МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1995

УДК 534.1

© 1995 г. Л. Д. АКУЛЕНКО

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ В ОКРЕСТНОСТИ УСТОЙЧИВОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Методами теории возмущений исследуются установившиеся вращательно-колебательные движения существенно нелинейных одночастотных систем в малой окрестности экспоненциально устойчивого локального интегрального многообразия (ЛИМ). Наряду с подходом, связанным с предварительным построением периодического ЛИМ, предложен и реализован прямой метод построения и исследования возмущенных движений. Установлены конструктивные достаточные условия существования, единственности и устойчивости по Ляпунову периодических движений.

1. Исходные предположения и постановка задачи. Рассмотрим на бесконечном интервале времени $t \geq t_0$ возмущенную одночастотную систему, приведенную к стандартной форме [1—4]:

$$a^{\boldsymbol{\cdot}} = f(a, \psi, h, \varepsilon), \quad a \in D_a \subset E^n \tag{1.1}$$

$$\psi^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega(a) + F(a, \psi, h, \varepsilon), \quad \psi \in E^1$$

$$h^{\boldsymbol{\cdot}} = H(a)\, h + g(a, \psi, h, \varepsilon), \quad h \in D_h \subset E^m$$

Здесь a — квазипостоянный n-вектор со значениями из некоторой малой окрестности точки $a_0 \in D_a$; ψ — скалярная вращающаяся фаза: $\psi \geq \psi^0$, $\omega(a) \geq \omega_0 > 0$, если $a \in D_a$; m-вектор h принимает значения в малой окрестности нуля: $h = 0 \in D_h$; малый числовой параметр $\varepsilon \geq 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Предполагается, что введенные в (1.1) функции f, ω, F, H, g достаточно гладкие в рассматриваемой области изменения аргументов и 2π-периодические по ψ. Кроме того, на f, F, g налагаются дополнительные требования в виде следующих оценок:

$$|f|,\ |F| \leq C(\varepsilon + |h|), \quad |g| \leq C(\varepsilon + h^2) \tag{1.2}$$

$$C = \mathrm{const}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad a \in D_a, \quad \psi \geq \psi^0, \quad h \in D_h$$

Далее, собственные значения $\lambda_j(a)$ матрицы $H(a)$ по предположению должны иметь отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re} \lambda_j(a) \leq \sigma < 0, \quad a \in D_a \tag{1.3}$$

$$\lambda_j(a) = \operatorname{Arg} \det [H(a) - I\lambda] \quad (j = 1, \ldots, m)$$

Таким образом, при $\varepsilon = 0$ согласно (1.2) $h = 0$ является асимптотически устойчивым ЛИМ системы (1.1), т. е. в пределе $a^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$, $\psi^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega(a)$, $h = 0$ при $t \to \infty$. Это установившееся движение отвечает устойчивому семейству периодических движений некоторой невозмущенной системы [1—6]. В теоретическом и прикладном аспектах представляет значительный интерес исследование установившегося (предельного) 2π-периодического по ψ ЛИМ $h = \eta(a, \psi, \varepsilon)$, где $\eta(a, \psi, 0) \equiv 0$, при $\varepsilon > 0$ достаточно малом. Наряду с этим важен анализ задачи существования, единственности и устойчивости по Ляпунову индивидуальных стационарных периодических движений $a = a(t, \varepsilon)$, $\psi = \psi(t, \varepsilon)$, $h = h(t, \varepsilon)$. Для приложений важна разработка конструктивных подходов к построению искомых возмущенных переменных a, ψ, h и вычислению характеристических показателей соответствующей системы в вариациях [5, 6].

Отметим, что к уравнениям вида (1.1) с более слабыми по сравнению с (1.2) оценками $|f|$, $|F|$, $|g| \le C(\varepsilon + h^2)$ приводится общая автономная система $x^{\cdot} = X(x, \varepsilon)$ в предположении, что при $\varepsilon = 0$ она допускает устойчивое семейство периодических движений $x = x_0(\psi, a)$, см. [1, 2, 4, 6]. Рассматриваемые системы относятся к сложному критическому случаю. А именно, невозмущенная система в вариациях имеет $(n+1)$ нулевых характеристических показателей, которым отвечает, вообще говоря (при $\omega' \not\equiv 0$), только n периодических решений. Такие системы, а также более общие (содержащие внешнее периодическое возмущение), были предметом многих исследований. При этом применялись, как правило, асимптотические методы нелинейной механики, связанные с преобразованиями уравнений: метод ЛИМ, метод разделения движений (усреднения), метод ускоренной сходимости (типа касательных Ньютона) и др., см. [1, 2, 7—10]. Наряду с такими подходами имеется настоятельная необходимость разработки методов анализа индивидуальных траекторий, в частности определения условий существования и устойчивости возмущенных периодических движений [3—6].

Ставится задача построить и исследовать возмущенные периодические движения системы (1.1), (1.2). Для ее решения предлагается применить хорошо развитые конструктивные методы теории возмущений: метод ЛИМ [1, 2] и методы Ляпунова — Пуанкаре [5, 6].

2. Построение периодического интегрального многообразия. Возмущенное 2π-периодическое по ψ ЛИМ $h = \eta(a, \psi, \varepsilon)$ определяется как решение уравнения в частных производных [1, 2]

$$h^{\cdot} = \frac{\partial \eta}{\partial \psi}[\omega(a) + F(a, \psi, \eta, \varepsilon)] + \frac{\partial \eta}{\partial a} f(a, \psi, \eta, \varepsilon) =$$

$$= H(a)\eta + g(a, \psi, \eta, \varepsilon) \qquad (2.1)$$

$$h = \eta(a, \psi, \varepsilon) = \varepsilon\eta_1(a, \psi) + \varepsilon^2\eta_2(a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots$$

Здесь η_i, $i \ge 1$ — неизвестные периодические коэффициенты, векторная переменная a рассматривается как параметр. Эта процедура требует аналитичности системы (1.1) по h, a и непрерывности (интегрируемости) по ψ в области (1.2). Если имеет место конечная гладкость, то справедливы соответствующие представления для η (2.1) по степеням ε^i ограниченного порядка. Нарастание порядка производных по η, a вызвано наличием члена $\partial\eta/\partial a$: сглаживание на каждом шаге производится по ψ. Это обстоятельство общеизвестно для асимптотических процедур, связанных с заменами и решением уравнений в частных производных для нахождения этих замен [1, 2, 7—10].

Для коэффициентов η_i, $i \ge 1$ получаются уравнения вида

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \psi} = \Lambda(a)\eta_i + \frac{g_i(a, \psi)}{\omega(a)}, \quad \Lambda(a) \equiv \frac{H(a)}{\omega(a)} \qquad (2.2)$$

$$g_1 = (g_\varepsilon'), \quad g_2 = -\frac{\partial \eta_1}{\partial \psi}[(F_\varepsilon') + (F_h')\eta_1] +$$

$$+ \frac{\partial \eta_1}{\partial a}[(f_\varepsilon') + (f_h')\eta_1] + \frac{1}{2}(g_{\varepsilon 2}'') + \frac{1}{2}(g_{h2}'')\eta_1^2 + (g_{\varepsilon h}'')\eta_1, \ldots$$

Круглые скобки означают, что выражения в них берутся при $\varepsilon = h = 0$. Построение искомых функций $\eta_i(a, \psi)$ проводим последовательно по стандартной рекуррентной схеме, начиная с номера $i = 1$, для которого функция $g_1(a, \psi)$

известна. На основе $\eta_1(a, \psi)$ находим выражение для $g_2(a, \psi)$ и $\eta_2(a, \psi)$; и так далее. В результате получим [1, 7]:

$$\eta_i(a, \psi) = \frac{1}{\omega(a)} \int_{-\infty}^{\psi} \exp\left[\Lambda(a)(\psi - \psi_1)\right] g_i(a, \psi_1)\, d\psi_1 \tag{2.3}$$

Согласно (2.2), (1.3) $\Lambda(a)$ — устойчивая матрица для $a \in D_a$ с собственными значениями λ_j/ω. Коэффициенты $\eta_i(a, \psi)$ могут быть представлены в виде тригонометрических рядов по ψ через разложения функций $g_i(a, \psi)$. Этот прием предпочтительнее в случае многочастотных функций $g_i(a, \psi)$, когда ψ — вектор [1, 2, 7—10]. Заметим, что в случае негладкой зависимости системы (1.1) от ε разложений по ε^i согласно (2.2) можно не производить. При реализации процедуры приближенного решения уравнения (2.1) с помощью ЭВМ удобнее пользоваться рекуррентной схемой типа Пикара

$$\eta_{(i)}(a, \psi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\psi} \exp\left[\Lambda(a)(\psi - \psi_1)\right] G_i(a, \psi_1, [\eta], \varepsilon)\, d\psi_1$$

$$G_i \equiv \frac{F_{i-1}}{\omega + F_{i-1}} \Lambda \eta_{(i-1)} + \frac{1}{\omega + F_{i-1}} \left(g_{i-1} - \frac{\partial \eta_{(i-1)}}{\partial a} f_{(i-1)}\right)$$

$$f_i, F_i, g_i = f, F, g\,|_{h=\eta_{(i)}}, \quad \eta_{(1)} = \varepsilon\eta_1, \quad G_1 = g_1/\omega \tag{2.4}$$

Итак, искомое решение $h = \eta(a, \psi, \varepsilon)$ системы (2.1) может быть построено с требуемой степенью точности по ε, определяемой гладкостью системы (1.1). Основное свойство устойчивого ЛИМ заключается в «экспоненциальном притяжении» траекторий системы (1.1), см. [1, 2, 7]:

$$|h(t, \varepsilon) - \eta(a(t, \varepsilon), \psi(t, \varepsilon), \varepsilon)| \le Ce^{\sigma(t-t_0)}, \quad t \ge t_0 \tag{2.5}$$

$$C = \text{const}, \quad 0 > \sigma \ge \sigma^*, \quad \sigma^* = \max_{j,\,a} \operatorname{Re} \lambda_j(a)$$

Здесь $h(t, \varepsilon)$, $a(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ — решение уравнений (1.1), отвечающее при $t = t_0$ некоторому начальному условию из области (1.2). Заметим, что к тем же выражениям для η_i (2.3) и $\eta_{(j)}$ (2.4) приводит построение ЛИМ после перехода в (1.1) к аргументу ψ делением первого и третьего уравнений на $\psi^{\boldsymbol{\cdot}} \ge \omega^0 > 0$. Свойство притяжения траекторий в фазовом пространстве (h, a, ψ) трансформируется следующим образом:

$$|h(\psi, \varepsilon) - \eta(a(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon)| \le C \exp\left[\gamma(\psi - \psi^0)\right], \quad \psi \ge \psi^0 \tag{2.6}$$

$$C = \text{const}, \quad 0 > \gamma > \gamma^*, \quad \gamma^* = \max_{j,\,a} \operatorname{Re} \lambda_j(a)/\omega(a)$$

Изложенная процедура построения периодического ЛИМ может быть обобщена на случай векторной фазы ψ: $x = x_0(\psi, a)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_p)$, $p \ge 1$, где x_0 — устойчивое $(n + p)$-параметрическое семейство периодических движений, а внешнее воздействие зависит от времени t как периодическая или почти периодическая функция [1, 2, 7, 8]. Обычно при этом рассматривается система вида $x^{\boldsymbol{\cdot}} = X_0(x) + \varepsilon X_1(t, x)$, приводящая к зависимости от t и векторной фазы ψ функций f, F, g.

Отметим, что периодическое ЛИМ может быть построено также в случае, когда вещественные части некоторых характеристических показателей $\lambda_j(a)$ (1.3) строго отрицательны, а других — положительны для всех $a \in D_a$ [7, 8]. С этой целью уравнение для h должно быть приведено к блочно-диагональному (или блочно-треугольному) виду с соответствующими блоками для преобразованной матрицы $H(a)$.

Опишем свойства системы в окрестности построенного экспоненциально устойчивого ЛИМ. За промежуток времени $t_k - t_0 \sim k\sigma^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$ фазовые траектории системы (1.1) окажутся в ε^k-окрестности ЛИМ $h = \eta(a, \psi, \varepsilon)$. Поэтому его удобно использовать при исследовании предельного поведения индивидуальных траекторий, которые за относительно короткое время с произвольной степенью точности окажутся на многообразии (2.1). Подставляя функцию $h = \eta(a, \psi, \varepsilon)$ в первые два уравнения (1.1), получим стандартную систему с вращающейся фазой. К последней могут быть применены стандартные методы: усреднения [1, 7, 9], Ляпунова — Пуанкаре [3, 5, 6, 11—13] и др. Далее основная цель состоит в построении установившихся периодических движений системы (1.1) и исследовании их устойчивости.

3. Периодические движения возмущенной системы. Искомое периодическое решение уравнений (1.1) может быть построено при помощи метода Пуанкаре [3—6] несколькими способами, вибираемыми из соображений удобства. Один из них заключается в определении периодической траектории (a, ψ) на известном ЛИМ (2.1). Другой подход, эквивалентный первому, связан с непосредственным решением системы (1.1); возможны вариации.

3.1. Построение периодического решения на многообразии. Подставим функцию $h = \eta(a, \psi, \varepsilon)$ в первые два уравнения (1.1) (для a, ψ). Поскольку $\eta = \varepsilon\eta^*$, где η^* — равномерно ограничена по ε, то на основе (1.2) получим стандартную систему с вращающейся фазой ψ:

$$a^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon A(a, \psi, \varepsilon), \quad \psi^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega(a) + \varepsilon\Psi(a, \psi, \varepsilon)$$

$$\varepsilon A \equiv f(a, \psi, \varepsilon\eta^*, \varepsilon), \quad \varepsilon\Psi \equiv F(a, \psi, \varepsilon\eta^*, \varepsilon) \tag{3.1}$$

Системы типа (3.1) были предметом многих исследований с применением метода усреднения (разделения переменных a и ψ) и с последующим анализом уравнения для усредненной переменной a (в частности, определением стационарных точек).

Более прямой метод Ляпунова — Пуанкаре связан с непосредственным построением периодического решения системы (3.1) и исследованием его устойчивости. Для этой цели во избежание вековых членов вводится «возмущенное время» θ [4—6]:

$$a' = (1 + \nu)\, \varepsilon A(a, \psi, \varepsilon), \quad t - t_0 = (1 + \nu)(\theta - \theta_0)$$

$$\psi' = (1 + \nu)\,[\omega(a) + \varepsilon\Psi(a, \psi, \varepsilon)], \quad (') \equiv (d/d\theta) \tag{3.2}$$

Здесь $\nu = \nu(\varepsilon)$ — неизвестная, определяемая из условий периодичности, причем $\nu(0) = 0$. Заметим, что вследствие автономности системы (3.1) и условия $\omega \geq \omega^0 > 0$ можно без ограничения общности положить $\psi(\theta_0, \varepsilon) \equiv 0$ (или $\psi(\theta_0, \varepsilon) = \psi^0(\varepsilon)$, где $\psi^0(\varepsilon)$ — задана) и, кроме того, $t_0 = \theta_0 = 0$. Периодическое по θ решение $a(\theta, \varepsilon)$, $\psi(\theta, \varepsilon)$ системы (3.2) ищем в виде

$$a = a_0 + \alpha(\theta, \varepsilon), \quad \psi = \psi_0 + \varphi(\theta, \varepsilon), \quad \psi_0 = \omega(a_0)\,\theta \tag{3.3}$$

$$\alpha(\theta + \Theta, \varepsilon) \equiv \alpha(\theta, \varepsilon), \quad \varphi(\theta + \Theta, \varepsilon) \equiv \varphi(\theta, \varepsilon), \quad \Theta(a_0) = 2\pi/\omega(a_0)$$

Здесь a_0 (и период $\Theta(a_0)$) и функции α, φ — неизвестные, подлежащие определению, причем $\alpha(\theta, 0) = \varphi(\theta, 0) = 0$. Практический подход к применению общей схемы метода Пуанкаре заключается в разложении неизвестных ν, α, φ по целым или дробным степеням параметра ε и последовательным определением постоянных интегрирования из условий периодичности [4, 5, 11].

Рассмотрим простейший вариант схемы, когда разложения проводятся по целым степеням ε:

$$\nu = \varepsilon\nu_1 + \varepsilon^2\nu_2 + \ldots, \quad \alpha = \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots, \quad \varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.3), а затем в (3.2), имеем $a = a_0 = \text{const}$, $\varphi = \psi_0 = \omega(a_0)\,\theta$, где a_0 — неизвестная. Для α_1, φ_1 получим выражения

$$\alpha_1 = d_1 + \int_0^\theta A(a_0, \psi_0, 0)\,d\theta_1 \equiv d_1 + r_1(a_0, \theta),\ d_1 = \text{const} \tag{3.5}$$

$$\varphi_1 = [\omega(a_0)\,\nu_1 + \omega'(a_0)\,d_1]\,\theta + \int_0^\theta V_1(a, \theta_1)\,d\theta_1$$

$$V_1(a_0, 0) \equiv \omega'(a_0)\,r_1(a_0, \theta) + \Psi(a_0, \psi_0, 0)$$

Из условия Θ-периодичности вектора α_1 получаем условие на $a_0 \in D_a$:

$$R(a_0) = 0,\ R(a_0) \equiv \int_0^\Theta (A)\,d\theta = \frac{1}{\omega(a_0)}\int_0^{2\pi}(A)\,d\psi_0 \tag{3.6}$$

$$a_0^* = \operatorname{Arg} R(a_0),\ a_0^* \in D_a;\ (A) \equiv A(a_0, \psi_0, 0)$$

Пусть корень a_0^* согласно (3.6) найден; тогда α_1 будет периодической с периодом $\Theta^* = \Theta(a_0^*)$ при любом d_1, а $r_1^*(\theta) \equiv r_1(a_0^*, \theta)$ полностью определена. Скалярная функция φ_1 будет Θ^*-периодической, если положить

$$\omega^*\nu_1 + \omega^{*\prime} d_1 = -\langle V_1\rangle,\ \varphi_1^*(\theta) = \int_0^\theta [V_1(a_0^*, \theta_1) - \langle V_1\rangle]\,d\theta_1 \tag{3.7}$$

Таким образом, неизвестные a_0^*, Θ^*, φ_1^* определены, а постоянные ν_1, d_1 пока неизвестны, причем согласно (3.7) имеется между ними линейная связь. Продолжим процесс и выпишем α_2:

$$\alpha_2 = d_2 + \int_0^\theta [(A_a')\,d_1 + (A)\,\nu_1 + U_1(\theta_1)]\,d\theta_1,\ d_2 = \text{const} \tag{3.8}$$

$$U_1(\theta) \equiv (A_a')\,r_1^*(\theta) + (A_\psi')\,\varphi_1^*(\theta) + (A_\varepsilon')$$

Здесь и далее выражения в круглых скобках означают, что $a = a_0^*$, $\psi = \psi_0^*$, $\varepsilon = 0$. Из условия периодичности α_2 с учетом (3.6) получаем линейную систему относительно неизвестной d_2. В предположении невырожденности матрицы (R') находим d_1^*, а вместе с нею и $\alpha_1^*(\theta)$, ν_1^*:

$$d_1^* = -\Theta^*(R')^{-1}\langle U_1\rangle,\ \alpha_1^* = d_1^* + r_1^*,\ \nu_1^* = -(\omega^{*\prime} d_1^* + \langle V_1\rangle)/\omega^* \tag{3.9}$$

Подставив d_1^*, ν_1^* в α_2 (3.8), получим $\alpha_2 = d_2 + r_2^*$, где вектор d_2 подлежит определению. Аналогично (3.5), (3.7) для φ_2 имеем явное выражение $\varphi_2^*(\theta)$ и связь между d_2, ν_2:

$$\varphi_2^*(\theta) = \int_0^\theta (V_2 - \langle V_2\rangle)\,d\theta_1,\ \omega^*\nu_2 + \omega^{*\prime} d_2 = -\langle V_2\rangle \tag{3.10}$$

Далее из выражения для α_3, аналогичного (3.8) для α_2, находим с учетом условия периодичности искомые постоянные d_2^* и ν_2^*:

$$d_2^* = -\Theta^*(R')^{-1}\langle U_2\rangle,\ \nu_2^* = -(\omega^{*\prime} d_2^* + \langle V_2\rangle)/\omega^* \tag{3.11}$$

Здесь $U_2(\theta)$, $V_2(\theta)$ — известные функции, аналогичные $U_1(\theta)$ (3.8), $V_1(\theta)$ (3.5), явные представления которых не приводятся вследствие громоздкости.

Таким рекуррентным образом могут быть построены искомые функции $a^*(\theta, \varepsilon)$, $\varphi^*(\theta, \varepsilon)$, возмущенное время θ и возмущенный период $T(\varepsilon)$ по t:

$$a = a^*(\theta, \varepsilon) = a_0^* + \varepsilon\alpha_1^*(\theta) + \varepsilon^2\alpha_2^*(\theta) + \varepsilon^3 \ldots \tag{3.12}$$

$$\psi = \psi^*(\theta, \varepsilon) = \omega^*\theta + \varepsilon\varphi_1^*(\theta) + \varepsilon^2\varphi_2^*(\theta) + \varepsilon^3 \ldots$$

$$\theta = t(1 + \nu^*(\varepsilon))^{-1}, \; \nu^*(\varepsilon) = \varepsilon\nu_1^* + \varepsilon^2\nu_2^* + \varepsilon^3 \ldots$$

$$T(\varepsilon) = \Theta^*(1 + \varepsilon\nu^*(\varepsilon)), \; \Theta^* = 2\pi/\omega^*, \; \omega^* = \omega(a_0^*)$$

В силу автономности системы (3.1) наряду с решением (3.12) имеем также решение с произвольным сдвигом аргумента θ или t, т. е. в (3.12) можно сделать замены $\theta \to \theta + \delta$, $t \to t + \tau$, где δ, $\tau = \text{const}$. Отметим, что функции a^*, ψ^* и параметр ν^* могут быть получены при помощи рекуррентной процедуры типа Пикара [4, 5], более предпочтительной при использовании ЭВМ и не требующей аналитичности. Обоснование подхода (существование, единственность и сходимость) проводится стандартным образом [4, 5].

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости по Ляпунову периодических решений (3.12) системы (3.1). На основе теории Ляпунова — Флоке [5], используя уравнения в вариациях Пуанкаре [6], получим выражения первого приближения для n ненулевых характеристических показателей $\varkappa_q = \varepsilon\chi_q$ и достаточные условия устойчивости при $\varepsilon > 0$ достаточно малом

$$\chi_q(a_0^*) = \operatorname{Arg}\det[(R') - \Theta^*\chi I] \tag{3.13}$$

$$\operatorname{Re}\chi_q < 0 \; (\chi_{n+1} = 0) \; (q = 1, \ldots, n)$$

Это утверждение следует из теоремы Андронова — Витта [5] об устойчивости периодических движений автономных систем. Здесь имеет место так называемая орбитальная (не асимптотическая по всем переменным) устойчивость.

Теперь, подставляя a^*, ψ^* (3.12) в $h = \varepsilon\eta^*(a^*, \psi^*, \varepsilon)$, получим искомое T-периодическое решение исходной системы (1.1) и условия устойчивости

$$a = a_*(t, \varepsilon), \; \psi = \psi_*(t, \varepsilon), \; h = \varepsilon\eta_*(t, \varepsilon) \tag{3.14}$$

$$\operatorname{Re}\chi_q < 0 \; (q = 1, \ldots, n), \; \operatorname{Re}\lambda_j < 0 \; (j = 1, \ldots, m)$$

Изложенная выше процедура построения периодического решения может быть существенно упрощена введением аргумента ψ. Переменная a находится в виде $a = a_0^* + \varepsilon x(\psi, \varepsilon)$, где 2π-периодическая функция x определяется при помощи сравнительно элементарной рекуррентной схемы, не требующей введения параметра ν. Подставляя $a(\psi, \varepsilon)$ в $\eta(a, \psi, \varepsilon)$, получим $h(\psi, \varepsilon) = \varepsilon\eta^*(a(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon)$. Для определения зависимости от t воспользуемся уравнением (1.1) для ψ; для решения и периода представления будем иметь

$$a = a(\psi, \varepsilon) = a_*(t, \varepsilon), \; h = h(\psi, \varepsilon) = \varepsilon\eta_*(t, \varepsilon) \tag{3.15}$$

$$t + \tau = \int_0^{\psi} [\omega(a) + \varepsilon\Psi(a, \psi_1, \varepsilon)]^{-1} d\psi_1, \; T(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} [\omega(a) + \varepsilon\Psi(a, \psi, \varepsilon)]^{-1} d\psi$$

Этот подход был реализован в [11] для системы более простого вида, причем в случае скалярной переменной a исследованы критические случаи кратных корней a_0^*, приводящие к расщеплению траекторий, а также ситуации, когда условия типа (3.6) удовлетворяются тождественно по $a_0 \in D_a$.

Рассмотрим теперь прямой способ решения, не связанный с определением периодического ЛИМ и требованием высокой (бесконечной) гладкости системы (1.1).

3.2. Прямой метод построения периодического решения. Аналогично п. *3.1* вводится «возмущенное время» θ (3.2) и полагается

$$a = a_0 + \varepsilon x(\theta, \varepsilon), \ \psi = \psi_0 + \varepsilon y(\theta, \varepsilon), \ h = \varepsilon z(\theta, \varepsilon) \tag{3.16}$$

где x, y, z — неизвестные Θ-периодические функции θ. После подстановки (3.16) в (1.1) и сокращения на $\varepsilon \neq 0$ получим квазилинейную систему вида

$$\begin{aligned} x' &= (f_\varepsilon') + (f_h') z + \varepsilon \{\nu [(f_\varepsilon') + (f_h') z] + (f_{\varepsilon a}'') x + \\ &+ (f_{\varepsilon\psi}'') y + (f_{\varepsilon h}'') z + 1/2 (f_{\varepsilon 2}'') + (f_{ah}'') xz + \\ &+ (f_{\psi h}'') yz + 1/2 (f_{h2}'') z^2 + f_1 (\psi_0, a_0, \nu, x, y, z, \varepsilon)\} \\ y' &= (\omega') x + (\omega) \nu + (F_\varepsilon') + (F_h') z + F_1 (\psi_0, a_0, \nu, x, y, z, \varepsilon) \\ z' &= (H) z + (g_\varepsilon') + \varepsilon \{\nu [(H) z + (g_\varepsilon')] + (g_{\varepsilon a}'') x + (g_{\varepsilon\psi}'') y + \\ &+ (g_{\varepsilon h}'') z + 1/2 (g_{\varepsilon 2}'') + 1/2 (g_{h2}'') z^2 + (H') xz + g_1 (\psi_0, a_0, \nu, x, y, z, \varepsilon)\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь функции f_1, F_1, $g_1 \equiv 0$ при $\varepsilon = 0$ и по предположению удовлетворяют условиям Липшица по x, y, z. Круглые скобки означают, что выражения в них берутся при $\varepsilon = 0$, $a = a_0$, $\psi = \psi_0$, $h = 0$. Применим для общности метод последовательных приближений, полагая $y(0, \varepsilon) \equiv 0$. В нулевом приближении имеем (при $\varepsilon = 0$):

$$\begin{aligned} z_0 (\theta, a_0) &= \int_{-\infty}^{\theta} \exp [(H)(\theta - \theta_1)] (g_\varepsilon') \, d\theta_1 = \frac{1}{(\omega)} \int_{-\infty}^{\psi_0} \exp [(\Lambda)(\psi_0 - \psi_1)] (g_\varepsilon') \, d\psi_1 \\ x_0 &= c_0 + \int_0^{\theta} [(f_\varepsilon') + (f_h') z_0 (\theta_1, a_0)] \, d\theta_1 \equiv c_0 + r_1 (\theta, a_0) \\ y_0 (\theta, a_0) &= \int_0^{\theta} [V_0 (\theta_1, a_0) - \langle V_0 \rangle] \, d\theta_1, \ (\omega') c_0 + (\omega) \nu_0 = - \langle V_0 \rangle \end{aligned} \tag{3.18}$$

Выражения для z_0, y_0 в (3.19) будут $\Theta(a_0)$-периодическими при любом $a_0 \in D_a$, а x_0 будет периодической, если $R(a_0) = 0$, т. е.

$$a_0 = a_0^* = \operatorname{Arg} R(a_0), \ R(a_0) \equiv \int_0^{\Theta} [(f_\varepsilon') + (f_h') z_0 (\theta, a_0)] \, d\theta \tag{3.19}$$

Если корень $a_0^* \in D_a$ (3.19) найден, то функции z_0, y_0 полностью определены, а x_0 содержит неизвестную c_0. Первое приближение z_1 вычисляется из (3.17) при $g_1 \equiv 0$ и подстановке ν_0, x_0, y_0, z_0 в выражение в фигурной скобке

$$\begin{aligned} z_1 &\doteq z_0 + \varepsilon \int_{-\infty}^{\theta} \exp [(H)(\theta - \theta_1)] [(g_{\varepsilon a}'') c_0 + (H') z_0 c_0 - \\ &- (\omega') c_0 (\omega)^{-1} z_0'] \, d\theta_1 + \varepsilon w_0 \ (\nu_0 = - [(\omega') c_0 + \langle V_0 \rangle] (\omega)^{-1}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь все функции определены; неизвестным является только вектор c_0. Подставив z_1 (3.20) в уравнение для x_1 (вне фигурных скобок) и ν_0, x_0^*, y_0^*, z_0^* (в выражение внутри них) при $f_1 \equiv 0$ и проинтегрировав по θ от 0 до Θ, получим линейное уравнение для c_0: $(R') c_0 = - \langle U_1 \rangle \Theta$. Функция $U_1(\theta)$ есть правая часть уравнения для x_1 порядка ε, взятая при $c_0 = 0$; ее явное выражение не выписывается вследствие громоздкости. Если $\det(R') \neq 0$, то постоянная $c_0^* = -\Theta(R')^{-1}\langle U_1\rangle$ определяется единственным образом. Подставив c_0^* в ν_0 (3. 20), находим ν_0^*. В результате функции $x_0^*(\theta)$, $z_1^*(\theta, \varepsilon)$ полностью построены, а x_1 найдена с точностью до аддитивной постоянной c_1 ($c_1 = c_0^*$ при $\varepsilon = 0$). Эти выражения подставляются в уравнение для y_1 (члены порядка единицы) и известные величины ν_0^*, x_0^*, y_0^*, z_0^* в функцию $F_1 \sim \varepsilon$:

$$y_1^*(\theta, \varepsilon) = \int_0^\theta [V_1(\theta_1, \varepsilon) - \langle V_1\rangle]\, d\theta_1, \quad (\omega')\, c_1 + (\omega)\, \nu_1 = -\langle V_1\rangle \tag{3.21}$$

$$V_1(\theta, \varepsilon) = F_1(\psi_0, a_0^*, \nu_0^*, x_0^*, y_0^*, \varepsilon) - (\omega')\, r_1 + (F_\varepsilon') + (F_h')\, z_1^*$$

Далее рекуррентная процедура позволяет найти функцию z_2 с точностью до произвольной постоянной c_1, аналогично (3.20), причем в выражение в фигурных скобках и в функцию g_1 подставляются x_1, y_1^*, z_1^* и параметр ν_1, выраженный через c_1 согласно (3.21). Функция z_2 будет квазилинейной по c_1. После вычисления x_2 (аналогично x_1) из условия периодичности, которое будет квазилинейной системой относительно неизвестной $c_1 = c_1(\varepsilon)$, находим по теореме о неявных функциях $c_1^*(\varepsilon) = c_0^* + \varepsilon\delta_1$, $\delta_1(\varepsilon) \sim 1$. Тем самым будет вычислен параметр ν_1^*, $\nu_1^*(\varepsilon) = \nu_0^* + \varepsilon\mu_1$, $\mu_1(\varepsilon) \sim 1$. В результате полностью построены функции z_2^*, y_2^* и x_2 с точностью до аддитивной постоянной c_2 ($c_2 = c_0^*$ при $\varepsilon = 0$). При помощи изложенной рекуррентной процедуры определяются любые приближения x_i^*, y_i^*, z_i^*, ν_i^* ($i = 1, 2, \ldots$), которые будут равномерно сходящимися к искомому единственному решению системы (3.12) при $i \to \infty$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало [3—5]. Решение будет устойчивым по Ляпунову, если выполнены достаточные условия п. *3.1*.

Кратко изложенная выше схема весьма громоздка. Ее можно существенно упростить введением аргумента ψ:

$$a' = \Phi(a, \psi, h, \varepsilon), \quad h' = \Lambda(a)\, h + G(a, \psi, h, \varepsilon) \tag{3.22}$$

$$\Phi \equiv \frac{A}{\omega + F} = O(\varepsilon + |h|), \quad \Lambda \equiv \frac{H}{\omega}, \quad G \equiv \frac{g}{\omega + F} - \frac{F\Lambda h}{\omega + F} = O(\varepsilon + h^2)$$

Построение 2π-периодического решения в виде $a = a_0 + \varepsilon x(\psi, \varepsilon)$, $h = \varepsilon z(\psi, \varepsilon)$ проводим аналогично вышеизложенному. Для неизвестных x, z имеем квазилинейную систему вида

$$\begin{aligned} x' &= (\Phi_\varepsilon') + (\Phi_h')\, z + \varepsilon\, [(\Phi_{\varepsilon a}'')\, x + (\Phi_{\varepsilon h}'')\, z + ½\,(\Phi_{\varepsilon 2}'') + \\ &+ (\Phi_{ah}'')\, xz + ½\,(\Phi_{h2}'')\, z^2 + \Phi_1(\psi, a_0, x, z, \varepsilon)] \\ z' &= \Lambda(a_0)\, z + (G_\varepsilon') + \varepsilon\, [(G_{\varepsilon a}'')\, x + (G_{\varepsilon h}'')\, z + ½\,(G_{\varepsilon 2}'') + \\ &+ ½\,(G_{h2}'')\, z^2 + \Lambda'(a_0)\, zx + G_1(\psi, a_0, x, z, \varepsilon)] \end{aligned} \tag{3.23}$$

Здесь Φ_1, $G_1 \sim \varepsilon$ и удовлетворяют условиям Липшица по x, z. В нулевом приближении (при $\varepsilon = 0$) получим выражения для z, x:

$$z_0(a_0^*, \psi) = \int_{-\infty}^{\psi} \exp[(\Lambda)(\psi - \psi_1)]\, (G_\varepsilon')\, d\psi_1, \quad a_0^* = \operatorname{Arg} R(a_0) \tag{3.24}$$

$$x_0 = c_0 + r_0(a_0^*, \psi), \quad r_0(a_0, \psi) \equiv \int_0^\psi [(\Phi_\varepsilon') + (\Phi_h')\, z_0^*]\, d\psi_1, \quad R(a_0) \equiv r_0(a_0, 2\pi)$$

Функции z_0^*, r_0^* и постоянная a_0 полностью определены; c_0 подлежит выбору из условия периодичности. В первом приближении по ε, учитывая (3.24), (3.23) для z имеем (при $G_1 \equiv 0$):

$$z_1 = z_0^* + \varepsilon Z_0(\psi)\, c_0 + \varepsilon w_0(\psi), \quad Z_0(\psi) \equiv (\partial z_0/\partial a_0)^* \tag{3.25}$$

$$w_0(\psi) \equiv \int_{-\infty}^{\psi} \exp\,[(\Lambda)(\psi - \psi_1)]\,[(G_{\varepsilon a}'')\, r_0^* + (G_{\varepsilon h}'')\, z_0^* +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(G_{\varepsilon 2}'') + \tfrac{1}{2}(G_{h2}'')\, z_0^{*2} + (\Lambda')\, z_0^* r_0^*]\, d\psi_1$$

Подставляя z_1 (3.25) в первое приближение для x согласно (3.23) (при $\Phi_1 \equiv 0$), получим

$$x_1 = c_1 + r_1^* + \varepsilon \int_0^{\psi} [(\Phi_h')\, Z_0(\psi_1) + (\Phi_{\varepsilon a}'') + (\Phi_{ha}'')\, z_0^*]\, d\psi_1 c_0 \tag{3.26}$$

$$r_1^*(\psi, \varepsilon) = r_0^*(\psi) + \varepsilon \int_0^{\psi} [(\Phi_h')\, w_0 + (\Phi_{\varepsilon a}'')\, r_0^* + (\Phi_{\varepsilon h}'')\, z_0^* + \tfrac{1}{2}(\Phi_{\varepsilon 2}'') +$$

$$+ (\Phi_{ha}'')\, z_0^* r_0^* + \tfrac{1}{2}(\Phi_{h2}'')\, z_0^{*2}]\, d\psi_1 \equiv r_0^*(\psi) + \varepsilon \rho_1(\psi)$$

Из условия 2π-периодичности x_1 получим линейную систему относительно c_0: $(R')\, c_0 + \rho_1(2\pi) = 0$, откуда $c_0^* = -(R')^{-1}\rho_1(2\pi)$. В результате полностью определены x_0 и z_1; c_1 подлежат дальнейшему выбору. Далее процедура повторяется, однако при построении x_2, z_2 должны быть учтены функции Φ_1, $G_1 \sim \varepsilon$, в которые подставляются выражения для $x_1 = c_1 + r_1^*(\psi, \varepsilon)$, z_1, вычисленные ранее на предыдущих итерациях. Функция z_2 будет зависеть от c_1 нелинейным образом через G_1 и, кроме того, x_2 будет также нелинейной вследствие зависимости от z_2 и через Φ_1. Поскольку нелинейности малы (порядка ε^2) и удовлетворяют условиям Липшица по x, z, то условия периодичности после сокращения на $\varepsilon \neq 0$ примут вид квазилинейной системы уравнений относительно вектора c_{i-1} $(i = 2)$:

$$(R')\, c_{i-1} + \rho_i(c_{i-1}, \varepsilon) = 0, \quad \rho_i(c_{i-1}, 0) \equiv \rho_1(2\pi) \tag{3.27}$$

где ρ_i удовлетворяет условию Липшица по c_{i-1} с постоянной порядка ε. Система (3.27) удовлетворяет условиям существования единственного корня $c_{i-1}^*(\varepsilon)$, который может быть построен с требуемой степенью точности $O(\varepsilon^{i-1})$ (т. е. погрешностью $O(\varepsilon^i)$) также рекуррентно

$$c_{i-1}^{(k)} = -(R')^{-1}\rho_i(c_{i-1}^{(k-1)}, \varepsilon), \quad c_{i-1}^{(0)} = c_0^* \quad (k = 1, \ldots, i-1) \tag{3.28}$$

Последовательные приближения по индексам k и i $(i \geq 2)$ вида (3.27), (3.28) будут равномерно сходящимися при $\varepsilon > 0$ достаточно малом. В пределе при $i \to \infty$ рекуррентная процедура решения системы (3.28) определяет искомое периодическое решение $x(\psi, \varepsilon)$, $z(\psi, \varepsilon)$ тем самым и решение $a(\psi, \varepsilon)$, $h(\psi, \varepsilon)$ исходной системы (3.22) [12]. Для каждого простого корня a_0^* решение будет единственным и асимптотически устойчивым по Ляпунову при $\varepsilon > 0$ достаточно малом при выполнении условий п. *3.1*.

Приведенный алоритм решения можно улучшить, избегая на i-м шаге $(i \geq 2)$ решения квазилинейной системы (3.27) относительно c_{i-1}. Без потери точности по степеням ε в функции Φ_1, G_1 представляются $(i-2)$-е приближения $x_{i-2}(\psi, \varepsilon)$, $z_{i-2}(\psi, \varepsilon)$, которые полностью определены. Так при $i = 2$ в функции

Φ_1, G_1 подставляются $x_0 = c_0^* + r_0^*$, z_0^*. В результате получаем линейное уравнение $(R') c_1 + \rho_2(\varepsilon) = 0$, где $\rho_2(0) = \rho_1(2\pi)$, решение которого сводится к обращению матрицы (R'). Аналогично поступаем при $i > 2$, поскольку постоянная $c = c_{i-1}$ должна быть определена с точностью $O(\varepsilon^{i-1})$, т. е. уточнена на эту величину по сравнению с c_{i-2}.

Будем полагать искомое решение $a^*(\psi, \varepsilon) = a_0^* + \varepsilon x^*(\psi, \varepsilon)$, $h^*(\psi, \varepsilon) = \varepsilon z^*(\psi, \varepsilon)$ построенным. Зависимость фазы ψ от времени t и возмущенный период $T(\varepsilon)$ определяются соотношениями, аналогичными (3.15):

$$t + \tau = \int_0^\psi [\omega(a^*) + \varepsilon\Psi(a^*, z^*, \varepsilon)]^{-1} d\psi_1, \ \varepsilon\Psi \equiv F|_{h=\varepsilon z^*} \tag{3.29}$$

$$T(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} [\omega(a^*) + \varepsilon\Psi(a^*, z^*, \varepsilon)]^{-1} d\psi = \Theta(a_0^*) + \varepsilon\Delta(\varepsilon), \Delta \sim 1$$

Явная зависимость $\psi = \psi(t, \varepsilon)$ может быть найдена из (3.25) при помощи специальной схемы последовательных приближений или разложениями по степеням ε [13]. Знание точного значения периода $T(\varepsilon)$ (3.29) (или с требуемой точностью) позволяет избегать вековых членов и представить искомое решение в виде $\psi = \psi^*(t, \varepsilon) = \varphi + \varepsilon\zeta(\varphi, \varepsilon)$, где $\varphi = (2\pi/T)(t + \tau)$ — фаза, а ζ — периодическая функция φ с периодом 2π.

В приложениях имеется ряд механических моделей нелинейных колебательных и вращательных систем, описываемых уравнениями вида (1.1). Поэтому прикладной аспект проведенного анализа представляется значительным. Следует отметить, что условия существования периодических движений типа (3.6), (3.19), (3.24) и устойчивости типа (3.13), (3.14) в конкретных задачах [4] могут быть часто получены на основе интегралов невозмущенной задачи, отвечающих семейству периодических движений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 432 с.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
3. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 230 с.
4. *Акуленко Л. Д.* Стационарные движения в возмущенных автономных системах//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 4. С. 884—890.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
6. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 772 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: 1974. 504 с.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1968. 248 с.
9. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
10. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
11. *Акуленко Л. Д.* Исследование установившихся режимов возмущенных автономных систем в критических случаях//ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 5. С. 817—826.
12. *Шиманов С. Н.* К теории колебаний квазилинейных систем//ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 2. С. 155—162.
13. *Акуленко Л. Д.* Исследование автовращательных движений некоторых систем с одной степенью свободы, близких к консервативным//Вестн. МГУ. Сер. физ., астрон. 1969. № 3. С. 111—112.

Москва

Поступила в редакцию
6.X.1992