

УДК 624.07:534.1

© 1995 г. П. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕЛЬСА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Вертикальные колебания рельса рассматриваются как колебания бесконечной балки Тимошенко, поддерживаемой бесконечным рядом упруговязких массивных опор с постоянным шагом.

Колебания, возбуждаемые гармонической силой, движущейся вдоль балки с постоянной скоростью, предполагаются установившимися в следующем смысле: сдвиг вдоль балки на шаг опор приводит к запаздыванию колебаний на время, в течение которого гармоническая сила проходит расстояние, равное шагу опор. Кроме того, предполагается, что каждая точка балки находилась в состоянии покоя до приближения к ней гармонической силы и возвращается в это же состояние после удаления силы в бесконечность.

Задача о колебаниях балки приводится к краевой задаче для отрезка балки между двумя смежными опорами с граничными условиями, содержащими упомянутое выше запаздывание. Точное решение краевой задачи получено в замкнутой форме при помощи преобразования Фурье.

Упругость опор (шпал и балласта) значительно превосходит упругость балки (рельса). Поэтому сила, приложенная к рельсу, распределяется между несколькими шпалами, что в некоторых случаях позволяет использовать непрерывную модель железнодорожного пути как балки на однородном упругом основании. Эта сравнительно простая модель дает достаточно точные значения прогиба и напряжений в рельсе [1], позволяет определить волновое сопротивление движению колеса [2—4].

Однако применение непрерывной модели имеет существенные ограничения. Например, прогиб рельса под действием неподвижной постоянной силы имеет меньшую величину, если сила приложена над шпалой, и большую величину, если сила приложена в середине пролета между шпалами. Поэтому при движении силы вдоль рельса с постоянной скоростью точка приложения силы совершает вертикальные периодические колебания. Очевидно, что эти колебания являются параметрическими и игнорируются непрерывной моделью пути. Подобные, но более сложные колебания возникают при движении по рельсу массивного колеса, нагруженного постоянной силой. В этом случае вертикальные колебания колеса приводят к появлению периодической силы в точке контакта колеса и рельса.

Если пренебречь массой рельса и опор, а также вязким сопротивлением в опоре, то колебания колеса описываются неоднородным уравнением Матье [5] с периодическим коэффициентом, определяемым переменной упругостью пути. Параметрические колебания колеса с учетом упомянутых выше величин были исследованы в [6]. В этой работе рельс рассматривался как балка Эйлера — Бернулли.

На скоростных железнодорожных линиях возникает [7—11] волнообразный износ рельса с длиной волны порядка 0,05 м, обычно имеющий форму биений с периодом, равным шагу шпал. При скорости движения колеса 50 м/с (180 км/ч) волнообразный износ вызывает колебания с частотой 1000 Гц. При высокочастот-

стотных колебаниях рельса возникают короткие волны, длина которых близка к шагу шпал. В этом случае непрерывная модель железнодорожного пути оказывается недостаточной и должна быть заменена дискретной моделью, принимающей во внимание опирание рельса на шпалы. Модель балки Эйлера — Бернулли, учитывающая изгибную деформацию и инерцию поступательного поперечного движения, хорошо описывает колебания с большой длиной волны. При высокочастотных колебаниях необходимо также учитывать инерцию поворота поперечного сечения балки и деформацию сдвига, что приводит к использованию Балки Тимошенко [12].

Описанные выше параметрические и вынужденные колебания вызывают периодическую силу в точке контакта колеса и рельса. При исследовании таких колебаний периодическая сила подлежит определению, например, в виде ряда Фурье с неизвестными коэффициентами. Вычисление коэффициентов ряда состоит из двух этапов. На первом этапе определяются колебания рельса под действием подвижной гармонической силы. На втором этапе колебания колеса и рельса рассматриваются совместно [6—11].

В [13—14] были разработаны численные методы расчета колебаний одно- и многопролетных балок под действием подвижных периодических нагрузок. Подобные им численные методы были использованы в [8—9] для исследования колебаний рельса под действием подвижной нагрузки. В этих работах бесконечный рельс заменялся балкой конечной длины. При замене бесконечного рельса балкой конечной длины появляются искажения, вызванные отражением волн от концов. Публикуемое решение описывает колебания бесконечной балки и свободно от этих искажений.

Следует отметить, что в [10—11] были получены решения, описывающие вертикальные колебания бесконечного рельса на дискретных упруговязких массивных опорах с постоянным шагом под действием неподвижной гармонической силы.

1. Постановка задачи. Пусть прогиб рельса $y(x, t)$ вызван вертикальной гармонической силой $Pe^{i\omega_0 t}$, движущейся вдоль рельса с постоянной ненулевой скоростью v , имеющей амплитуду P и угловую скорость $\omega_0 = 2\pi\nu/l$, где x — продольная координата, l — шаг шпал, t — время, n — целое неотрицательное число. Если $n = 0$, то возмущающая сила постоянна. Если $n = 1$, то частота возмущения совпадает с частотой прохождения шпал. В остальных случаях частота возмущения кратна частоте прохождения шпал. Согласно [6], прогиб рельса удовлетворяет условию

$$y(x + l, t + l/v) = y(x, t) \quad (1.1)$$

Это условие показывает, что сдвиг вдоль рельса на шаг шпал l приводит к запаздыванию колебаний на время l/v , в течение которого гармоническая сила проходит расстояние, равное шагу шпал.

Будем рассматривать рельс как балку Тимошенко, прогиб которой представляется в виде

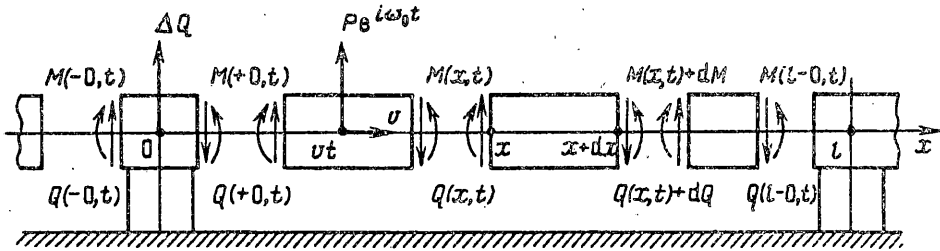
$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (1.2)$$

где непрерывные функции $y_1(x, t)$ и $y_2(x, t)$ определяют соответственно прогиб, вызванный деформацией изгиба, и прогиб, вызванный деформацией сдвига. Пусть $Q(x, t)$ и $M(x, t)$ — поперечная сила и изгибающий момент в произвольном поперечном сечении рельса, имеющем площадь A . Положительные направления этих величин показаны на фиг. 1. Из [12] следует, что

$$M(x, t) = EJ \partial^2 y_1(x, t) / \partial x^2 \quad (1.3)$$

$$Q(x, t) = -k' AG \partial y_2(x, t) / \partial x \quad (1.4)$$

где EJ и ρ_0 — изгибная жесткость и линейная плотность рельса; G — модуль



Фиг. 1

сдвига материала рельса, а k' — коэффициент, определяемый формой поперечного сечения. Рассмотрим элемент рельса, ограниченный поперечными сечениями x и $x + dx$ (фиг. 1). Угловое и поступательное ускорения этого элемента определяются равенствами

$$\frac{\rho_0 J}{A} \frac{\partial^3 y_1(x, t)}{\partial x \partial t^2} dx = -Q(x, t) dx + dM$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} dx = -dQ + f(x, t) dx$$

где $f(x, t) = P \exp(i\omega_0 t) \cdot \delta(x - vt)$ — вертикальная сила, приложенная к рельсу в точке vt , $\delta(\cdot)$ — функция Дирака. Используя равенства (1.3) и (1.4), получим дифференциальные уравнения

$$\frac{\rho_0 J}{A} \frac{\partial^3 y_1(x, t)}{\partial x \partial t^2} = k'GA \frac{\partial y_2(x, t)}{\partial x} + EJ \frac{\partial^3 y_1(x, t)}{\partial x^3}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = k'GA \frac{\partial^2 y_2(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Продифференцируем первое уравнение по x . Далее исключим $y_2(x, t)$ из первого уравнения при помощи второго уравнения, а из второго уравнения при помощи равенства (1.2). В итоге получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\rho_0 J}{A} \frac{\partial^4 y_1(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} = EJ \frac{\partial^4 y_1(x, t)}{\partial x^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - f(x, t)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = k'GA \left[\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y_1(x, t)}{\partial x^2} \right] + f(x, t) \quad (1.5)$$

Будем рассматривать шпалу как упругую опору с вязкостью и инерцией, реакция которой состоит только из вертикальной силы. Из условия равновесия элемента рельса над шпалой с центром в точке $x = 0$ (фиг. 1) следует, что при переходе через точку $x = 0$ поперечная сила испытывает скачок

$$\Delta Q = Q(+0, t) - Q(-0, t) = -ul y(0, t) - \mu l \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} - \rho_1 l \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial t^2}$$

где ul , μl , $\rho_1 l$ — жесткость, вязкость и присоединенная масса шпалы и балласта, отнесенные к одному рельсу. При этом изгибающий момент остается непрерывным. Из равенств (1.3) и (1.4), а также соотношения $dM(x, t)/dx = Q(x, t)$ теории изгиба следует, что при переходе через точку $x = 0$ величины $-k'AG \partial y_2(x, t)/\partial x$ и $EJ \partial^3 y_1(x, t)/\partial x^3$ испытывают скачок, равный ΔQ , в то время как производные $\partial y_1(x, t)/\partial x$, $\partial^2 y_1(x, t)/\partial x^2$, $\partial^2 y_2(x, t)/\partial x^2$ и $\partial^3 y_2(x, t)/\partial x^3$ остаются непрерывными. Из равенства (1.2) следует, что

$y(x, t)$ и $\partial^2 y(x, t)/\partial x^2$ непрерывны в точке $x = 0$, а величины $-k'GA\partial y(x, t)/\partial x$ и $EJ\partial^3 y(x, t)/\partial x^3$ испытывают скачок ΔQ при переходе через точку $x = 0$.

Согласно условию (1.1) прогиб рельса над следующей шпалой отстает на величину l/v . Следовательно

$$y(l, t + l/v) = y(0, t)$$

$$k'GA\partial y(l, t + l/v)/\partial x = k'GA\partial y(0, t)/\partial x + \Delta Q$$

$$\partial^2 y(l, t + l/v)/\partial x^2 = \partial^2 y(0, t)/\partial x^2$$

$$EJ\partial^3 y(l, t + l/v)/\partial x^3 = EJ\partial^3 y(0, t)/\partial x^3 - \Delta Q \quad (1.6)$$

Система дифференциальных уравнений (1.5) и граничные условия (1.6) определяют прогиб рельса $y(x, t)$ на отрезке $0 \leq x \leq l$. Прогиб рельса вне этого отрезка определяется при помощи условия (1.1). Будем предполагать, что рельс находился в состоянии статического равновесия до появления подвижной гармонической силы и возвращается в это же состояние после удаления этой силы в бесконечность. Таким образом, предполагается, что $y(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$ вместе со своими производными и допускает преобразование Фурье по t .

Граничные условия (1.6) содержат запаздывание по времени l/v и вместе с предположением о затухании $y(x, t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ определяют в полосе $(0, l) \times (-\infty, +\infty)$ краевую задачу с запаздывающим аргументом [15] или по другой терминологии дифференциально-разностную краевую задачу [16] для системы уравнений (1.5). Очевидно, что решение этой задачи не является периодическим.

Если исключить запаздывание l/v из граничных условий (1.6) и отказаться от предположения о затухании $y(x, t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$, то условия (1.6) будут определять периодическое решение, которое соответствует колебаниям рельса под действием бесконечного ряда одинаковых гармонических сил, движущихся вдоль рельса с постоянным шагом l и с постоянной скоростью v .

Переходя в равенствах (1.5) и (1.6) к безразмерным переменным $X = x/l, T = vt/l$ и учитывая, что $\delta(lX) = \delta(X)/l$, получим при $0 \leq X \leq 1$:

$$\beta \frac{\partial^4 y_1(X, T)}{\partial X^2 \partial T^2} = \frac{\partial^4 y_1(X, T)}{\partial X^4} + \alpha \frac{\partial^2 y(X, T)}{\partial T^2} - \frac{P\beta}{EJ} \exp(i2\pi nT) \cdot \delta(X - T)$$

$$\gamma \frac{\partial^2 y(X, T)}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 y(X, T)}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 y_1(X, T)}{\partial X^2} + \psi \frac{P\beta}{EJ} \exp(i2\pi nT) \cdot \delta(X - T) \quad (1.7)$$

$$\alpha = \frac{\rho_0 v^2 l^2}{EJ}, \quad \beta = \frac{\rho_0 v^2}{EA}, \quad \gamma = \frac{\rho_0 v^2}{k'GA}, \quad \psi = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{EJ}{k'GA l^2} \quad (1.8)$$

$$y(1, T + 1) = y(0, T)$$

$$\frac{\partial y(1, T + 1)}{\partial X} = \frac{\partial y(0, T)}{\partial X} - \psi \left[K y(0, T) + K_1 \frac{\partial y(0, T)}{\partial T} + K_2 \frac{\partial^2 y(0, T)}{\partial T^2} \right]$$

$$\partial^2 y(1, T + 1)/\partial X^2 = \partial^2 y(0, T)/\partial X^2$$

$$\frac{\partial^3 y(1, T + 1)}{\partial X^3} = \frac{\partial^3 y(0, T)}{\partial X^3} + K y(0, T) + K_1 \frac{\partial y(0, T)}{\partial T} + K_2 \frac{\partial^2 y(0, T)}{\partial T^2} \quad (1.9)$$

$$K = u^2/(EJ), \quad K_1 = \mu v^3/(EJ), \quad K_2 = \rho_1 v^2 l^2/(EJ) \quad (1.10)$$

Система дифференциальных уравнений (1.7), описывающая колебания рельса как балки Тимошенко, содержит три безразмерных параметра α, β и γ . Первый параметр учитывает инерцию поперечного поступательного движения, второй — инерцию поворота поперечного сечения балки и третий — деформацию сдвига.

Если принять равными нулю параметры β и γ и, соответственно, величину $\psi = \gamma/\alpha$, то система (1.7) будет описывать колебания балки Эйлера — Бернулли. Граничные условия (1.9) содержат три безразмерных параметра K , K_1 и K_2 , учитывающих, соответственно, упругость, вязкость и инерцию шпалы и балласта, а также безразмерную величину ψ , учитывающую деформацию сдвига в рельсе.

2. Решение задачи. Обозначим

$$\hat{y}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(X, T) e^{-i\omega T} dT$$

Выполняя преобразование Фурье в системе (1.7) и граничных условиях (1.9), а также интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} -B \frac{d^2 \hat{y}_1(X)}{dX^2} &= \frac{d^4 \hat{y}_1(X)}{dX^4} - A \hat{y}(X) - \frac{P\beta}{EJ} \exp(i(2\pi n - \omega)X) \\ -\Gamma \hat{y}(X) &= \frac{d^2 \hat{y}(X)}{dX^2} - \frac{d^2 \hat{y}_1(X)}{dX^2} + \psi \frac{P\beta}{EJ} \exp(i(2\pi n - \omega)X) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$A = \alpha\omega^2 = \frac{\rho_0 l^2 v^2 \omega^2}{EJ}, \quad B = \beta\omega^2 = \frac{\rho_0 v^2 \omega^2}{EA}, \quad \Gamma = \gamma\omega^2 = \frac{\rho_0 v^2 \omega^2}{k'GA} \quad (2.2)$$

$$e^{i\omega} \hat{y}(1) = \hat{y}(0), \quad e^{i\omega} d\hat{y}(1)/dX = d\hat{y}(0)/dX - \psi K(\omega) \hat{y}(0)$$

$$e^{i\omega} d^2 \hat{y}(1)/dX^2 = d^2 \hat{y}(0)/dX^2$$

$$e^{i\omega} d^3 \hat{y}(1)/dX^3 = d^3 \hat{y}(0)/dX^3 + K(\omega) \hat{y}(0) \quad (2.3)$$

$$K(\omega) = K + i\omega K_1 - \omega^2 K_2 \quad (2.4)$$

Выражая $d^2 \hat{y}_1(X)/dX^2$ из второго уравнения системы (2.1) и подставляя в первое уравнение, получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \hat{y}(X)}{dX^4} + (B + \Gamma) \frac{d^2 \hat{y}(X)}{dX^2} + (B\Gamma - A) \hat{y}(X) &= \\ = \{1 + \psi [(2\pi n - \omega)^2 - B]\} \frac{P\beta}{EJ} \exp(i(2\pi n - \omega)X) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Корни характеристического уравнения $\sigma^4 + (B + \Gamma)\sigma^2 + B\Gamma - A = 0$ можно представить в виде $\pm\sigma_1, \pm i\sigma_2$, где

$$\sigma_2^2 = \left[\left(\frac{B - \Gamma}{2} \right)^2 + A \right]^{1/2} + \frac{B + \Gamma}{2}, \quad \sigma_1^2 = \left[\left(\frac{B - \Gamma}{2} \right)^2 + A \right]^{1/2} - \frac{B + \Gamma}{2} \quad (2.6)$$

Представим решение дифференциального уравнения (2.5) в виде

$$\begin{aligned} \hat{y}(X) &= \frac{P\beta}{EJ} P_n(\omega) [C_1 \operatorname{sh}(\sigma_1(1 - X)) + C_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 X) + C_3 \sin(\sigma_2(1 - X)) + \\ &+ C_4 \sin(\sigma_2 X) + \exp(i(2\pi n - \omega)X)] \\ P_n(\omega) &= \frac{1 + \psi [(2\pi n - \omega)^2 - B]}{[(2\pi n - \omega)^2 + \sigma_1^2] [(2\pi n - \omega)^2 - \sigma_2^2]} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Четыре постоянных C_1, \dots, C_4 удовлетворяют четырем граничным условиям (2.3). Вычисляя постоянные, получим

$$\begin{aligned} \hat{y}(X) &= \frac{P\beta}{EJ} P_n(\omega) \left\{ \exp(i(2\pi n - \omega)X) - \frac{K(\omega) \Phi(\omega)}{K(\omega) + \Phi(\omega)} \times \right. \\ &\times \frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \left[(1 - \psi\sigma_2^2) \frac{\operatorname{sh}(\sigma_1(1 - X)) + e^{-i\omega} \operatorname{sh}(\sigma_1 X)}{\sigma_1(\cos \omega - \operatorname{ch} \sigma_1)} - \right. \end{aligned}$$

$$- (1 + \psi \sigma_1^2) \frac{\sin(\sigma_2(1-X)) + e^{-i\omega} \sin(\sigma_2 X)}{\sigma_2 (\cos \omega - \cos \sigma_2)} \Big] \Big\} \quad (2.8)$$

$$\Phi(\omega) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left[\frac{(1 - \psi \sigma_2^2) \operatorname{sh} \sigma_1}{\sigma_1 (\cos \omega - \operatorname{ch} \sigma_1)} - \frac{(1 + \psi \sigma_1^2) \sin \sigma_2}{\sigma_2 (\cos \omega - \cos \sigma_2)} \right]^{-1} \quad (2.9)$$

Обратное преобразование Фурье

$$y(X, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(X) e^{i\omega T} d\omega \quad (2.10)$$

определяет решение рассматриваемой задачи на отрезке $0 \leq X \leq 1$. На этом отрезке имеет место следующее разложение Фурье:

$$\frac{e^{i\omega X}}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \left[(1 - \psi \sigma_2^2) \frac{\operatorname{sh}(\sigma_1(1-X)) + e^{-i\omega} \operatorname{sh}(\sigma_1 X)}{\sigma_1 (\cos \omega - \operatorname{ch} \sigma_1)} - (1 + \psi \sigma_1^2) \frac{\sin(\sigma_2(1-X)) + e^{-i\omega} \sin(\sigma_2 X)}{\sigma_2 (\cos \omega - \cos \sigma_2)} \right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_m(\omega) \exp(i2\pi m X) \quad (2.11)$$

$$Q_m(\omega) = \frac{1 + \psi [(2\pi m - \omega)^2 - B - \Gamma]}{[(2\pi m - \omega)^2 + \sigma_1^2] [(2\pi m - \omega)^2 - \sigma_2^2]}$$

где $Q_m(\omega)$ является рациональной функцией, принимающей действительные значения при действительных значениях переменного ω . Разлагаемая функция принимает равные значения на концах отрезка. Сравнивая разложение (2.11) при $X = 0$ с равенством (2.9), получим представление

$$\Phi(\omega) = 1 / \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_m(\omega)$$

показывающее, что функция $\Phi(\omega)$ действительна при действительных ω и равна нулю в полюсах функций $P_n(\omega)$ и $Q_m(\omega)$. Используя разложение (2.11), представим решение (2.10) в следующем виде:

$$y(X, T) = \frac{P\beta}{2\pi EJ} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp(i2\pi n X) - \frac{K(\omega) \Phi(\omega)}{K(\omega) + \Phi(\omega)} \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_m(\omega) \exp(i2\pi m X) \right] P_n(\omega) \exp(i\omega(T-X)) d\omega \quad (2.12)$$

Подынтегральная функция не имеет полюсов на линии интегрирования. Интеграл (2.12) существует при любых значениях X и T , удовлетворяя условию $y(X+1, T+1) = y(X, T)$, равносильному условию (1.1). Следовательно, представление (2.12) при любых X и T определяет прогиб рельса, вызванный гармонической силой $P \exp(i2\pi n T)$, движущейся с постоянной скоростью вдоль рельса. При $X = T$ получим прогиб рельса

$$y(T, T) = \frac{P\beta}{2\pi EJ} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp(i2\pi n T) - \frac{K(\omega) \Phi(\omega)}{K(\omega) + \Phi(\omega)} \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_m(\omega) \exp(i2\pi m T) \right] P_n(\omega) d\omega$$

в точке приложения гармонической силы. Этот прогиб является периодической и полигармонической функцией ω . Частоты гармоник этой функции кратны частоте прохождения шпал. Если β и γ равны нулю, то $\psi = \gamma/\alpha = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{A}$, а полученное решение переходит в решение, соответствующее балке Эйлера — Бернулли и представленное в [6].

3. **Неподвижная сила.** Постановка задачи имеет смысл только при $v \neq 0$. Однако, решение задачи, представленное равенствами (2.8) и (2.10), допускает предельный переход к $v = 0$. Возвращаясь к переменным x и t , а также переходя к переменной интегрирования $\vartheta = \omega - 2\pi n$, получим

$$y(x, t) = \frac{P\beta e^{i\omega_0 t}}{2\pi EJ} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{i\vartheta x}{l}\right) - \frac{K(\vartheta + 2\pi n)\Phi(\vartheta + 2\pi n)}{K(\vartheta + 2\pi n) + \Phi(\vartheta + 2\pi n)} \frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \times \right. \\ \times \left[(1 - \psi\sigma_2^2) \frac{\text{sh}(\sigma_1(1-x/l)) + e^{-\vartheta} \text{sh}(\sigma_1 x/l)}{\sigma_1(\cos \vartheta - \text{ch } \sigma_1)} - (1 + \psi\sigma_1^2) \times \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sin(\sigma_2(1-x/l)) + e^{-\vartheta} \sin(\sigma_2 x/l)}{\sigma_2(\cos \vartheta - \cos \sigma_2)} \right] \right\} P_n(\vartheta + 2\pi n) \exp\left(\frac{i\vartheta vt}{l}\right) d\vartheta \quad (3.1)$$

Будем предполагать, что угловая скорость $\omega_0 = 2\pi n v / l$ постоянна, а $n \rightarrow \infty$. Тогда $v = l\omega_0 / (2\pi n) \rightarrow 0$, а точка $x_0 = vt$ приложения гармонической силы становится неподвижной. При этом

$$\omega v = (\vartheta + 2\pi n) l\omega_0 / (2\pi n) = l\omega_0 (1 + \vartheta / (2\pi n)) \rightarrow l\omega_0$$

а равенства (2.2), определяющие параметры A , B и Γ , переходят в равенства

$$A = \rho_0 \omega_0^2 l^4 / (EJ), \quad B = \rho_0 \omega_0^2 l^2 / (EA), \quad \Gamma = \rho_0 \omega_0^2 l^2 / (k'GA) \quad (3.2)$$

Кроме того, функция $K(\omega)$, определяемая равенствами (1.10) и (2.4), заменяется постоянной $K_0 = (u + i\mu\omega_0 - \rho_0\omega_0^2) l^3 / (EJ)$. Заменяем ϑ на ω . Тогда функция $\Phi(\omega)$ вновь определяется равенством (2.9), а функция $P_n(\omega)$ заменяется функцией

$$P_0(\omega) = \frac{1 + \psi(\omega^2 - B)}{(\omega^2 + \sigma_1^2)(\omega^2 - \sigma_2^2)}$$

где σ_1^2 и σ_2^2 определены равенствами (2.6). Величина σ_2^2 всегда положительна, а σ_1^2 имеет знак величины $A - B\Gamma$. Последняя положительна, отрицательна или равна нулю, если $\omega_0 < \omega_*$, $\omega_0 > \omega_*$ или $\omega_0 = \omega_*$, где

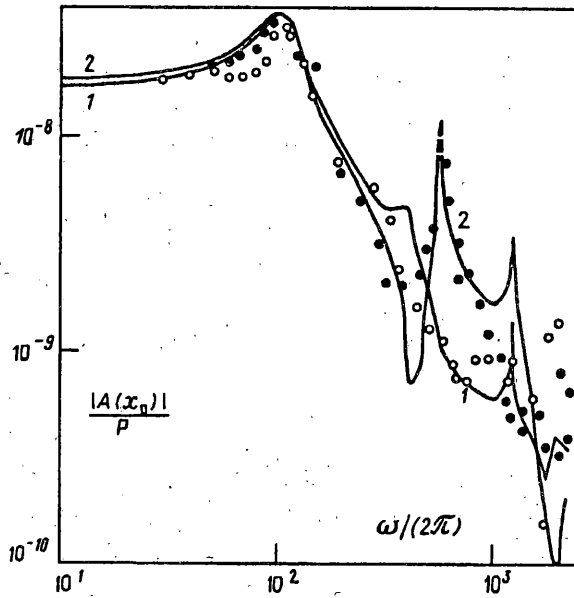
$$\omega_*^2 = k'GA^2 / (\rho_0 J) \quad (3.3)$$

Переходя к пределу в равенстве (3.1), получим

$$y(x, t) = A(x) \exp(i\omega_0 t) \quad (3.4)$$

$$A(x) = \frac{P\beta}{2\pi i EJ} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{i\omega x}{l}\right) - \frac{K_0\Phi(\omega)}{K_0 + \Phi(\omega)} \frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \times \right. \\ \times \left[(1 - \psi\sigma_2^2) \frac{\text{sh}(\sigma_1(1-x/l)) + e^{-i\omega} \text{sh}(\sigma_1 x/l)}{\sigma_1(\cos \omega - \text{ch } \sigma_1)} - \right. \\ \left. - (1 + \psi\sigma_1^2) \frac{\sin(\sigma_2(1-x/l)) + e^{-i\omega} \sin(\sigma_2 x/l)}{\sigma_2(\cos \omega - \cos \sigma_2)} \right] \right\} \times \\ \times P_0(\omega) \exp\left(\frac{i\omega x_0}{l}\right) d\omega \quad (0 \leq x, x_0 \leq l) \quad (3.5)$$

Равенство (3.4) показывает, что под действием гармонической силы $P e^{i\omega_0 t}$, приложенной в неподвижной точке x_0 , каждая точка x совершает гармонические колебания с угловой скоростью ω_0 и комплексной амплитудой $A(x)$, определяемой интегралом (3.5).



Фиг. 2

4. Вычисления и анализ результатов. Значения комплексной амплитуды $A(x_0)$ в точке приложения гармонической силы были вычислены для параметров железнодорожного пути $\psi = 0,34$; $l = 0,8$ м; $EJ = 3,57 \cdot 10^6$ Нм², $\rho_0 = 48$ кг/м, $\rho_1 = 30$ кг/м, $\mu = 34,75 \cdot 10^6$ Н/м², $\mu = 20,75 \cdot 10^3$ Нс/м², приведенных в [10], в диапазоне частоты 0—2200 Гц. Отметим, что угловая скорость ω_* , определяемая равенством (3.3), соответствует частоте 5484 Гц. Результаты вычислений для двух случаев приложения силы: над шпалой ($x_0 = 0$, кривая 1) и в середине шага шпал ($x_0 = l/2$, кривая 2) изображены на фиг. 2 и представляют отношение амплитуд колебаний упомянутой выше точки и возмущающей силы в м/Н. Там же показаны экспериментальные точки из [10], отмеченные светлыми точками в первом случае и темными — во втором. Отметим, что во втором случае амплитуда обращается в бесконечность вблизи частоты 570 Гц. Неожиданное присутствие резонанса с бесконечной амплитудой в колебаниях упругой балки с упруговязкими опорами объясняется в [10] тем, что колебания рельса приобретают форму стоячей волны с узлами над шпалами, благодаря чему демпфирование отсутствует. Действительно, стоячая волна с узлами над шпалами

$$y(x, t) = \sin(\pi x/l) \exp(i\omega_0 t)$$

удовлетворяет уравнению Тимошенко [12]:

$$\frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} - \left(\frac{\rho_0}{EA} + \frac{\rho_0}{k'GA} \right) \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_0}{EA} \frac{\rho_0}{k'GA} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial t^4} - \frac{\rho_0}{EJ} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

если угловая скорость ω_0 удовлетворяет биквадратному уравнению

$$\left(\frac{\pi}{l} \right)^4 - \left(\frac{\rho_0}{EA} + \frac{\rho_0}{k'GA} \right) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \omega_0^2 + \frac{\rho_0}{EA} \frac{\rho_0}{k'GA} \omega_0^4 - \frac{\rho_0}{EJ} \omega_0^2 = 0$$

корни которого соответствуют частотам 573 и 6407 Гц. Отметим, что резонанс с бесконечной амплитудой можно исключить, если вместе с вертикальной реакцией шпалы учитывать ее вязкоупругий реактивный момент.

Если в предыдущих вычислениях пренебречь деформацией сдвига и инерцией поворота поперечного сечения, рассматривая рельс как балку Эйлера — Бернулли [10], то отмеченный выше «резонанс стоячей волны» окажется вблизи частоты 670 Гц, которая значительно отличается от частоты 573 Гц, хорошо согласующейся с экспериментальными данными и соответствующей балке Тимошенко. Это обстоятельство показывает, что применение более сложной модели балки Тимошенко в данном исследовании является обоснованным.

Сравнение теоретических кривых и экспериментальных точек показывает, что принятая дискретная модель железнодорожного пути, учитывающая инерцию поворота поперечного сечения рельса и деформацию сдвига, дает хорошие результаты в диапазоне частоты 0—1000 Гц. Амплитуда колебаний рельса, вычисленная при помощи принятой модели пути, как правило, превосходит амплитуду колебаний, полученную экспериментально. Это обстоятельство можно объяснить следующим образом. Параметры пути, относящиеся к шпалам, были определены в [10] косвенно путем согласования экспериментальных точек и теоретических кривых, полученных при помощи модели Эйлера — Бернулли, т. е. без учета деформации сдвига. Прогиб рельса, вычисленный при помощи модели Тимошенко, имеет большую величину, поскольку деформация сдвига учитывается в вычислениях.

Отметим, что приведенные выше расчеты колебаний рельса, выполненные при помощи дискретной модели железнодорожного пути, позволяют сделать некоторые выводы относительно применения непрерывной модели пути. Очевидно, что в непрерывной модели пути амплитуда колебаний рельса в точке приложения неподвижной возмущающей силы не зависит от положения этой точки относительно шпал. В дискретной модели пути, как этой видно на фиг. 2, указанные выше величины мало зависят от положения возмущающей силы относительно шпал только лишь в узком диапазоне частоты 0—250 Гц. Это обстоятельство, а также качественные соображения, изложенные в начале статьи, указывают на то, что непрерывная модель пути может быть использована в диапазоне низкой частоты, а в случае высокочастотных колебаний следует использовать дискретную модель железнодорожного пути.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шахуняц Г. М. Железнодорожный путь. М.: Транспорт, 1987. 479 с.
2. Крысов С. В., Устинова Г. В., Уткин Г. А. К вопросу о движении нагрузки вдоль балки на упругом основании//Проблемы машиностроения. Киев: 1985. Вып. 23. С. 28—32.
3. Крысов С. В., Холуев В. В. Силы сопротивления движению постоянных нагрузок вдоль упругих направляющих//Динамика систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1985. С. 142—149.
4. Крысов С. В., Холуев В. В. Силы сопротивления движению переменных нагрузок по рельсовому пути//Машиноведение. 1988. № 1. С. 91—94.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
6. Белоцерковский П. М. Параметрические колебания колеса железнодорожного экипажа, связанные с шагом шпал//Математические методы и задачи функционирования транспортных систем. М.: МИИТ, 1992. Вып. 966. С. 15—24.
7. Frederick C. O. Theory of rail corrugations//Contact mechanics and wear of rail/rowheel systems. Proc. of 2nd. Int. Conf. Rhode Island: 1986. P. 3—30.
8. Clark R. A., Dean P. A., Elkins J. A., Newton S. G. An investigation into dynamic effects of railway vehicles running on corrugated rails//J. Mech. Engng Sci. 1982. V. 24. No. 2. P. 65—76.
9. Sibael Z. Vertikale Gleisdynamik beim Abrollen eines Radsatzes — Behandlung im Frequenzbereich. Düsseldorf: Fortschritte Ber. VDI, Reihe 11. No. 165. 1992. 174 s.

10. Grassie S. L., Gregory R. W., Harrison D., Johnson K. L. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation//J. Mech. Engng. Sci. 1982. V. 24. No. 2. P. 77—90.
11. Ripke B., Knothe K. Die unendlich lange Schiene auf diskreten Schwellen bei harmonischer Einzellasterregung. Düsseldorf: Fortschritte Ber. VDI. Reihe 11. No. 155. 1991, 54 s.
12. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
13. Филиппов А. И. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
14. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 231 с.
15. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
16. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.1993