

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. Г. Г. БУЛЫЧЕВ, С. Г. ПШЕНИЧНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

При изучении нестационарных процессов в оболочках в случае ударных внешних воздействий распространенный подход, заключающийся в замене исходных трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела приближенными двумерными уравнениями и основанный на некоторых геометрических и физических предпосылках, зачастую приводит к большим погрешностям [1, 2]. Несмотря на достигнутые успехи в решении этой проблемы (см. [3, 4]), разработка общей теории и методов исследования нестационарной динамики оболочек в настоящее время не завершена.

В публикуемой работе приведены результаты параметрического исследования напряженно-деформированного состояния упругой цилиндрической оболочки при ударных осесимметричных внешних воздействиях. Расчеты проведены на основе точных уравнений механики деформируемого твердого тела с помощью метода пространственных характеристик. Установлено, что для рассматриваемого класса нагрузок характер изменения во времени тангенциальных усилий в оболочке при прочих равных условиях слабо зависит от ее толщины не только в случае, когда моменты малы, но и тогда, когда их нельзя считать таковыми.

1. В задачах нестационарной динамики использование вместо приближенных уравнений теории оболочек уравнений механики деформируемого твердого тела существенно повышает точность решения, однако, увеличивает объем вычислений. Одним из наиболее эффективных методов численного решения нестационарных динамических задач является метод пространственных характеристик, согласно которому исходная система уравнений приводится к характеристической форме [5, 6], а затем численно интегрируется. По сравнению с другими численными методами указанный метод обладает рядом преимуществ: максимально сближены области зависимости дифференциальных характеристических уравнений и их конечно-разностных аналогов, а также обеспечена устойчивость и одинаковая точность расчета во всех точках рассматриваемого тела. Это приводит к существенному снижению затрат машинных ресурсов, давая возможность проводить вычисления на ПЭВМ.

Высокое качество построенных численных алгоритмов метода пространственных характеристик было подтверждено более ранними исследованиями одного из авторов данной статьи. Так, в задачах об ударе по балке, а также по тонкостенному коробу было установлено [7], что устойчивость счета не нарушается от момента приложения ударной нагрузки вплоть до выхода на квазистатический режим, при этом материал считался обладающим малой вязкостью, влияние которой сравнимо с влиянием аппроксимационной вязкости численной схемы. Более того, ошибки вычислений даже за столь большой промежуток времени накапливаются незначительно. Об этом свидетельствует тот факт, что полученные в результате выхода процесса на установившийся режим квазистатические решения практически совпадают с решениями соответствующих задач статики и удовлетворяют известным гипотезам статической теории балок или — в случае короба — теории оболочек.

Таким образом, преимущества метода пространственных характеристик, а также достаточно подробные предварительные исследования послужили причиной выбора указанного метода для проведения расчетов, результаты которых представлены в данной статье; все расчеты выполнены на РС-АТ 286.

Рассмотрим осесимметричные нестационарные процессы в круговой цилиндрической оболочке как в трехмерном теле, не принимая каких-либо гипотез, связанных с малостью ее толщины. Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z и обозначим v_r, v_z — радиальную и осевую физические компоненты вектора скорости частиц, $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$ — физические компоненты тензора напряжений. Будем считать деформации малыми, а материал оболочки линейно-упругим и изотропным. Тогда, с учетом уравнений движения, соотношений Коши и закона Гука, получим систему из шести линейных уравнений относительно указанных шести неизвестных (исключив деформации), которая приводится к характеристической форме и далее численно интегрируется с учетом начальных и граничных условий.

Рассмотрим случай, когда боковая поверхность оболочки свободна, один из торцов жестко заделан, а по другому в момент времени $t = 0$ производится осесимметричный продольный удар нагрузкой. Предполагается, что до момента удара оболочка находилась в недеформированном состоянии (начальные условия нулевые). Граничные условия имеют вид $\sigma_z = -P_0 f(t)$, $\sigma_{rz} = 0$ при $z = 0$, $t > 0$; $v_r = v_z = 0$ при $z = L$; $\sigma_r = \sigma_{rz} = 0$ при $r = R \pm h/2$, где R, L, h — радиус срединной поверхности, длина и толщина оболочки, P_0 — константа размерности напряжения.

Введем безразмерные величины $u_r = v_r/c$, $u_z = v_z/c$, $p_r = \sigma_r/\sigma_0$, $p_\theta = \sigma_\theta/\sigma_0$, $p_z = \sigma_z/\sigma_0$, $p_{rz} = \sigma_{rz}/\sigma_0$, $\tau = t/t_0$, $\xi = r/L$, $\eta = z/L$, $t_0 = L/c$, $\sigma_0 = \rho c^2$, где ρ — плотность, c — скорость продольных волн в материале оболочки. Введем также безразмерные усилия и моменты $N_z = T_z/T_0$, $N_\theta = T_\theta/T_0$, $G_z = M_z/M_0$, $G_\theta = M_\theta/M_0$, $T_0 = \sigma_0 L$, $M_0 = \sigma_0 L^2$, где $T_z, T_\theta, M_z, M_\theta$ — тангенциальные усилия и изгибающие моменты, которые определяются после расчета напряжений в оболочке как в трехмерном теле по обычным формулам

$$T_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) d\xi, \quad T_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta d\xi$$

$$M_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \xi d\xi, \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta \xi d\xi, \quad \xi = r - R$$

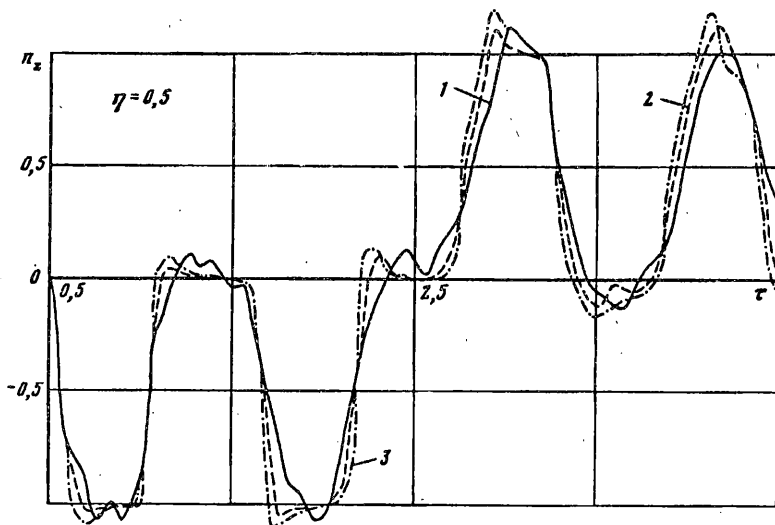
Нетрудно видеть, что решение сформулированной начально-краевой задачи для безразмерных скоростей и напряжений зависит от вида функции $f(t)$, а также от четырех безразмерных параметров: $\varepsilon = h/R$, $\beta = R/L$, $\alpha = P_0/\sigma_0$ и коэффициента Пуассона ν .

Характер изменения во времени внешней нагрузки выбран в виде короткого импульса $f(t) = 1$ ($\tau \leq 0,5$), $f(t) = 0$ ($\tau > 0,5$). Величина β взята равной единице и не менялась в процессе расчетов, значение же ε варьировалось в пределах от $\varepsilon_1 = 0,025$ до $\varepsilon_2 = 0,1$; коэффициент Пуассона принят равным 0,3. Для α взято соотношение $\alpha = \gamma/\varepsilon$, где $\gamma = \text{const}$, в результате чего безразмерное усилие N_z на торце $z = 0$ становится не зависящим от ε : $N_z(0, \tau) = N_0 f(t)$, $N_0 = \gamma\beta$.

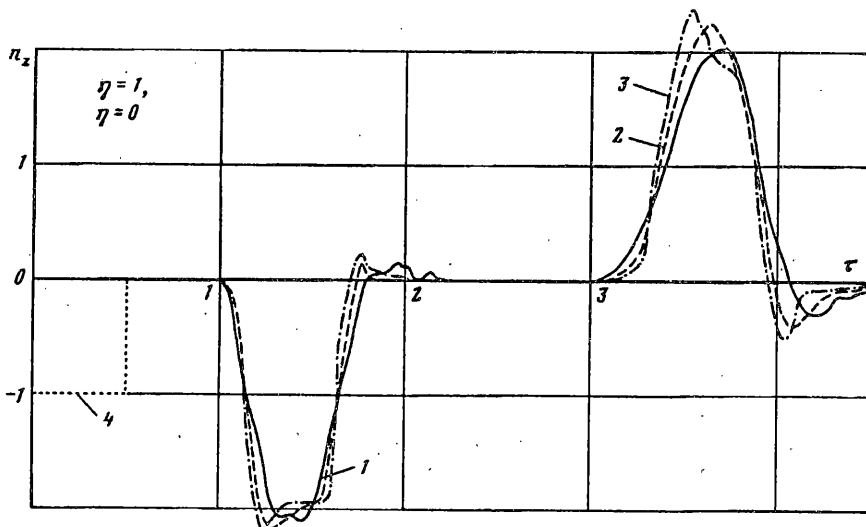
При численном моделировании однородные краевые условия задавались точно, а $f(t)$ аппроксимировалась функцией

$$f_\alpha = \begin{cases} 0, & \tau = 0 \\ 1, & \lambda \leq \tau \leq 0,5 - \lambda \\ 0, & \tau \geq 0,5, \quad \lambda = \lambda_\xi = \lambda_\eta = \lambda_\tau \end{cases}$$

где $\lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\tau$ — соответственно пространственные и временной шага ин-



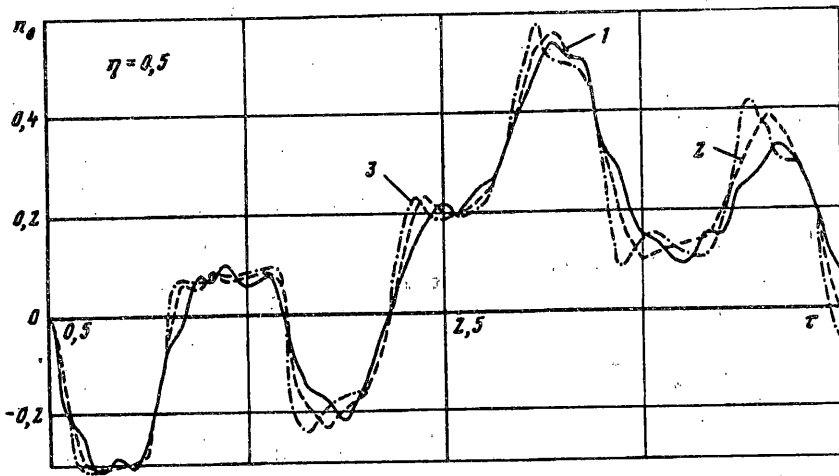
Фиг. 1



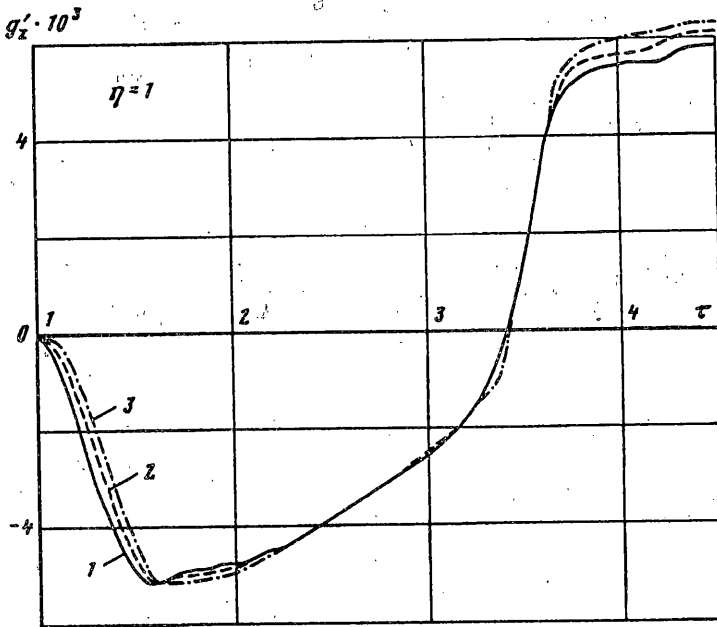
Фиг. 2

тегрирования. Их равенство в данном случае обуславливается спецификой метода пространственных характеристик, а также требованиями наилучшей аппроксимации и устойчивости алгоритмов. Следует отметить, что в процессе численного моделирования устойчивость счета сохранялась во всем рассматриваемом диапазоне изменения времени при всех выбранных вариантах исходных данных.

На фиг. 1—3 представлен ряд характерных графиков зависимости от времени безразмерных усилий, пронормированных на амплитуду N_0 : $n_z = N_z/N_0$, $n_\theta = N_\theta/N_0$ в разных сечениях оболочки при различных значениях ε . Фиг. 1 соответствует изменению во времени n_z при $\eta = 0,5$, фиг. 2 — n_z при $\eta = 1$ и $\eta = 0$, фиг. 3 — n_θ при $\eta = 0,5$. На каждой из фигур кривые 1—3 соответствуют $\varepsilon = 0,1; 0,05; 0,025$, при этом кривая 4 на фиг. 2 изображает зависимость $n_z(0, \tau)$ (здесь и далее отрицательные усилия соответствуют сжатию).



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 представлена зависимость от времени величины $g'_2 = g_2 \varepsilon_2 / \varepsilon$, где $g_2 = G_2 / N_0$, при $\eta = 1$ для $\varepsilon = 0,1; 0,05; 0,025$ (кривые 1—3). Моменты G_2, G_0 в сечениях $\eta = 0$ и $\eta = 0,5$, а также G_0 при $\eta = 1$ изменяются в пределах, существенно меньших, чем G_2 при $\eta = 1$.

Результаты, представленные на фиг. 1—4, получены с использованием при расчетах четырех ячеек по толщине оболочки, т. е. при $\lambda = 0,25h/L$. Как показали соответствующие исследования, уменьшение шага интегрирования до $\lambda = 0,125h/L$ на результатах расчетов практически не сказывается.

Из рисунков видно, что при продольном торцевом ударе даже по достаточно короткой оболочке характер изменения во времени усилий, а также величины $g'_2(1, \tau)$ практически не зависит от ε . Естественное предположение о справедливости

ности подобного результата и для меньших ε дает возможность без дополнительных расчетов оценить характер изменения во времени усилий в разных сечениях, а также момента M_z в заделке для оболочки с теми же параметрами β и ν , но гораздо более тонкой, для которой проведение численных расчетов потребовало бы гораздо больших машинных ресурсов.

В данной задаче слабая зависимость усилий от ε вполне согласуется с представлениями теории оболочек. Как показали расчеты, здесь моменты относительно невелики, поэтому описание динамического процесса в рамках той или иной теории оболочек [8] допускает возможность принятия с некоторой погрешностью гипотезы о безмоментном состоянии. Принятие же подобной гипотезы ведет к тому, что уравнения теории оболочек становятся независимыми от параметра ε .

2. Рассмотрим другой вариант внешнего воздействия. Пусть по изначально недеформированной оболочке длиной $2L$ в момент $t = 0$ производится осесимметричный удар внутренним давлением, равномерно распределенным на участке $|z| \leq L/2$ (здесь начало координат помещено в среднем поперечном сечении оболочки). Оба торца считаем жестко заделанным, и, таким образом, задача, кроме оси симметрии, имеет плоскость симметрии $z = 0$. Далее будем рассматривать только одну половину оболочки ($0 \leq z \leq L$). Граничные условия принимают вид

$$v_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad \text{при } z = 0$$

$$v_r = v_z = 0 \quad \text{при } z = L$$

$$\sigma_r = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{при } r = R + h/2$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_r = -Q_0 \psi(z) \varphi(t) \quad \text{при } r = R - h/2, \quad t > 0$$

$$\psi(z) = 1 \quad (|z| \leq L/2), \quad \psi(z) = 0 \quad (L/2 < |z| \leq L)$$

где Q_0 — константа размерности напряжения.

В случае внутреннего давления все соотношения для безразмерных величин остаются теми же, что и при торцевом ударе, с той лишь разницей, что теперь L является половиной всей длины оболочки. Как и при торцевом ударе, решение для безразмерных скоростей и напряжений зависит от одной функции $\varphi(t)$ и четырех параметров ν , ε , β и $\kappa = Q_0/\sigma_0$.

Функция $\varphi(t)$ выбрана такой же, как $f(t)$ (однако, теперь в соотношении для τ величина t_0 — время пробега продольной волны по половине всей длины оболочки); по-прежнему $\nu = 0,3$; $\beta = 1$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$. Параметр κ взят постоянным и не зависящим от ε .

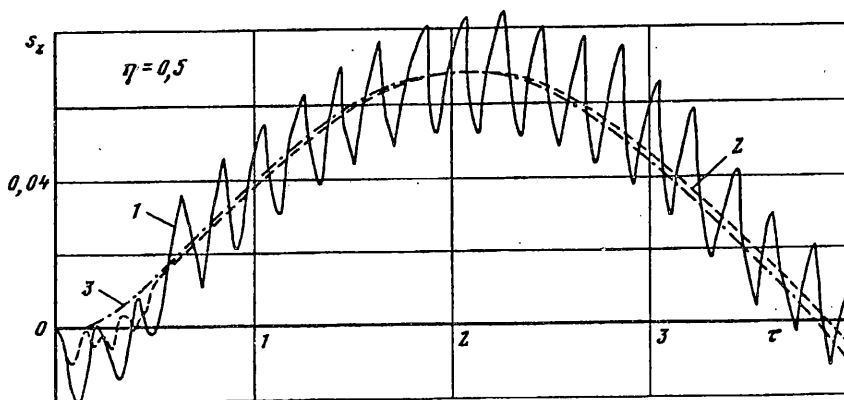
При численном моделировании однородные краевые условия задавались точно, а $\varphi(t)$ и $\psi(z)$ аппроксимировались функциями:

$$\varphi_a = \begin{cases} 0, & \tau = 0 \\ 1, & \lambda \leq \tau \leq 0,5 - \lambda \\ 0, & \tau \geq 0,5 \end{cases} \quad \psi_a = \begin{cases} 1, & |\eta| \leq 0,5 - \lambda \\ 0, & 0,5 \leq |\eta| \leq 1 \end{cases}$$

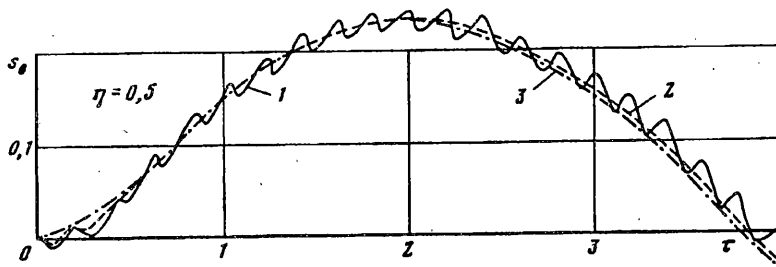
Как и в предыдущей задаче, устойчивость счета сохранялась во всем рассматриваемом диапазоне изменения времени при всех вариантах исходных данных.

Изменение во времени величин $s_z = N_z/\kappa$, $s_\theta = N_\theta/\kappa$, представляющих собой усилия, пронормированные на амплитуду внешнего воздействия, в сечении $\eta = 0,5$ представлено на фиг. 5, 6. Как и ранее, кривые 1, 2, 3 соответствуют $\varepsilon = 0,1$; 0,05; 0,025. Для наиболее толстой оболочки на графиках видны биения вокруг некоторой средней линии.

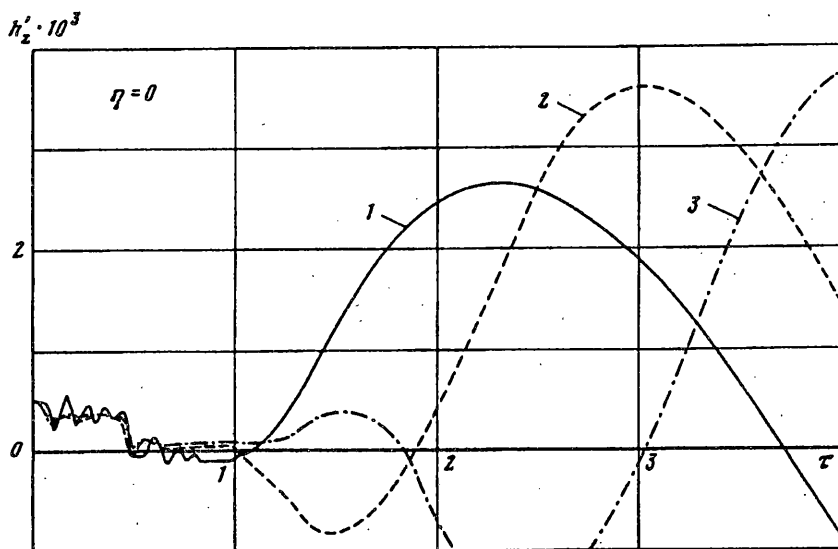
Для моментов простых зависимостей от параметра ε обнаружить не удастся. На фиг. 7—10 для разных сечений оболочки представлено несколько характерных графиков изменения во времени величин



Фиг. 5



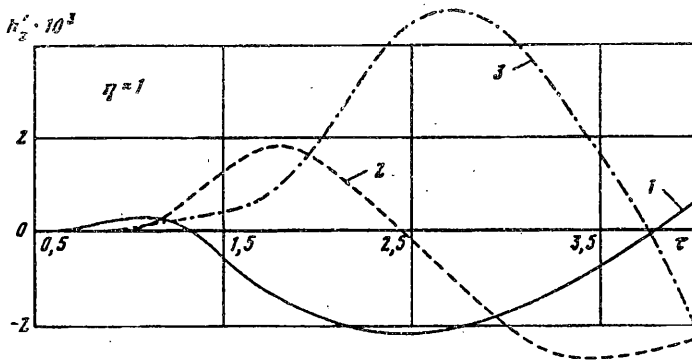
Фиг. 6



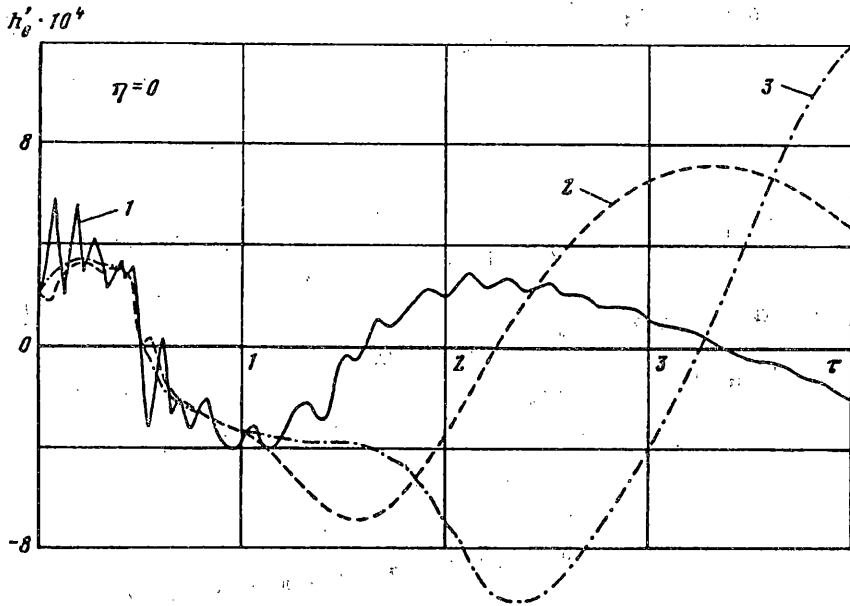
Фиг. 7

$h'_z = h_z (\varepsilon_2/\varepsilon)^2$, $h'_0 = h_0 (\varepsilon_2/\varepsilon)^2$, где $h_z = G_z/\kappa$, $h_0 = G_0/\kappa$ (кривые 1, 2, 3 соответствуют $\varepsilon = 0,1; 0,05; 0,025$).

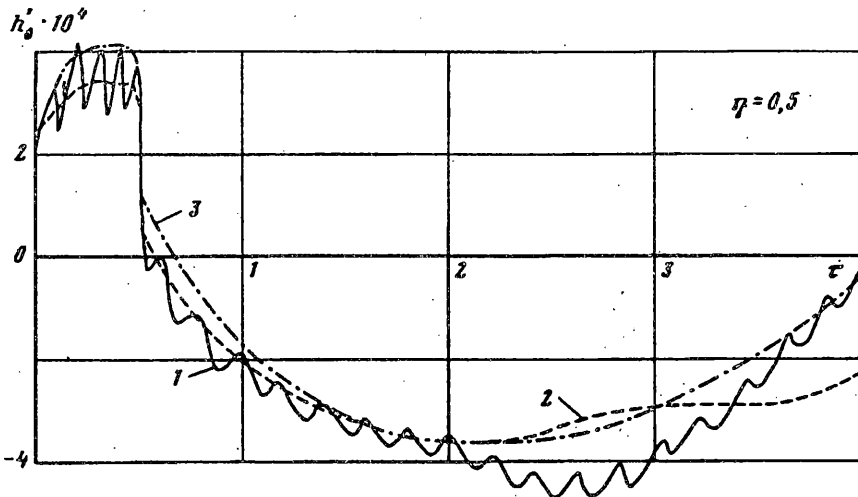
Результаты, представленные на фиг. 5—10, получены при четырех расчетных ячейках по толщине оболочки, т. е. при $\lambda = 0,25h/L$. Уменьшение шага интегрирования до $\lambda = 0,125h/L$ сказывается незначительно.



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Как видно из графиков, на начальной стадии нестационарного процесса (в диапазоне времени порядка t_0) для моментов до некоторой степени сохраняется квадратичная зависимость от ε , которая затем нарушается. Тем не менее, на характер изменения во времени безразмерных тангенциальных усилий величина ε , как и в случае торцевого удара, практически не влияет, если не считать биений.

Представленные результаты не противоречат явно оболочечным теориям; поскольку напряженно-деформированное состояние здесь существенно моментное, то в рамках той или иной теории оболочечное уравнение в проекциях на нормаль к срединной поверхности будет содержать параметр ε [8]. Это обстоятельство ведет к сильной зависимости от ε кривых, соответствующих изменению во времени величин h_z' и h_0' .

Следует отметить, что когда подверженная удару внутренним давлением изначально недеформированная оболочка является очень длинной $L \gg R$, а давление равномерно распределено на участке, имеющем большую протяженность в направлении продольной оси, тогда слабое влияние ε на характер изменения во времени тангенциальных усилий может быть подтверждено аналитически. Соответствующую задачу вдали от торцов цилиндра для не слишком большого диапазона времени можно считать одномерной. В этом случае для трех искомым функций $v_r(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta(r, t)$ известно точное аналитическое решение. Одна из форм представления такого решения получается как частный случай решения более общей задачи динамики многослойного цилиндра, которое построено в работе [9]. Воспользовавшись формулами [9] с учетом $\varepsilon \ll 1$ и приняв закон изменения во времени внутреннего давления в виде функции Хевисайда $\sigma_r(R - h/2, t) = -Q_0 H(t)$, получим асимптотические выражения

$$v_r(r, t) = \frac{Q_0 c}{2G\varepsilon} \sqrt{1 - 2\nu} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} + \left(\delta + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\nu}{1 - \nu} \right] \sin \omega t + \\ + \frac{Q_0 c (1 - 2\nu)}{\pi G (1 - \nu)} A(r, t) + O(\varepsilon)$$

$$\sigma_r(r, t) = -Q_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{2}{\pi} B(r, t) \right] + O(\varepsilon)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = \frac{Q_0}{\varepsilon} \left[(1 - \varepsilon)(1 - \cos \omega t) + \left(\delta + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{1 - \nu} \cos \omega t \right) \right] - \\ - \frac{2Q_0 \nu}{\pi (1 - \nu)} B(r, t) + O(\varepsilon)$$

$$A(r, t) = -[y(x^+) - y(x^-)]/4, \quad B(r, t) = -[y(x^+) + y(x^-)]/4$$

$$x^\pm = \pi \left[\frac{1}{2} + \frac{\delta}{\varepsilon} \pm \frac{tc}{h} \right], \quad \delta = 1 - \frac{r}{R}, \quad \omega = \frac{\sqrt{1 - 2\nu}}{1 - \nu} \frac{c}{R} (1 + O(\varepsilon^2))$$

где $y(x)$ — определенная на $(-\infty, +\infty)$ функция с периодом 2π , равная x при $-\pi < x < \pi$ и — нулю при $x = \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$; G — модуль сдвига материала оболочки.

В представленных формулах удержаны члены первого порядка малости для того, чтобы показать детальное распределение параметров напряженно-деформированного состояния по толщине оболочки. Однако, если отбросить эти члены, то придем к хорошо известному оболочечному решению, которое представляет собой синусоидальные колебания с частотой $\omega^{(0)} = cR^{-1} (1 - 2\nu)^{1/2} / (1 - \nu)$ и, согласно которому, скорость частиц срединной поверхности оболочки можно записать в форме

$$v^{(0)}(t) = \frac{Q_0 c}{2G\varepsilon} \sqrt{1 - 2\nu} \sin \omega^{(0)} t$$

Из приведенных выше формул видно, что величиной σ , можно пренебречь по сравнению с σ_0 . Для двух оболочек с разными толщинами h и h^* , $h < h^*$, но с одинаковыми радиусами срединной поверхности и параметрами материала при одной и той же нагрузке нетрудно получить соотношения $v_\varepsilon = v_\varepsilon^* + O(\varepsilon^*)$, $T_0 = T_0^* + O(\varepsilon^*)$, заведомо справедливые для моментов времени, лежащих в диапазоне порядка характерного времени R/c . Величины со звездочкой относятся к оболочке, имеющей толщину h^* .

Здесь, как и в случае торцевого удара, независимость усилия от ε можно объяснить также и с позиций теории оболочек безмоментностью напряженно-деформированного состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Селезнев И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
2. Нигул У. К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформаций круговых цилиндрических оболочек // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. С. 593—599.
3. Филиппов И. Г., Чебан В. Г. Математическая теории колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. Кишинев: Штиница, 1988. 190 с.
4. Филиппов И. Г., Кудайназаров К. Общие уравнения поперечных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 4. С. 41—49.
5. Кукуджанов В. Н. Численное решение неоднородных задач распространения волн напряжений в твердых тела. М.: ВЦ АН СССР, 1976. Вып. 6. 67 с.
6. Булычев Г. Г. Характеристическая форма уравнений динамики анизотропных упруговязкопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 2. С. 312—315.
7. Булычев Г. Г. Численное моделирование трехмерных динамических задач вязкоупругости // Расчеты на прочность. Вып. 32. М.: Машиностроение. 1990. С. 33—42.
8. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
9. Булычев Г. Г., Пшеничников С. Г. Динамика многослойного линейно-упругого цилиндра при осесимметричной нагрузке // Строит. механика и расчет сооружений. 1988. № 2. С. 47—50.

Москва

Поступила в редакцию
19.VII.1993