

УДК 539.3

© 1995 г. А. Г. КОЛПАКОВ

К ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

На основе применения асимптотического метода перехода трехмерной задачи теории упругости с начальными напряжениями в тонкой области (толщины $\varepsilon \ll 1$, что формализуется в виде $\varepsilon \rightarrow 0$) к задаче теории пластинок получена предельная (при $\varepsilon \rightarrow 0$) задача теории пластинок с начальными напряжениями. В общем случае (для существенно неоднородных пластинок) она отлична от классической, в случае однородных пластинок — совпадает с классической. Упругие постоянные материала пластинки имеют порядок ε^{-3} (что гарантирует ненулевую предельную, при $\varepsilon \rightarrow 0$, жесткость пластинки [1]). Отличие рассматриваемой задачи от изучавшейся в [1] — несимметрия ее коэффициентов. Это приводит к возникновению новых элементов в применении асимптотического метода и ряда новых задач. Существенную роль, как оказывается, играет порядок начальных напряжений σ_{ij}^* по сравнению с толщиной области ε . Рассматриваются начальные напряжения, соответствующие [1] изгибу пластинки или ее плоской деформации при фиксированных усилиях. Нагружение пластинки в ее плоскости фиксированными деформациями, когда σ_{ij}^* имеют порядок ε^{-3} , приводит к результатам аналогичным полученным в [2, 3] для монолитных тел. Здесь этот случай не рассматривается.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тело периодического строения, полученное путем повторения некоторой ячейки периодичности P_ε (ε ее характерный размер), в плоскости Ox_1x_2 (фигура). Уравнения равновесия (колебаний) пластинки имеют вид [4]:

$$(A_{ijkl}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) u_{k,l}^i)_j = f_i \quad \text{в } Q_\varepsilon \quad (1.1)$$

$$A_{ijkl}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) u_{k,r}^i n_j = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon$$

$$\bar{u}^i(\bar{x}) = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon$$

где Q_ε , S_ε , Γ_ε — область занятая пластинкой и ее поверхности (показаны на фигуре), \bar{u}^i — перемещения, $\bar{f} = (\varepsilon^{-1}f_1, \varepsilon^{-1}f_2, \varepsilon^{-1}f_3)$ — массовые силы (в случае задачи о собственных колебаниях $\bar{f} = \omega \varepsilon^{-1} \rho(\bar{x}/\varepsilon) \bar{u}^i$), ω — собственная частота, A_{ijkl} — известные [4] комбинации тензора упругих постоянных и начальных напряжений.

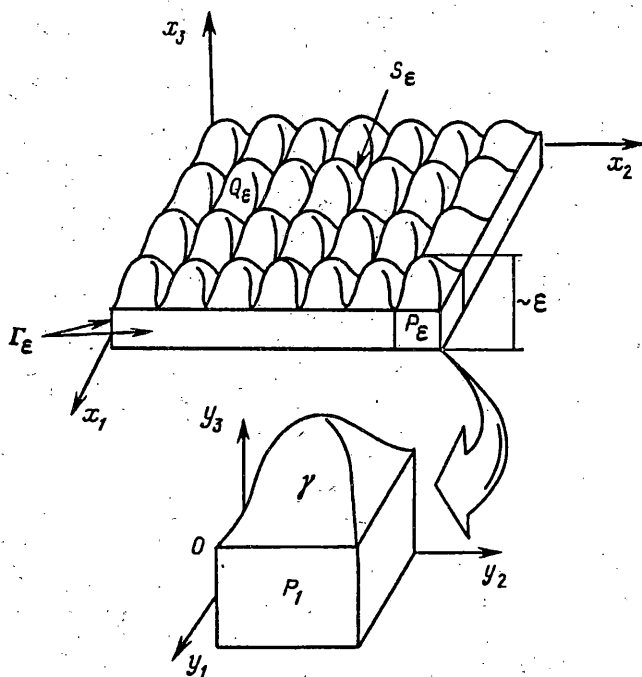
Функции $\rho(\bar{y})$, $a_{ijkl}(\bar{y})$, $\sigma_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})$ периодичны по y_1, y_2 с ячейковой периодичностью S_1 , где S_1 — проекция ячейки $P_1 = \varepsilon^{-1}P_\varepsilon = \{\bar{y} = \bar{x}/\varepsilon; x \in P_\varepsilon\}$ на плоскость Oy_1y_2 .

В рассматриваемом случае [4]:

$$A_{ijkl}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) = \varepsilon^{-3} a_{ijkl}(\bar{x}/\varepsilon) + \varepsilon^{-2} A_{ijkl}^{(-2)}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) + \\ + \varepsilon^{-1} A_{ijkl}^{(-1)}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) + \dots$$

$$A_{ijkl}^{(m)}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) = \sigma_{\mu}^{*(m)}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) \delta_{ik} \quad (m = -2, -1, \dots) \quad (1.2)$$

где δ_{ij} — дельта Кронеккера.



2. Асимптотическое разложение. Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) при $\epsilon \rightarrow 0$. Для чего воспользуемся классическим [1] асимптотическим разложением

$$\bar{u}^\epsilon = \bar{u}^{(0)}(x^\nu) + \epsilon \bar{u}^{(1)}(x^\nu, \bar{y}) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}^{(k)}(x^\nu, \bar{y}),$$

$$\langle \bar{u}^{(k)} \rangle = 0 \text{ при } k \geq 1. \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = \epsilon^{-3} \sigma_{ij}^{(-3)}(x^\nu, \bar{y}) + \epsilon^{-2} \sigma_{ij}^{(-2)}(x^\nu, \bar{y}) + \dots = \sum_{m=-3}^{\infty} \epsilon^m \sigma_{ij}^{(m)}(x^\nu, \bar{y})$$

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\text{mes } S_1} \int_{P_1} (\cdot) dy$$

где $x^\nu = (x_1, x_2)$ — «медленная» переменная в плоскости пластинки S (S — проекция области Q_ϵ на плоскость Ox_1x_2), $\bar{y} = \bar{x}/\epsilon$ — «быстрая» переменная, угловые скобки означают среднее по ячейке периодичности P_1 . Функции в правых частях (3) предполагаются периодическими по y_1, y_2 с ячейкой S_1 .

Изучение задачи (1.1), (1.2) в нуле распадается на два этапа [1]. На первом этапе выводятся уравнения равновесия. Как следует из [1], он не связан с локальными определяющими уравнениями пластинки (в рассматриваемом случае с коэффициентами) и является единым для любых уравнений состояния. Имеют место следующие уравнения для усилий $N_{ij}^{(m)} = \langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle$ и моментов $M_{ij}^{(m)} = \langle y_3 \sigma_{ij}^{(m)} \rangle$ (приводится часть из полученных в [1] уравнений):

$$M_{\alpha\beta, \beta x}^{(m)} = 0 \text{ при } m = -2, -1. \quad (2.2)$$

$$N_{3\alpha, \alpha x}^{(-1)} = f_3 \quad (2.3)$$

где $f_3 = \omega \langle \rho \rangle u_3^{(0)}$ в задаче о собственных колебаниях

$$M_{\beta\alpha, \alpha x}^{(-2)} - N_{\beta\beta}^{(-1)} = 0 \quad (2.4)$$

Причем для локальных функций $\sigma_{ij}^{(m)}$ имеют место соотношения [1]:

$$\sigma_{ij,ly}^{(m)} + \sigma_{ia,ax}^{(m-1)} = f_i^{(m)} \text{ в } Q_i^e \quad (f_i^{(m)} = 0 \text{ при } m \neq 1) \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij,ly}^{(m)} = 0 \text{ на } \gamma$$

$$Q_i^e = \{(x_1, x_2, y_3 = x_3/\varepsilon): \bar{x} \in Q_e\}$$

где γ — боковая (свободная) поверхность Q_i^e .

Соотношения (2.2)—(2.5) не зависят от определяющих соотношений. Здесь и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; греческие — 1, 2 ($i, y = \partial/\partial y_i$, $\alpha, x = \partial/\partial x_\alpha$).

Замечание 1. Под напряжениями σ_{ij} в пластинке далее понимаются величины

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} u_{k,l}^e = (\varepsilon^{-3} a_{ijkl} + \varepsilon^{-2} A_{ijkl}^{(-2)} + \varepsilon^{-1} A_{ijkl}^{(-1)} + \dots) u_{k,l}^e \quad (2.6)$$

Второй этап анализа задач — получение определяющих соотношений для пластинки, устанавливающих связь $N_{ij}^{(m)}$, $M_{ij}^{(m)}$ с деформационными характеристиками пластинки. Этот этап, в отличие от предыдущего, самым существенным образом связан с определяющими уравнениями материала пластинки (с начальными напряжениями — в нашем случае). Этот этап является основным в публикуемой работе.

Замечание 2. Операторы дифференцирования при использовании двухмасштабного разложения представляются в виде суммы операторов $\partial/\partial x_i$ и $\partial/\partial y_i$. Для функций аргументов $x^\nu = (x_1, x_2)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$, входящих в правые части (2.1), это представление принимает вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_3}$$

Подставив (2.1) в (2.6) с учетом замечания 2 получаем

$$\sum_{m=-3}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\varepsilon^{-3} a_{ijkl} + \varepsilon^{-2} A_{ijkl}^{(-2)} + \varepsilon^{-1} A_{ijkl}^{(-1)} + \dots) (u_{k,ax}^{(k)} + \varepsilon^{-1} u_{k,ly}^{(k)}) \quad (2.7)$$

Приравнявая в (2.6) члены при одинаковых степенях ε , получаем

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijka} u_{k,ax}^{(0)} + a_{ijkl} u_{k,ly}^{(1)} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{ij}^{(-2)} = a_{ijka} u_{k,ax}^{(1)} + A_{ijka}^{(-2)} u_{k,ax}^{(0)} + a_{ijkl} u_{k,ly}^{(2)} + A_{ijkl}^{(-2)} u_{k,ly}^{(1)} \quad (2.9)$$

$$\sigma_{ij}^{(-1)} = a_{ijka} u_{k,ax}^{(2)} + A_{ijka}^{(-2)} u_{k,ax}^{(1)} + A_{ijka}^{(-1)} u_{k,ax}^{(0)} + a_{ijkl} u_{k,ly}^{(3)} + A_{ijkl}^{(-2)} u_{k,ly}^{(2)} + A_{ijkl}^{(-1)} u_{k,ly}^{(1)} \quad (2.10)$$

Рассмотрим задачу (2.5) при $m = -3$ (2.8), с условиями из (2.1) $\bar{u}^{(1)}$ периодична по y_1, y_2 с ячейкой S_1 и $\langle \bar{u}^{(1)} \rangle = 0$. Ее решение может быть получено в виде (x^ν играет роль параметра):

$$\bar{u}^{(1)} = \bar{N}^{\beta\alpha(0)}(\bar{y}) u_{\beta,ax}^{(0)}(x^\nu) - y_3 u_3^{(0)}(\bar{x}) e_\alpha + u^\nu(x^\wedge) \quad (2.11)$$

где \bar{e}_α — базисные векторы системы координат. $\bar{N}^{\beta\alpha(\nu)}(\bar{y})$ ($\nu = 0, 1$) — решение так называемой ячейечной задачи теории упругости для пластинок, введенной в [1]:

$$(a_{ijkl}(\bar{y}) N_{k,ly}^{\beta\alpha(\nu)} + y_3^{\nu} a_{ij\beta\alpha}(\bar{y}))_{,ly} = 0 \text{ в } P, \quad (2.12)$$

$$(a_{ijkl}(\bar{y}) N_{k,ly}^{\beta\alpha(\nu)} + y_3^{\nu} a_{ij\beta\alpha}(\bar{y})) u_j = 0 \text{ на } \gamma_1$$

$\overline{N}^{\beta\alpha(v)}(\overline{y})$ периодична по y_1, y_2 на S_1 и $\langle \overline{N}^{\beta\alpha(v)} \rangle = 0$; γ_1 — боковая (свободная) поверхность P_1 . При этом учтено, что [1]:

$$\overline{N}^{\beta\alpha(0)}(\overline{y}) = -y_3 \overline{e}_\alpha \quad (2.13)$$

Подстановка (2.12) в (2.8) дает равенство

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = (a_{i\beta\alpha}(\overline{y}) + a_{ijkl}(\overline{y}) N_{k,ly}^{\beta\alpha(0)}(\overline{y})) u_{\beta, \alpha x}^0(x^\wedge)$$

усредняя которое по ячейке P_1 с учетом (2.2) получим

$$\langle (a_{i\beta\alpha} + a_{ijkl} N_{k,ly}^{\beta\alpha(0)}) u_{\beta, \alpha x}^{(0)} \rangle_{\beta x} = 0 \quad (2.14)$$

Дополненное условием $u_\alpha(x^\vee) = 0$ на ∂S ($\alpha = 1, 2$) (следует из подстановки разложения (2.1) в краевое условие на Γ_1 из (1.2)), это уравнение дает $u_\alpha(x^\vee) = 0$ ($\alpha = 1, 2$). В результате будем иметь

$$\overline{u}^{(1)} = -y_3 u_{3, \alpha x}^{(0)}(x^\vee) \overline{e}_\alpha + u^\wedge(x^\vee) \quad (2.15)$$

Подстановка (2.15) в (2.8) дает

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = 0 \quad (2.16)$$

а подстановка (2.15) в (2.9) приводит к зависимости

$$\sigma_{ij}^{(-2)} = a_{ijkl}(\overline{y}) u_{k,ly}^{(2)} + a_{i\beta\alpha}(\overline{y}) u_{3, \alpha\beta x}^{(0)}(x^\vee) + \quad (2.17)$$

$$+ a_{ijkl}(\overline{y}) u_{k, \alpha x}^\wedge(x^\vee) + [A_{i\beta\alpha}^{(-2)}(x^\vee, \overline{y}) - A_{i\alpha\beta}^{(-2)}(x^\vee, \overline{y})] u_{3, \alpha x}^{(0)}(x^\vee)$$

Рассмотрим решение задачи (5) при $m = -2$ (принимая во внимание (2.16), (2.17) с условием $\overline{u}^{(2)}$ периодична по y_1, y_2 с ячейкой S_1 и $\langle \overline{u}^{(2)} \rangle = 0$). Ее решение может быть получено в виде

$$\begin{aligned} \overline{u}^{(2)} = & \overline{N}^{\alpha\beta(1)}(\overline{y}) u_{3, \alpha\beta x}^{(0)}(x^\vee) + \overline{N}^{\alpha\beta(0)}(\overline{y}) u_{\alpha, \beta x}^\wedge(x^\vee) - \\ & - y_3 \overline{e}_\alpha u_{3, \alpha x}^\wedge(x^\vee) + \overline{M}^{\alpha(-2)}(\overline{y}) u_{3, \alpha x}^{(0)} + u^\wedge(x^\vee) \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $M^{\alpha(m)}(\overline{x}, \overline{y})$ — решение ячеечной задачи:

$$(a_{ijkl}(\overline{y}) M_{k,ly}^{\alpha(m)} + \sigma_{\beta}^{*(m)}(x^\vee, \overline{y}) \delta_{ja} - \sigma_{ia}^{*(m)}(x^\vee, \overline{y}) \delta_{\beta})_{,j} = 0 \text{ в } P_1 \quad (2.19)$$

$$(a_{ijkl}(\overline{y}) M_{k,ly}^{\alpha(m)} + \sigma_{\beta}^{*(m)}(x^\vee, \overline{y}) \delta_{ja} - \sigma_{ia}^{*(m)}(x^\vee, \overline{y}) \delta_{\beta}) n_j = 0 \text{ на } \gamma_1$$

$\overline{M}^{\alpha(m)}$ периодична по y_1, y_2 ячейкой S_1 и $\langle \overline{M}^{\alpha(m)} \rangle = 0$.

Замечание 3. Коэффициенты $A_{ijkl}^{(m)} = \sigma_{jl}^{*(m)} \delta_{ik}$ ($m = -2, -1$) несимметричны. В частности

$$A_{i\beta\alpha}^{(m)} - A_{i\alpha\beta}^{(m)} = \sigma_{\beta}^{*(m)} \delta_{ja} - \sigma_{ia}^{*(m)} \delta_{\beta} \quad (2.20)$$

Подстановка (2.18) в (2.17) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-2)} = & (a_{i\beta\alpha}(\overline{y}) y_3 + a_{ijkl}(\overline{y}) N_{k,ly}^{\alpha\beta(1)}(\overline{y})) u_{3, \alpha\beta x}^{(0)}(x^\vee) + \\ & + (a_{i\beta\alpha}(\overline{y}) + a_{ijkl}(\overline{y}) N_{k,ly}^{\alpha\beta(0)}(\overline{y})) u_{\alpha, \beta x}^\wedge(x^\vee) + \\ & + (\sigma_{\beta}^{*(-2)}(x^\vee, \overline{y}) \delta_{ja} - \sigma_{ia}^{*(m)}(x^\vee, \overline{y}) \delta_{\beta} + a_{ijkl}(\overline{y}) \times \\ & \times M_{k,ly}^{\alpha(-2)}(x^\vee, \overline{y})) u_{3, \alpha x}^{(0)}(x^\vee) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Усредняя по ячейке P_1 равенство (2.21) и его же умноженное на y_3 , получаем следующую группу определяющих соотношений:

$$N_{\gamma\delta}^{(-2)} = A_{\gamma\delta\alpha\beta}^1 u_{3, \alpha\beta x}^{(0)} + A_{\gamma\delta\alpha\beta}^0 u_{\alpha, \beta x}^\wedge + S_{\gamma\delta\alpha}^0 u_{3, \alpha x}^{(0)} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
M_{\gamma\delta}^{(-2)} &= A_{\gamma\delta\alpha\beta}^2 u_{3,\alpha\beta\gamma}^{(0)} + A_{\gamma\delta\alpha\beta}^1 u_{\alpha,\beta\gamma}^\wedge + S_{\gamma\delta\alpha}^1 u_{3,\alpha\gamma}^{(0)} \\
A_{\gamma\delta\alpha\beta}^{v+\mu} &= \langle (a_{\gamma\delta\alpha\beta} + a_{\gamma\delta k l} N_{k,l,y}^{\alpha\beta(v)}) y_3^\mu \rangle \\
S_{\gamma\delta\alpha}^\mu &= \langle a_{\gamma\delta k l} M_{k,l,y}^{\alpha(-2)} y_3^\mu \rangle \quad (v, \mu = 0, 1)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

При отсутствии начальных напряжений, когда $\sigma_{ij}^{*(-1)} = \sigma_{\mu}^{*(-1)}$, имеем $N_{3\beta}^{(-1)} = N_{\beta 3}^{(-1)}$; дальнейший анализ определяющих уравнений не проводился [1], поскольку указанная симметрия позволяет исключить из (2.3), (2.4) величины $N_{3\beta}^{(-1)}$, $N_{\beta 3}^{(-1)}$ без какой-либо дополнительной информации о них. В рассматриваемом случае $N_{ij}^{(-1)}$ не обладают указанной симметрией и для получения предельной задачи требуется продолжить исследование асимптотики (2.1), конкретно, рассмотреть $N_{ij}^{(-1)}$.

Подставим (2.18), (2.15) в (2.10), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(-1)} &= a_{ijkl}(\bar{y}) u_{k,ly}^{(3)} + a_{ijkl}(\bar{y}) N_k^{\alpha\beta(1)}(\bar{y}) u_{3,\alpha\beta\gamma\gamma}^{(0)}(x^v) + \\
&+ a_{ijkl}(\bar{y}) N_k^{\alpha\beta(0)}(\bar{y}) u_{\alpha,\beta\gamma\gamma}^\wedge(x^v) - a_{i\beta\alpha}(\bar{y}) y_3 u_{3,\beta\alpha\alpha}^\wedge(x^v) + \\
&+ [a_{ijkl}(\bar{y}) M_k^{\alpha(-2)}(x^v, \bar{y}) - A_{i\beta\alpha}^{(-2)}(x^v, \bar{y}) y_3 + A_{ijkl}^{(-2)}(x^v, \bar{y}) \times \\
&\times N_{k,ly}^{\alpha\beta(1)}(\bar{y})] u_{3,\alpha\beta\gamma}^{(0)}(x) + [A_{i\alpha\beta}^{(-2)}(x^v, \bar{y}) + A_{ijkl}^{(-2)}(\bar{y}) \times \\
&\times N_{k,ly}^{\alpha\beta(0)}(\bar{y})] u_{\alpha,\beta\gamma}^\wedge(x^v) + [A_{i\beta\alpha}^{(-1)}(x^v, \bar{y}) - A_{i\alpha\beta}^{(-1)}(x^v, \bar{y}) + \\
&+ A_{ijkl}^{(-2)}(x^v, \bar{y}) M_{k,ly}^{\alpha(-2)}(x^v, \bar{y})] u_{3,\alpha\gamma}^{(0)}(x^v) + [A_{i\beta\alpha}^{(-2)}(x^v, \bar{y}) - \\
&- A_{i\alpha\beta}^{(-2)}(x^v, \bar{y})] u_{3,\alpha\alpha}^\wedge(x^v) + a_{ijka}(\bar{y}) u_{k,\alpha\alpha}^\wedge(x^v)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Отметим, что несимметричные по i, j члены входят в правой части (2.24) только в выражения в квадратных скобках. Тогда усилия $N_{ij}^{(-1)}$ представимы в виде

$$\begin{aligned}
N_{ij}^{(-1)} &= F_{ij} + \langle A_{i\beta\alpha}^{(-2)} y_3 + A_{ijkl}^{(-2)} N_{k,ly}^{\alpha\beta(1)} \rangle u_{3,\alpha\beta\gamma}^{(0)} + \\
&+ \langle A_{i\alpha\beta}^{(-2)} + A_{ijkl}^{(-2)} N_{k,ly}^{\alpha\beta(0)} \rangle u_{\alpha,\beta\gamma}^\wedge + \langle A_{i\beta\alpha}^{(-1)} - \\
&- A_{i\alpha\beta}^{(-1)} + A_{ijkl}^{(-2)} M_{k,ly}^{\alpha(-2)} \rangle u_{3,\alpha\alpha}^{(0)} + \langle A_{i\beta\alpha}^{(-2)} - A_{i\alpha\beta}^{(-2)} \rangle u_{3,\alpha\alpha}^\wedge
\end{aligned} \tag{2.25}$$

где F_{ij} симметричны по i, j .

Уравнение (2.5) при $m = -1$ в рассматриваемом случае принимает форму

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(-1)} &= -(\sigma_{ia}^{(-2)} - N_{ia}^{(-2)})_{,\alpha\alpha} = \\
&= (a_{i\alpha\beta\gamma}(\bar{y}) y_3 + a_{iakl}(\bar{y}) N_{k,ly}^{\alpha\beta(1)}(\bar{y}) - A_{i\alpha\gamma\beta}^1) \times \\
&\times u_{3,\gamma\alpha\beta\alpha\alpha}^{(0)}(x^v) + (a_{i\alpha\beta\gamma}(\bar{y}) + a_{iakl}(\bar{y}) N_{k,ly}^{\alpha\beta(0)}(\bar{y}) - \\
&- A_{i\alpha\gamma\beta}^1) u_{\gamma,\beta\alpha\alpha\alpha}^\wedge(x^v) + (\sigma_{\alpha\beta}^{*(-2)}(x^v, \bar{y}) \delta_{\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^{*(-2)}(x^v, \bar{y}) \delta_{\beta}) + \\
&+ a_{iakl}(ij) M_{k,ly}^{\beta(-2)}(x^v, \bar{y}) u_{3,\alpha\alpha}^{(0)}(x^v)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Здесь учтено (2.2) при $m = -2$ и (2.21). Решение (2.26), (2.24) с условием $\bar{u}^{(3)}$ периодична по y_1, y_2 с ячейкой S_1 и $\langle \bar{u}^{(3)} \rangle = 0$, может быть получено в виде

$$\begin{aligned}
\bar{u}^{(3)} &= \bar{M}^{\alpha\beta\gamma(1)}(\bar{y}) u_{3,\alpha\beta\gamma\gamma}^{(0)}(x^v) + \bar{M}^{\alpha\beta\gamma(0)}(\bar{y}) \times u_{\alpha,\beta\gamma\gamma}^\wedge(x^v) \\
&- \bar{N}^{\beta\alpha(1)}(\bar{y}) u_{3,\beta\alpha\alpha\alpha}^\wedge + \bar{\mu}^{\alpha\beta}(x^v, \bar{y}) u_{3,\alpha\beta\gamma}^{(0)}(x^v) + \\
&+ \bar{N}^{\alpha\beta}(x^v, \bar{y}) u_{\alpha,\beta\gamma}^\wedge(x^v) + \bar{M}^{\alpha}(x^v, \bar{y}) u_{3,\alpha\alpha}^{(0)}(x^v) +
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$+ \overline{M}^{\alpha(-2)}(x^\nu, \overline{y}) u_{3, \alpha x}^\wedge(x^\nu) + \overline{N}^{\beta\alpha(0)}(\overline{y}) u_{\alpha, \beta x}^\wedge(x^\nu) - \\ - y_3 \overline{e}_\alpha u_{3, \alpha x}^\wedge(x^\nu) + u^{\wedge*}(x^\nu)$$

Входящие в (2.27) функции являются решениями следующей задачи:

$$(a_{ijk}(\overline{y}) Y_{k,ij} + Z_{ij}(\overline{x}, \overline{y}))_{,jy} = F_i \text{ в } P_i$$

$$(a_{ijk}(\overline{y}) Y_{k,ij} + Z_{ij}(\overline{x}, \overline{y})) n_j = 0 \text{ на } \gamma_i$$

(\overline{Y} периодична по y_1, y_2 с ячейкой S_i и $\langle \overline{Y} \rangle = 0$):

$$Z_{ij} = a_{ijk} N_k^{\alpha\beta(v)}, F_i = a_{i\alpha\beta\gamma} y_3^\alpha + a_{i\alpha k l} N_{k,ly}^{\beta(v)} - A_{i\alpha\beta}^{(v)} \text{ для } \overline{Y} = \overline{M}^{\alpha\beta(v)} \quad (2.28)$$

$$Z_{ij} = a_{ijk} M_k^{\alpha(-2)} - \sigma_{j\alpha}^{*(-2)} \delta_{\beta\gamma} y_3^\alpha + \sigma_{ij}^{*(-2)} N_{i,ly}^{\alpha\beta(v)} \quad (2.29)$$

$$F_i = \sigma_{\beta\alpha}^{*(-2)} \delta_{\beta\gamma} - \sigma_{i\alpha}^{*(-2)} \delta_{\beta\gamma} + a_{i\alpha k l} M_{k,ly}^{\beta(-2)} \text{ для } \overline{Y} = \overline{M}^{\alpha\beta}$$

$$Z_{ij} = \sigma_{\beta\alpha}^{*(-2)} \delta_{i\alpha} + \sigma_{j\beta}^{*(-2)} N_{i,ly}^{\alpha\beta(0)}, F_i = 0 \text{ для } \overline{Y} = \overline{N}^{\alpha\beta} \quad (2.30)$$

$$Z_{ij} = \sigma_{j\alpha}^{*(-1)} \delta_{i\alpha} - \sigma_{\beta\alpha}^{*(-1)} \delta_{\beta\gamma} + \sigma_{j\beta}^{*(-2)} M_{k,ly}^{\alpha(-2)}, F_i = 0 \text{ для } \overline{Y} = \overline{M}^\alpha \quad (2.31)$$

Подстановка (2.26) в (2.24) и последующее усреднение полученного равенства по ячейке P_i дает следующие определяющие соотношения для $N_{\gamma\delta}^{(-)}$:

$$N_{\gamma\delta}^{(-)} = A_{\gamma\delta\alpha\beta\gamma} u_{3, \alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} + B_{\gamma\delta\alpha\beta\gamma} u_{\alpha, \beta\gamma\delta}^\wedge - A_{\gamma\delta\alpha}^1 u_{3, \beta\gamma\delta}^\wedge + D_{\gamma\delta\alpha\beta} u_{3, \alpha\beta\gamma}^{(0)} + E_{\gamma\delta\alpha\beta} u_{\alpha, \beta\gamma}^\wedge + \\ + F_{\gamma\delta\alpha} u_{3, \alpha x}^{(0)} + S_{\gamma\delta\alpha}^\circ u_{3, \alpha x}^\wedge + A_{\gamma\delta\alpha\beta}^\circ u_{\alpha, \beta x}^* \quad (2.32)$$

Отметим отсутствие u_3^* в (2.31). Выражения для коэффициентов из (2.31) не приводятся, так как, как будет показано далее, эффективным оказывается преобразование задачи, при котором возникают иные коэффициенты.

3. Предельная задача. Имеем уравнения равновесия (2.2)–(2.4) (число уравнений равно семи). Величины $N_{\gamma\delta}^{(m)}$ ($m = -2, -1$), $M_{\gamma\delta}^{(-2)}$ выражаются через шесть функций: $u_3^{(0)}$, u_1^\wedge , u_2^\wedge , u_3^\wedge , u_1^* , u_2^* . Рассмотрим преобразование задачи. С учетом того, что $A_{ijk}^{(m)} = \sigma_{j\beta}^{*(m)} \delta_{ik}$, соотношение (2.25) принимает вид

$$N_{ij} = F_{ij} + \langle -\sigma_{j\alpha}^{*(-2)} \delta_{\beta\gamma} y_3^\alpha + \sigma_{j\beta}^{*(-2)} N_{i,ly}^{\alpha\beta(1)} \rangle u_{3, \alpha\beta\gamma}^{(0)} + \\ + \langle \sigma_{j\alpha}^{*(-2)} \delta_{i\alpha} + \sigma_{j\beta}^{*(-2)} N_{i,ly}^{\alpha\beta(0)} \rangle u_{\alpha, \beta\gamma}^\wedge + \\ + \langle \sigma_{j\alpha}^{*(-1)} \delta_{\beta\gamma} - \sigma_{\beta\alpha}^{*(-1)} \delta_{i\alpha} + \sigma_{j\beta}^{*(-2)} M_{i,ly}^{\alpha(-2)} \rangle u_{3, \beta\gamma}^{(0)} + \\ + \langle \sigma_{j\alpha}^{*(-2)} \delta_{\beta\gamma} - \sigma_{\beta\alpha}^{*(-2)} \delta_{i\alpha} \rangle u_{3, \alpha x}^\wedge \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует

$$N_{\beta\gamma}^{(-1)} = N_{\beta\gamma}^{(-1)} + K_\beta (u_1^\wedge, u_2^\wedge, u_3^\wedge, u_3^{(0)}) \quad (3.2)$$

$$K_\beta (u_1^\wedge, u_2^\wedge, u_3^\wedge, u_3^{(0)}) = \langle -\sigma_{3\alpha}^{*(-2)} \delta_{\beta\gamma} y_3^\alpha + \\ + \sigma_{\beta l}^{*(-2)} N_{3,ly}^{\alpha\beta(1)} - \sigma_{3l}^{*(-2)} N_{\beta,ly}^{\alpha\beta(1)} \rangle u_{3, \alpha\beta\gamma}^{(0)} + \\ + \langle \sigma_{\beta l}^{*(-2)} N_{3,ly}^{\alpha\beta(0)} - \sigma_{3\gamma}^{*(-2)} \delta_{\beta\alpha} - \sigma_{3l}^{*(-2)} N_{\beta,ly}^{\alpha\beta(0)} \rangle u_{\alpha, \beta\gamma}^\wedge + \\ + \langle \sigma_{\beta\alpha}^{*(-1)} + \sigma_{\beta l}^{*(-2)} M_{3,ly}^{\alpha(-2)} + \sigma_{33}^{*(-1)} \delta_{\beta\alpha} + \sigma_{3l}^{*(-2)} M_{\beta,ly}^{\alpha(-2)} \rangle \\ u_{3, \beta\gamma}^{(0)} + \langle \sigma_{\beta\alpha}^{*(-2)} - \sigma_{33}^{*(-2)} \delta_{\beta\alpha} \rangle u_{3, \alpha x}^\wedge \quad (3.3)$$

Далее, как в классическом случае, продифференцируем (2.4) по u_β и просуммируем по β . Принимая во внимание (2.3), будем иметь

$$M_{\beta\alpha, \alpha\beta x}^{(-2)} = f_3 + K_{\beta, \beta x} \quad (3.4)$$

Уравнения (2.2) при $m = -2, -1$ и (3.4) представляют из себя шесть уравнений с шестью неизвестными.

Замечание 4. Как видно, решением задачи является шесть функций, которые затруднительно истолковать как вектор перемещений в классической теории. Общая трактовка решения возникшей задачи — это коэффициенты разложения (2.1) вектора перемещений u^ϵ пластинки как трехмерного тела. Отметим, что в ряде случаев число неизвестных уменьшается до трех и возможна их трактовка как вектора перемещений.

Граничные условия получаются подстановкой ряда (2.1) и полученных выше выражений для $\bar{u}^{(k)}$ в условие на Γ_ϵ из (1.1). Для функций $u_3^{(0)}, u_1^\wedge, u_2^\wedge$ эти условия, полученные в [1], имеют вид

$$u_\alpha^\wedge(x^\nu) + 0, u_3^{(0)}(x^\nu) = \partial u_3^{(0)} / \partial \bar{u}(x^\nu) + 0 \text{ на } \partial S$$

Таким же образом

$$u_3^\wedge(x^\nu) = 0, u_\alpha^*(x^\nu) = 0 \text{ на } \partial S \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.5)$$

4. *Частные случаи.* Рассмотрим пластинку, имеющую начальные напряжения только в ее плоскости. Возможны различные подходы к формулировке указанной задачи. В основе своей они связаны с неопределенностью понятия «напряжения в плоскости пластинки» применительно к начальным напряжениям σ_{ij}^* в пластинке, рассматриваемой как трехмерное тело.

Начальные напряжения σ_{ij}^* определяются из решения задачи теории упругости для рассматриваемой пластинки. Если в качестве граничных условий заданы перемещения, то σ_{ij}^* в пластинке, материал которой имеет упругие постоянные порядка ϵ^{-3} , будут иметь тот же порядок $-\epsilon^{-3}$. Этот случай, приводящий к аналогичным отмеченным в [3] результатам, здесь не рассматривается.

Пусть заданы усилия в плоскости пластинки. Тогда «напряжения в плоскости пластинки» можно определить следующим образом: усилия имеют порядок $\epsilon |\sigma_{ij}^*|$, а их фиксирование $-\epsilon |\sigma_{ij}^*| \sim \text{const}$ означает, что начальные напряжения имеют порядок ϵ^{-1} . В принятых обозначениях это равносильно $\sigma_{ij}^{*(-2)} = 0$, т. е. в рассматриваемом случае напряжения в плоскости пластинки определяются их порядком по ϵ .

В силу $\sigma_{ij}^{*(-2)} = 0$ получаем, что $\bar{M}^{\alpha(-2)}(y) = 0$. Поэтому в (2.22) $S_{\gamma\delta\alpha}^{\dot{\nu}} = 0$, а в (3.2) (см. (3.3)):

$$K_\beta = \langle \sigma_{\beta\alpha}^{*(-1)} + \sigma_{33}^{*(-1)} \delta_{\beta\alpha} \rangle u_{3, \alpha x}^{(0)} \quad (4.1)$$

В силу отсутствия в (3.5) функции u_3^\wedge , происходит выделение из системы (2.2) при $m = -2, -1$ и (2.4), (3.5) системы (2.2) при $m = -2$ (три уравнения) относительно трех функций $u_3^{(0)}, u_1^\wedge, u_2^\wedge$, которая может быть решена независимо. При этом $u_3^{(0)}, u_1^\wedge, u_2^\wedge$ могут трактоваться как классический вектор перемещений.

Член $K_{\beta, \beta x} = \langle (\sigma_{\beta\alpha}^{*(-1)} + \sigma_{33}^{*(-1)} \delta_{\beta\alpha}) u_{3, \alpha x}^{(0)} \rangle_{\beta x}$ аналогичен классическому выражению для нормальной силы, вызванной прогибом $u_3^{(0)}$ предварительно напряженной пластинки [5, 6]. Отметим, что в классической теории начальные напряжения представлены только членом $\langle \sigma_{\beta\alpha}^{*(-1)} \rangle$ ($\beta, \alpha = 1, 2$) «плоской» частью тензора напряжений. Как отмечалось, формальное «упрощение» задачи в общем случае неправомерно, примером чему является выражение (4.1), содержащее дополнительно член $\langle \sigma_{33}^{*(-1)} \rangle \delta_{\beta\alpha}$.

Далее рассмотрим плоскую пластинку из однородного изотропного материала. Решение задачи теории упругости (для определения начальных напряжений) дает $\sigma_{\beta\alpha}^* = 0$.

В этом случае можно считать, что $P_1 = [-1, 1]^2 \times [-1/2, 1/2]$. Решение задачи (2.12) и подстановка $\bar{N}^{\beta\alpha(v)}$ в формулы (2.23) дает стандартные формулы подсчета изгибных жесткостей (см. [5]). Рассмотрим величины, связанные с начальными напряжениями.

Начальные напряжения в плоскости пластинки. Если $\sigma_{33}^{*(-1)} = 0$, то в силу (4.1) в рассматриваемом случае $K_{\beta} = \langle \sigma_{\beta\alpha}^{*(-1)} \rangle u_{3,\alpha x}^{(0)}$, т. е. приходим к классическим формулам [6].

Изгибные начальные напряжения. Пусть $\sigma_{\alpha\beta}^{*(-2)} \neq 0$. Решение задачи (2.19) ищем в виде $\bar{M}^{\alpha(-2)} = \bar{M}^{\alpha(-2)}(y_3)$. В этом случае (2.19) принимает вид

$$(a_{\beta\beta} M_1^{\alpha(-2)} - \sigma_{\alpha\alpha}^{*(-2)})' = 0 \quad (4.2)$$

$$(a_{\beta\beta} M_1^{\alpha(-2)} - \sigma_{\alpha\alpha}^{*(-2)})(y_3) = 0 \text{ при } y_3 = \pm 1/2$$

Причем здесь интерес представляет только $\bar{M}^{\alpha(-2)'}(y_3)$ (штрих означает d/dy_3). В результате будем иметь

$$M_{\beta}^{\alpha(-2)} = \sigma_{\beta\alpha}^*/a_{\beta\beta\beta\beta}, \quad M_3^{\alpha(-2)'} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (4.3)$$

Подстановка (4.3) в (2.23) с учетом $\sigma_{\beta\alpha}^{*(-2)} = 0$ дает

$$S_{\gamma\delta\alpha}^v = \langle a_{\gamma\delta\beta\beta} \frac{\sigma_{\beta\alpha}^{*(-2)}}{a_{\beta\beta\beta\beta}} y_3^v \rangle = 0$$

так как $a_{\gamma\delta\beta\beta} + 0$ ($\gamma, \delta, \beta = 1, 2$) для изотропного материала. Что касается K (3.3), то из условия $\sigma_{3l}^{*(-2)} = 0$ сразу же следует

$$K_{\beta} = \langle \sigma_{\beta\alpha}^{*(-1)} \rangle u_{3,\alpha x}^{(0)} \quad (4.4)$$

Таким образом однородная пластинка из однородного материала не реагирует на начальные напряжения порядка ε^{-2} , возникающие вследствие ее изгиба.

Рассмотрим далее пластинку, ячейка периодичности которой симметрична относительно плоскостей $x_{\alpha} = \text{const}$ ($\alpha = 1, 2$), проходящих через ее центр. В этом случае задача редуцируется к смешанной краевой задаче на $1/4$ (пространственный случай) или $1/2$ (плоский случай). На боковой поверхности γ условия сохраняются, а на поверхностях $x_{\alpha} = \text{const}$ задаются нормальные перемещения $N_{\alpha}^{\delta(v)} = y_{\alpha} y_3^v$ ($v = 0, 1$) и нулевые касательные напряжения.

Отметим, что задача (2.12) определяет также локальное распределение начальных напряжений [1]:

$$\sigma_{ij}^* = \varepsilon^{-3} a_{ijkl} U_{k,lx} + \varepsilon^{-3} a_{ijkl} N_{k,ly}^{mn(0)} U_{m,nx}$$

где $\bar{U}(\bar{x})$ — усредненные перемещения в плоскости пластинки (подробнее см. [1]). Для $\sigma_{ij}^{*(-2)}$ имеет место формула (2.21), но в которой используются предварительные прогибы (см. [1]).

Имеющиеся решения свидетельствуют, что для ячейки непрямоугольной формы, так же как и для неоднородных материалов, ЯЗ имеет нетривиальное решение; в общем случае и $\langle \sigma_{33}^{*(-1)} \rangle$ не обращается в нуль.

Таким образом, для описания изгиба и колебаний пластинок сложного строения, широко применяемых в современных конструкциях, при наличии начальных напряжений целесообразно использовать формулы асимптотической теории.

Для однородных и слоистых пластинок из изотропных материалов формулы асимптотической теории совпадают с классическими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Caillerie D.* Thin elastic and periodic plates//Math. Meth. in Appl. Sci. 1984. V. 6. № 2. P. 159—191.
2. *Колпаков А. Г.* Жесткостные характеристики напряженных неоднородных сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 66—73.
3. *Kolpakov A. G.* On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses// 2nd World Congr. on Computational Mechanics. 1990. Stuttgart. Extended Abstracts of Lectures. С. 453—456.
4. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
5. *Колпаков А. Г.* Расчет и проектирование слоистых пластинок//ПМТФ. 1989. № 4. С. 152—161.
6. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер К.* Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
18.VI.1991