формуле (3.2) следует поменять местами параметры y и z , а в качестве оптимальной разности для исходного состояния использовать корень (2.7) уравнения (2.3) со знаком минус. Новые формулы справедливы и для случая $|y| > |z|$ и $x > 0$.

Таким образом, область S разделяется на ряд областей, внутри которых реализуется одна из оптимальных разностей. Сечение области S координатной плоскостью Oxz при $|z| > |y|$ изображено на фиг. 6. В этом сечении можно различить 8 зон. Оптимальные разности, реализуемые в каждой зоне указаны значками.

Иногда может оказаться нежелательной перестройка ГСС при малых компонентах вектора кинетического момента x, y, z ($|y| > |z|, x > 0$). Тогда замена оптимальной разности при $x = 0$, обязательная для строгого выполнения критерия оптимальности (2.1), не производится. Переход к равномодульному управлению осуществляется при $x \geq x_n$. В диапазоне $0 < x < x_n$ обеспечивается равенство площадей ромбов без их максимизации. Такой переход возможен до тех пор, пока подкоренное выражение в формуле (3.2) остается положительным. Отсюда получим ограничение на величину компоненты y : $y^2 < 0,76 + 0,62z^2$. Временный отказ от строгого выполнения критерия оптимальности (2.1) позволяет осуществить различные варианты управления, учитывающие дополнительные требования к ГСС. Однако обсуждение этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

Область W ГСС, состоящей из двух типовых групп гиродинов, представляет собой 12-гранник (в частном случае ромбододекаэдр), гранями которого являются ромбы с длиной сторон $2G\lambda$ [8]. Обозначим через $r_i = dg_i/dt$ — единичные векторы, определяющие линии действия векторов управляющих моментов гиродинов. Объем Q области W численно равен суммарному объему двух параллелепипедов, построенных на векторах $r_1, r_2, r_3 - r_4$ и $r_3, r_4, r_1 - r_2$:

$$Q = 8G^3\lambda^3 (|r_1 - r_2| (r_3 \times r_4)| + |(r_3 - r_4) (r_1 \times r_2)|)$$

Оптимизация площадей ромбов f_1 и f_2 позволяет поддерживать объем области W , близким к максимальному. Так, в исходном состоянии (при нулевом кинетическом моменте) объем области W , реализуемый при выполнении критерия оптимальности (2.1) составляет 0,93 от максимального объема ромбододекаэдра.

5. После выбора оптимальной разности можно определить функцию управления m_4 , входящую в уравнение настройки. Если контур самонастройки ГСС формируется по принципу пропорционального регулятора, то скорость изменения текущей разности кинетических моментов двух типовых групп $\dot{x}_{12} - \dot{x}_{34}$ пропорциональна рассогласованию между оптимальной и фактической разностями кинетических моментов $\Delta - (x_{12} - x_{34})$. Уравнение настройки ГСС запишется в виде $\tau (\dot{x}_{12} - \dot{x}_{34}) + (x_{12} - x_{34}) = \Delta$, где τ — постоянная времени. Сравнивая эту запись с уравнением настройки, дополняющим избыточную систему (1.2), получим выражение для функции управления $m_4 = -(\Delta - x_{12} + x_{34})/\tau$.

Скорости прецессии гиродинов, найденные как решения систем уравнений (1.3), содержат две составляющие. Одна из них определяет долю гиродинна в реализации вектора управления космическим аппаратом, другая составляющая участвует в настройке ГСС на заданный критерий оптимальности. Нужно соответствие между ними устанавливается подбором постоянной времени τ , которая влияет на скорость самонастройки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. Н., Вейнберг Д. М., Шереметьевский Н. Н. Управление угловым положением долговременной орбитальной станции при помощи двухстепенных силовых гироскопов//Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 3—9.
2. Васильев В. Н., Вершинина Ю. В. Обобщенные динамические характеристики типовой группы гиродинов//Тр. ВНИИ электромеханики. Т. 83. 1987. С. 83—90.
3. Токарь Е. Н., Легостаев В. П., Платонов В. Н., Седых Д. А. Кратные гиросиловые системы//Космич. исследования. 1981. Т. 19. Вып. 6. С. 813—822.
4. Васильев В. Н. Управление системой двухстепенных силовых гироскопов с параллельными осями прецессии//Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 14—20.
5. Токарь Е. Н. Критерий настройки гиросиловых систем//Космич. исследования. 1980. Т. 18. Вып. 3. С. 307—315.

6. *Карпачев Ю. А.* Равномодульное программно-частотное управление минимально избыточной структурой двухстепенных силовых гироскопов системы ориентации космического аппарата//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 3—10.
7. *Злочевский С. И., Соколов А. А., Васильев В. Н., Вейнберг Д. М.* Об одном способе построения области управляемости гиросиловой системы ориентации//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1989. № 5. С. 42—46.
8. *Васильев В. Н.* Исследование свойств системы двухстепенных силовых гироскопов//Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 3—9.
9. *Васильев В. Н., Вейнберг Д. М., Злочевский С. И.* Обобщенные характеристики гиросиловых систем управления//Космич. исследования. 1991. Т. 29. Вып. 2. С. 231—237.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1993