МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. Л. А. ШАПОВАЛОВ

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

При исследованиях прочности тонкостенных конструкций из композиционных материалов на ЭВМ наблюдаются случаи неустойчивости процесса вычислений для вырожденных задач, в которых учитываются трансверсальные деформации [1, 2].

Предполагается, что возникающие вычислительные трудности связаны с использованием лагранжева подхода в методе конечных элементов и, что они могут быть преодолены переходом к функционалам смешанного типа [3]. Известны и другие возможности повышения эффективности анализа вырожденных задач, в частности, с помощью выделения основного решения, отвечающего теории Кирхгофа — Лява, и некоторых поправок к нему за счет деформации сдвига [4]. Исследования в этом направлении отражены в обзорах [5, 6]. Асимптотический анализ теории оболочек с учетом поперечных сдвигов содержится в [7].

Предлагаемая работа продолжает направление, связанное с поисками аналитических методов расчета, обеспечивающих повышение надежности при численной реализации плохо обусловленных задач теории тонкостенных систем[1]. В статье поперечные сдвиги учитываются в форме поправок к классическому решению теории оболочек с использованием энергетических представлений. Соотношения сдвиговой теории рассматриваются в качестве уравнений возмущенного состояния по отношению к зависимостям теории Кирхгофа — Лява. В процессе выделения главной части решения исходные уравнения разделяются на две самостоятельных группы — уравнения основного состояния и зависимости для определения возмущений. Общий интеграл уравнений с учетом поперечных сдвигов разыскивается в виде линейной комбинации классического решения и конечных возмущений — поправок к основному состоянию равновесия.

Формулируется вариационный принцип для определения компонентов возмущений. Приводятся уравнения Эйлера и естественные граничные условия вариационной задачи.

В результате редукции уравнений изгиба трансверсально изотропных пластин полная система исходных дифференциальных уравнений для однородных краевых условий существенно упрощается и распадается на независимые между собой уравнения С. Жермен и Пуассона.

Предлагается приближенный подход к определению напряженно-деформированного состояния пологих оболочек, основанный на разделении уравнений сдвиговой теории. Приводится точное и приближенное аналитическое решения задач изгиба пластины и криволинейной панели. Оценивается точность приближенного решения.

1. Вариационная формулировка задачи. Рассмотрим функционал энергии для линейных задач теории ортотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов [8]:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint\limits_{(F)} (T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + S\omega + N_1\gamma_1 + N_2\gamma_2 + M_1k_1 + M_2k_2 + 2Ht)\, dF -$$

$$- \iint\limits_{(F)} \mathbf{P}\mathbf{U}dF - \int\limits_{(\Gamma)} (\mathbf{T}_\nu \mathbf{U} + \mathbf{M}_\nu \Psi)\, ds_t, \quad dF = A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (1.1)$$

[1] Работа доложена на XVI Международной конференции по теории оболочек и пластин. Нижний Новгород, Россия, 21—23 сентября 1993 г.

Здесь T_i, M_i, N_i ($i = 1, 2$) — погонные нормальные усилия, изгибающие моменты и перерезывающие силы в оболочке: $S = T_{12} - M_{21}/R_2 = T_{21} - M_{12}/R_1$, $H = 1/2\,(M_{12} + M_{21})$ — приведенные сдвигающая сила и крутящий момент, определяемые через усилия сдвига T_{12}, T_{21} и крутящие моменты $M_{12} = M_{21}$: ε_i, ω_i, ω — мембранные деформации; γ_i — деформации поперечных сдвигов; k_i, t_i, t — изменения кривизн и кручения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1},\ k_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}\psi_2$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1},\ t_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\psi_1$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,\ 2t = t_1 + \omega_2/R_1 + t_2 + \omega_1/R_2\ (1 \rightleftarrows 2,\ u \rightleftarrows v) \tag{1.2}$$

Криволинейные координаты α_i, z связаны с линиями кривизны и внешней нормалью к срединной поверхности F, ограниченной гладким контуром Γ; ds_t — длина дуги граничного контура; A_i, $1/R_i$ — параметры Ламе и главные кривизны; u, v, w — компоненты вектора смещения в направлении линий α_1, α_2, z; ψ_i — углы поворота нормального элемента поверхности с учетом поперечных сдвигов.

Вместе с координатной системой α_i, z на поверхности оболочки вводится вспомогательная система координат β_i, z, связанная с граничным контуром. Орты координатных линий α_i, β_i, обозначаемые $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{t}$, образуют между собой угол $\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{\nu}} = \widehat{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{\nu}}$, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к срединной поверхности.

Предполагается, что оболочка нагружена внешними силами интенсивности $\boldsymbol{P} = p_1\boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}_2 + p_n\boldsymbol{n}$, приложенными к поверхности F, и погонными краевыми усилиями и моментами $\boldsymbol{T}_\nu = T_{\nu\nu}\boldsymbol{\nu} + T_{\nu t}\boldsymbol{t} + T_{\nu n}\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{M}_\nu = -M_{\nu t}\boldsymbol{\nu} + M_{\nu\nu}\boldsymbol{t}$ (1.1), действующими на контуре Γ. В формулах (1.1) $\boldsymbol{U} = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + w_n n = u_\nu\boldsymbol{\nu} + u_t\boldsymbol{t} + w\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\Psi} = -\psi_t\boldsymbol{\nu} + \psi_\nu\boldsymbol{t} + \psi_n\boldsymbol{n}$ — векторы смещений и поворотов на граничном контуре [9].

В рамках кинематической модели Тимошенко, для деформаций волокон эквидистантной поверхности $z = \text{const}$ имеем

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + zk_1,\ \varepsilon_{12} = \omega + 2zt,\ \varepsilon_{13} = \gamma_1,\ \varepsilon_{33} = 0$$

$$\gamma_1 = \psi_1 - \theta_1,\ \theta_1 = -(1/A_1)\,\partial w/\partial \alpha_1 + u/R_1\ (1 \rightleftarrows 2,\ u \rightleftarrows v) \tag{1.3}$$

Соотношения упругости оболочки из ортотропного материала примем в форме

$$T_1 = B_1(\varepsilon_1 + \nu_1\varepsilon_2),\ S = B_k\omega,\ M_1 = D_1(k_1 + \nu_2 k_2),\ H = 2D_k t$$

$$N_1 = C_1\gamma_1,\ B_1 = E_1 h/(1 - \nu_1\nu_2),\ B_k = G_{12}h,\ D_k = 1/12\,G_{12}h^3$$

$$D_1 = E_1 h^3/[12(1 - \nu_1\nu_2)],\ C_1 = G_{13}h\ (1 \rightleftarrows 2) \tag{1.4}$$

где B_i, C_i, B_k, D_k, D_i — обозначения физических констант [10].

Функционал энергии (1.1) в зависимости (1.2—1.4) полностью определяют напряженно-деформированное состояние оболочки с конечной жесткостью на сдвиг.

Пользуясь уравнениями (1.1)—(1.4), будем учитывать поперечные сдвиги для тонкостенной системы в форме поправок к классическому решению [4]. При таком подходе соотношения линейной теории ортотропных оболочек с учетом сдвигов [8] играют роль уравнений возмущенного состояния по отношению к зависимостям классической теории Кирхгофа — Лява [11].

Общий интеграл уравнений (1.1)—(1.4) будем разыскивать в виде линейной комбинации классического решения, представляющего основное состояние оболочки, и некоторых конечных возмущений — поправок к основному состоянию. Для обобщенных перемещений срединной поверхности, в частности, положим

$$u = u^\circ + u', \ w = w^\circ + w', \ \psi_1 = \psi_1^\circ + \psi_1' \ (1 \rightleftarrows 2, u \rightleftarrows v) \tag{1.5}$$

Здесь градус относится к основному состоянию, а штрих — к возмущениям. Решение уравнений теории оболочек для основного состояния предполагается известным.

Подстановка смещений (1.5) в формулы (1.2), (1.3) дает

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^\circ + \varepsilon_1', \ \omega_1 = \omega_1^\circ + \omega_1', \ \omega = \omega^\circ + \omega', \ k_1 = k_1^\circ + k_1'$$

$$t_1 = t_1^\circ + t_1', \ t = t^\circ + t'$$

$$\varepsilon_1' = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u'}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} v' + \frac{w'}{R_1}, \ k_1' = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_1'}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\psi_2'$$

$$\omega_1' = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v'}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u', \ t_1' = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_2'}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\psi_1'$$

$$\omega' = \omega_1' + \omega_2', \ 2t' = t_1' + \omega_2'/R_1 + t_2' + \omega_1'/R_2 \ (1 \rightleftarrows 2, u \rightleftarrows v) \tag{1.6}$$

Параметры основного состояния ε_1°, ω_1°, ω°, k_1°, t_1°, t° можно получить из соответствующих возмущений (1.6) заменой верхних индексов.

Линейные соотношения, аналогичные (1.6), справедливы и для внутренних усилий (1.4):

$$T_1 = T_1^\circ + T_1', S = S^\circ + S', M_1 = M_1^\circ + M_1', H = H^\circ + H', T_1' = B_1(\varepsilon_1' + \nu_2\varepsilon_2')$$

$$S' = B_k\omega', \ M_1' = D_1(k_1' + \nu_2 k_2'), \ H' = 2D_k t' \ (1 \rightleftarrows 2) \tag{1.7}$$

Исключение составляют зависимости для поперечных сдвигов γ_i и перерезывающих сил N_i, на преобразовании которых остановимся подробнее.

Из (1.3) и (1.5) имеем

$$\gamma_1 = (\psi_1^\circ + \psi_1') - (\theta_1^\circ + \theta_1') = \gamma_1^\circ + \gamma_1', \ \gamma_1^\circ = \psi_1^\circ - \theta_1^\circ, \ \gamma_1' = \psi_1' - \theta_1' \tag{1.8}$$

$$\theta_1^\circ = -(1/A_1)\,\partial w^\circ/\partial \alpha_1 + u^\circ/R_1, \ \theta_1' = -(1/A_1)\,\partial w'/\partial \alpha_1 + u'/R_1 \ (1 \rightleftarrows 2, u \rightleftarrows v)$$

Отсюда, учитывая (1.8), (1.7) и пользуясь кинематическими гипотезами классической теории оболочек, найдем

$$\gamma_1^\circ = \psi_1^\circ - \theta_1^\circ = 0, \ \psi_1^\circ = \theta_1^\circ, \ \gamma_1 = \gamma_1', \ N_1 = C_1\gamma_1' \tag{1.9}$$

Таким образом, для трансверсальных усилий N_i (1.9) формулы суммирования, подобные (1.7), не справедливы. Этот результат объясним, так как при допущениях классической теории перерезывающие силы основного состояния не связаны соотношениями упругости со сдвигами и являются статическими факторами. Тем не менее, равенства (1.9) вместе с формулами (1.5)—(1.7) позволяют произвести разделение компонентов напряженно-деформированного состояния в выражении для функционала энергии (1.1).

Выполняя разделение обобщенных перемещений u, v, w, ψ_1, ψ_2 на переменные основного состояния и возмущения с помощью зависимостей (1.5)—(1.9), из уравнения (1.1) получим

$$\Pi(u^\circ + u', \ldots, \psi_2^\circ + \psi_2') = \Pi^\circ + \Pi' + \Pi''$$

$$\Pi^\circ = \iint\limits_{(F)} \Big[\frac{1}{2}(T_1^\circ\varepsilon_1^\circ + T_2^\circ\varepsilon_2^\circ + S^\circ\omega^\circ + M_1^\circ\varkappa_1^\circ + M_2^\circ\varkappa_2^\circ + 2H^\circ\tau^\circ) -$$

$$- (p_1 u^\circ + p_2 v^\circ + p_n w^\circ)\Big] dF - \int_{(\Gamma)} (T_{\nu\nu} u_\nu^\circ + T_{\nu t} u_t^\circ + T_{\nu n} w^\circ + M_{\nu\nu} \theta_\nu^\circ + M_{\nu t} \theta_t^\circ)\, ds_t$$

$$\Pi' = \iint_{(F)} (T_1^\circ \varepsilon_1' + T_2^\circ \varepsilon_2' + S^\circ \omega' + M_1^\circ k_1' + M_2^\circ k_2' + 2H^\circ t' -$$

$$- p_1 u' - p_2 v' - p_n w')\, dF - \int_{(\Gamma)} (T_{\nu\nu} u_\nu' + T_{\nu t} u_t' + T_{\nu n} w' + M_{\nu\nu} \psi_\nu' + M_{\nu t} \psi_t')\, ds_t$$

$$\Pi'' = \frac{1}{2} \iint_{(F)} (T_1' \varepsilon_1' + T_2' \varepsilon_2' + S' \omega' + N_1 \gamma_1' +$$

$$+ N_2 \gamma_2' + M_1' k_1' + M_2' k_2' + 2H' t')\, dF \tag{1.10}$$

Выражения для кривизн и кручения основного состояния $\varkappa_i^\circ$, τ° находятся из формул для параметров k_i°, t° (1.6) с учетом зависимостей (1.9). Смещения и углы поворота на граничном контуре Г и в области F связаны равенствами [9]:

$$u_\nu' = u' \cos\gamma + v' \sin\gamma,\ \theta_\nu' = \theta_1' \cos\gamma + \theta_2' \sin\gamma,\ \psi_\nu' = \psi_1' \cos\gamma + \psi_2' \sin\gamma$$

$$u_t' = - u' \sin\gamma + v' \cos\gamma,\ \theta_t' = - \theta_1' \sin\gamma +$$

$$+ \theta_2' \cos\gamma,\ \psi_t' = - \psi_1' \sin\gamma + \psi_2' \cos\gamma \tag{1.11}$$

Пользуясь методом перемещений, условимся рассматривать компоненты основного состояния u°, v°, w°, ψ_1°, ψ_2° в качестве приближенного решения задачи теории оболочек с учетом поперечных сдвигов. Под ее точным решением будем понимать обобщенные перемещения u, v, w, ψ_1, ψ_2 (1.5), которые минимизируют функционал энергии П (1.1).

При таком подходе дифференциальные уравнения для возмущений можно получить, следуя методу Треффца [12], из условия стационарности функционала $\Delta\Pi = \Pi - \Pi^\circ$ (1.10)

$$\delta(\Delta\Pi) = \delta(\Pi - \Pi^\circ) = \delta(\Pi' + \Pi'') = 0 \tag{1.12}$$

Уравнения (1.12), (1.10) представляют собой вариационную формулировку задачи определения конечных возмущений основного состояния равновесия, как поправок к классической теории оболочек Кирхгофа — Лява за счет влияния поперечных сдвигов.

При реализации вариационного уравнения (1.12) к независимому варьированию допускаются возмущения u', v', w', ψ_1', ψ_2'. Компоненты основного напряженно-деформированного состояния считаются фиксированными. В развернутом виде, согласно (1.12), имеем

$$\delta(\Delta\Pi) = \iint_{(F)} [(T_1^\circ + T_1')\, \delta\varepsilon_1' + (T_2^\circ + T_2')\, \delta\varepsilon_2' + (S^\circ + S')\, \delta\omega' + N_1 \delta\gamma_1' +$$

$$+ N_2 \delta\gamma_2' + (M_1^\circ + M_1')\, \delta k_1' + (M_2^\circ + M_2')\, \delta k_2' + 2(H^\circ + H')\, \delta t' -$$

$$- p_1 \delta u' - p_2 \delta v' - p_n \delta w']\, dF - \int_{(\Gamma)} (T_{\nu\nu} \delta u_\nu' + T_{\nu t} \delta u_t' + T_{\nu n} \delta w' +$$

$$+ M_{\nu\nu} \delta\psi_\nu' + M_{\nu t} \delta\psi_t')\, ds_t = 0 \tag{1.13}$$

В результате преобразований уравнения (1.13) с помощью зависимостей (1.6), (1.8), (1.9), (1.11) и формул Грина, найдем

$$\delta(\Delta\Pi) = \iint_{(F)} [- L_1 \delta u' - L_2 \delta v' + A_1 A_2 (L_3 \delta w' + P_1 \delta\psi_1' + P_2 \delta\psi_2')]\, dF +$$

$$+ \int_{(\Gamma)} [(t_{\nu\nu} - T_{\nu\nu})\, \delta u_\nu' + (t_{\nu t} - T_{\nu t})\, \delta u_t' + (t_{\nu n} - T_{\nu n})\, \delta w' +$$

$$+ (m_{vv} - M_{vv})\,\delta\psi_v' + (m_{vt} - M_{vt})\,\delta\psi_t'\,]\,ds_t = 0$$

$$L_1 = \frac{\partial A_2 T_1'}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 S}{d\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2' + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{A_1 H'}{R_1} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H' + \frac{A_1 A_2}{R_1}(N_1 - Q_1^\circ)$$

$$L_3 = \frac{T_1'}{R_1} + \frac{T_2'}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial A_2 (N_1 - Q_1^\circ)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 (N_2 - Q_2^\circ)}{\partial \alpha_2}\right]$$

$$P_1 = N_1 - Q_1^\circ - \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial A_2 M_1'}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 H'}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2'\right)$$

$$Q_1^\circ = \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial A_2 M_1^\circ}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 H^\circ}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2^\circ\right)$$

$$t_{vv} = (T_1^\circ + T_1')\cos^2\gamma + (S^\circ + S')\sin 2\gamma +$$

$$+ (T_2^\circ + T_2')\sin^2\gamma + \frac{1}{2}(H^\circ + H')\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\gamma$$

$$t_{vt} = \frac{1}{2}(T_2^\circ - T_1^\circ + T_2' - T_1')\sin 2\gamma + (S^\circ + S')\cos 2\gamma +$$

$$+ (H^\circ + H')\left(\frac{1}{R_2}\cos^2\gamma - \frac{1}{R_1}\sin^2\gamma\right)$$

$$t_{vn} = N_1\cos\gamma + N_2\sin\gamma,\ m_{vv} = (M_1^\circ + M_1')\cos^2\gamma +$$

$$+ (H^\circ + H')\sin 2\gamma + (M_2^\circ + M_2')\sin^2\gamma$$

$$m_{vt} = \frac{1}{2}(M_2^\circ - M_1^\circ + M_2' - M_1')\sin 2\gamma + (H^\circ + H')\cos 2\gamma\,(1 \rightleftarrows 2) \qquad (1.14)$$

Из вариационного уравнения (1.14) при независимых вариациях $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta w'$ $\delta\psi_1'$, $\delta\psi_2'$ следуют дифференциальные уравнения Эйлера для возмущений

$$L_i = 0,\ L_3 = 0,\ P_i = 0\ \ (i = 1, 2) \qquad (1.15)$$

и естественные граничные условия к ним: $t_{vv} = T_{vv}$, $t_{vt} = T_{vt}$, $t_{vn} = T_{vn}$, $m_{vv} = M_{vv}$, $m_{vt} = M_{vt}$.

Система дифференциальных уравнений для возмущений не содержит внешних нагрузок в явном виде. Их роль выполняют перерезывающие силы основного состояния Q_i° и их производные, содержащиеся в правых частях уравнений (1.15).

В соответствии с формулами (1.5)—(1.9), общий интеграл уравнений теории оболочек с учетом поперечных сдвигов может быть представлен в виде линейной комбинации классического решения Кирхгофа — Лява и конечных возмущений — поправок к основному состоянию равновесия.

2. Разделение уравнений теории изгиба пластин. Рассмотрим прямоугольную пластину из трансверсально изотропного материала, нагруженную поперечной нагрузкой $p_n = p$, краевыми усилиями N_{ik} и моментами M_{ik}, H_{ik} $(i = 1, 2)$. Ограничиваясь случаем изгиба пластины без растяжения срединной поверхности и, полагая в уравнениях п. 1 $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $A_1 = A_2 = 1$, $1/R_1 = 1/R_2 = 0$, $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $G_{12} = ½E/(1 + \nu)$, $G_{13} = G_{23} = G$, $D_1 = D_2 = D$, $D_k = ½(1 + \nu)\,D$, придем к вариационной формулировке задачи о возмущениях основного состояния равновесия пластины в форме (1.12). Составляющие полной энергии П°, П′, П″ здесь имеют вид

$$\Pi^\circ = \iint\limits_{(F)} \left[\frac{1}{2}(M_1^\circ \varkappa_1^\circ + M_2^\circ \varkappa_2^\circ + 2H^\circ \tau^\circ) - pw^\circ\right] dF -$$

$$- \int\limits_{(\Gamma)} [(M_{1k}\psi_1^\circ + H_{1k}\psi_2^\circ + N_{1k}w^\circ)\, l + (M_{2k}\psi_2^\circ + H_{2k}\psi_1^\circ + N_{2k}w^\circ)\, m]\, ds$$

$$\Pi' = \iint\limits_{(F)} (M_1^\circ k_1' + M_2^\circ k_2' + 2H^\circ t' - pw')\, dF -$$

$$- \int\limits_{(\Gamma)} [(M_{1k}\psi_1' + H_{1k}\psi_2' + N_{1k}w')\, l + (M_{2k}\psi_2' + H_{2k}\psi_1' + N_{2k}w')\, m]\, ds$$

$$\Pi'' = \frac{1}{2}\iint\limits_{(F)} (M_1'k_1' + M_2'k_2' + 2H't' + N_1\gamma_1' + N_2\gamma_2')\, dF,\; 2t' = t_1' + t_2' \qquad (2.1)$$

Пользуясь вариационным уравнением (1.12) и зависимостями (2.1), варьируя обобщенные перемещения w', ψ_1', ψ_2', после преобразований получим

$$\delta(\Delta\Pi) = \iint\limits_{(F)} (-L_3^\vee \delta w' + P_1^\vee \delta\psi_1' + P_2^\vee \delta\psi_2')\, dF + \int\limits_{(\Gamma)} (l\delta\chi_1 + m\delta\chi_2)\, ds = 0$$

$$L_3^\vee = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + p,\; P_1^\vee = \frac{\partial M_1'}{\partial x} + \frac{\partial H'}{\partial y} - N_1 + Q_1^\circ \;(1 \rightleftarrows 2,\; x \rightleftarrows y)$$

$$\delta\chi_1 = (M_1^\circ - M_{1k} + M_1')\,\delta\psi_1' + (H^\circ - H_{1k} + H')\,\delta\psi_2' + (N_1 - N_{1k})\,\delta w'$$

$$\delta\chi_2 = (H^\circ - H_{2k} + H')\,\delta\psi_1' + (M_2^\circ - M_{2k} + M_2')\,\delta\psi_2' + (N_2 - N_{2k})\,\delta w' \qquad (2.2)$$

где l, m — направляющие косинусы внешней нормали к граничному контуру.

Из вариационного уравнения (2.2), в силу независимости вариаций $\delta w'$, $\delta\psi_1'$, $\delta\psi_2'$ найдем дифференциальные уравнения и граничные условия краевой задачи (2.2) для возмущений пластины

$$L_3^\vee = 0,\; P_1^\vee = 0,\; P_2^\vee = 0$$

$$l = \pm 1: (M_1^\circ - M_{1k} + M_1')\delta\psi_1' = 0,\, (H^\circ - H_{1k} + H')\delta\psi_2' = 0,\, (N_1 - N_{1k})\delta w' = 0$$

$$m = \pm 1: (H^\circ - H_{2k} + H')\delta\psi_1' = 0,\, (M_2^\circ - M_{2k} + M_2')\delta\psi_2' = 0,$$

$$(N_2 - N_{2k})\delta w' = 0 \qquad (2.3)$$

Уравнения равновесия и краевые условия для основного состояния, соответствующие теории Кирхгофа, получим из вариационного уравнения Лагранжа $\delta\Pi^\circ = 0$ с учетом особенностей прямоугольного контура в угловых точках

$$\frac{\partial Q_1^\circ}{\partial x} + \frac{\partial Q_2^\circ}{\partial y} + p = 0,\; \mp\, [2H^*\delta w^\circ]_{x=0,\, y=b}^{x=0,\, y=0} = 0,\; \pm\, [2H^*\delta w^\circ]_{x=a,\, y=b}^{x=a,\, y=0} = 0$$

$$l = \pm 1: (M_1^\circ - M_{1k})\,\delta\psi_1^\circ = 0,\; [(N_1^\circ)^* - N_{1k}^*]\,\delta w^\circ = 0$$

$$m = \pm 1: (M_2^\circ - M_{2k})\,\delta\psi_2^\circ = 0,\; [(N_2^\circ)^* - N_{2k}^*]\, dw^\circ = 0 \qquad (2.4)$$

Здесь $H^* = H^\circ - ½\,(H_{1k} + H_{2k})$, $(N_1^\circ)^* = Q_1^\circ + \partial H^\circ/\partial y$, $N_{1k}^* = N_{1k} + \partial N_{1k}/\partial y$ $(1 \rightleftarrows 2,\; x \rightleftarrows y)$ — приведенные погонные перерезывающие силы.

Рассмотрим далее в качестве дифференциальных уравнений для возмущений (2.3) следующие тождества:

$$L_3^\vee = 0,\ \partial P_1^\vee/\partial x + \partial P_2^\vee/\partial y = 0,\ \partial P_1^\vee/\partial y - \partial P_2^\vee/\partial x = 0$$

Отсюда, пользуясь уравнениями равновесия (2.4), зависимостями (1.14) и соотношениями упругости для основного состояния, найдем

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + p = 0, \frac{\partial^2 M_1'}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2'}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial Q_1^\circ}{\partial x} + \frac{\partial Q_2^\circ}{\partial y} + p\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M_1'}{\partial x} + \frac{\partial H'}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H'}{\partial x} + \frac{\partial M_2'}{\partial y}\right) - \frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{\partial Q_2^\circ}{\partial x} - \frac{\partial Q_1^\circ}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

Для трансверсально изотропного материала, принимая во внимание результаты п. 1, имеем

$$M_1' = D\left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_2'}{\partial y}\right), H' = \frac{D(1+\nu)}{2}\left(\frac{\partial \psi_2'}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1'}{\partial y}\right),$$

$$N_1 = Gh\gamma_1'\ (1 \rightleftarrows 2,\ x \rightleftarrows y) \quad (2.6)$$

Из равенств (2.5), (2.6) следуют уравнения в перемещениях для кинематических факторов w', ψ_1', ψ_2':

$$\nabla^2 w' + \left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2'}{\partial y}\right) = -\frac{p}{Gh}, \nabla^2\left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2'}{\partial y}\right) = 0, \Omega^3\left(\frac{\partial \psi_2'}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y}\right) = 0$$

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2,\ \Omega^2 = [(1-\nu)D/2Gh]\nabla^2 - 1 \quad (2.7)$$

Введем в рассмотрение функцию перемещений $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\psi_1' = \partial\Phi/\partial y,\ \psi_2' = -\partial\Phi/\partial x \quad (2.8)$$

Подстановка (2.8) обращает второе уравнение системы (2.7) в тождество. Остальные уравнения дают

$$\nabla^2 w' = -p/Gh,\ \Omega^2\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.9)$$

Таким образом, в результате тождественных преобразований исходная система уравнений для возмущений w', ψ_1', ψ_2', имеющая шестой порядок, распадается на два независимых дифференциальных уравнения: второго порядка относительно возмущений прогиба w' и четвертого порядка относительно поправок к углам поворота ψ_1', ψ_2'.

Рассмотрим уравнение $\Omega^2\nabla^2\Phi = 0$ (2.9) и часть краевых условий (2.3), относящихся к этому уравнению

$$l = \pm 1: (M_1^\circ - M_{1k} + M_1')\,\delta\psi_1' = 0,\ (H^\circ - H_{1k} + H')\,\delta\psi_2' = 0$$

$$m = \pm 1: (H^\circ - H_{2k} + H')\,\delta\psi_1' = 0,\ (M_2^\circ - M_{2k} + M_2')\,\delta\psi_2' = 0 \quad (2.10)$$

Учитывая естественные краевые условия для основного состояния равновесия, формулы (2.10) можно упростить

$$l = \pm 1: M_1'\delta\psi_1' = 0,\ (H^\circ - H_{1k} + H')\,\delta\psi_2' = 0$$

$$m = \pm 1: (H^\circ - H_{2k} + H')\,\delta\psi_1' = 0,\ M_2'\delta\psi_2' = 0 \quad (2.11)$$

При однородных краевых условиях (2.11) однородное дифференциальное уравнение

$$\Omega^2\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.12)$$

имеет тривиальное решение $\Phi(x, y) = 0$, а возмущения углов поворота (2.8) тождественно равны нулю

$$\psi_1' = \psi_2' = 0 \tag{2.13}$$

С учетом (2.13), общие граничные условия (2.3) к уравнениям (2.9) разделяются относительно кинематических факторов ψ_i' $(i = 1,\ 2)$, w' и для уравнения

$$\nabla^2 w' = -p/(Gh) \tag{2.14}$$

принимают вид

$$l = \pm 1: (Gh\partial w'/\partial x - N_{1k})\,\delta w' = 0\ \ (1 \rightleftarrows 2;\ l \rightleftarrows m,\ x \rightleftarrows y) \tag{2.15}$$

Если пластина имеет свободный край, необходимо положить $M_l' = 0$, $H^\circ - H_{lk} + H' = 0$. В этом случае, согласно теории Кирхгофа, граничные условия для собственно крутящих моментов основного состояния на ставятся, $H^\circ \neq H_{lk}$ и краевые условия к уравнению (2.12) будут неоднородными $H' = H_{lk} - H^\circ \neq 0$. Решение (2.13) здесь не справедливо, а условия на граничном контуре для дифференциального уравнения (2.14) оказываются связанными с решением краевой задачи для уравнения (2.12):

$$l = \pm 1: [Gh\,(\psi_1' + \partial w'/\partial x) - N_{1k}]\,\delta w' = 0\ \ (1 \rightleftarrows 2,\ l \rightleftarrows m,\ x \rightleftarrows y)$$

При однородных краевых условиях полные углы поворота (1.5) совпадают с углами поворота основного состояния равновесия $\psi_1 = \psi_1^\circ$, $\psi_2 = \psi_2^\circ$. Отсюда следует независимость полных изгибающих и крутящих моментов от возмущений, связанных с поперечными сдвигами: $M_1 = M_1^\circ$, $M_2 = M_2^\circ$, $H = H^\circ$. Прогибы пластины с учетом сдвигов $w = w^\circ + w'$ находятся как сумма решений уравнения С. Жермен [13] для основного состояния

$$\nabla^2\nabla^2 w^\circ = p/D \tag{2.16}$$

и уравнения Пуассона (2.14) для возмущения w'. Функционал приращения энергии существенно упрощается

$$\Delta\Pi = \iint\limits_{(F)} \left[\frac{1}{2}\left(N_1\frac{\partial w'}{\partial x} + N_2\frac{\partial w'}{\partial y}\right) - pw'\right] dF - \int\limits_{(\Gamma)} (N_{1k}l + N_{2k}m)\,w'ds \tag{2.17}$$

В [4] предложен близкий вариант разделения уравнений изгиба пластин с учетом сдвигов, не связанный с энергетическими представлениями.

В качестве примера редукции уравнений теории пластин приведем решение задачи об изгибе свободно опертой пластинки с учетом деформаций сдвига при действии давления

$$p = \sum_{m=1}^{\infty}\int_{n=1}^{\infty} p_{mn}\sin\alpha x\sin\beta y,\quad \alpha = \frac{m\pi}{a},\quad \beta = \frac{n\pi}{b} \tag{2.18}$$

Дифференциальные уравнения равновесия и краевые условия найдем из вариационного уравнения Лагранжа для функционала (1.1) варьируя обобщенные перемещения w, ψ_1, ψ_2. В декартовых координатах с учетом (1.2)—(1.4) получим уравнения в смещениях

$$L_{11}\psi_1 + L_{12}\psi_2 + L_{13}w = 0,\ L_{21}\psi_1 + L_{22}\psi_2 + L_{23}w = 0,\ L_{31}\psi_1 + L_{32}\psi_2 + L_{33}w = 0$$

$$L_{11} = D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - Gh,\ L_{22} = D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - Gh,\ L_{33} = -Gh\nabla^2$$

$$L_{12} = L_{21} = D\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},\ L_{13} = L_{31} = -Gh\frac{\partial}{\partial x},\ L_{23} = L_{32} = -Gh\frac{\partial}{\partial y}$$

$$l = \pm 1: (M_1 - M_{1k})\,\delta\psi_1 = 0,\ (H - H_{1k})\,\delta\psi_2 = 0,\ (N_1 - N_{1k})\,\delta w = 0$$

$$(1 \rightleftarrows 2,\ l \rightleftarrows m) \tag{2.19}$$

Решение краевой задачи (2.19) в тригонометрических рядах при $M_{ik} = N_{ik} = N_{ik} = 0$ $(i = 1,\ 2)$ и свободном опирании пластины на жесткий контур известно [14]:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\sin\alpha x\sin\beta y,\quad w_{mn} = \frac{p_{mn}}{D(\alpha^2+\beta^2)}\left[1 + \frac{D}{Gh}(\alpha^2+\beta^2)\right]$$

$$\psi_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1,mn}\cos\alpha x\sin\beta y,\quad \psi_{1,mn} = -\frac{\alpha p_{mn}}{D(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

$$\psi_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2,mn}\sin\alpha x\cos\beta y,\quad \psi_{2,mn} = -\frac{\beta p_{mn}}{D(\alpha^2+\beta^2)^2} \tag{2.20}$$

При разделении уравнений изгиба по методу, изложенному в п. 1, для основного состояния равновесия (2.16) воспользуемся решением Навье [15]:

$$w^\circ = w_{mn}^\circ\sin\alpha x\sin\beta y,\quad \psi_1^\circ = -\partial w^\circ/\partial x = \psi_{1,mn}^\circ\cos\alpha x\sin\beta y$$

$$\psi_2^\circ = -\partial w^\circ/\partial y = \psi_{2,mn}^\circ\sin\alpha x\cos\beta y,\quad w_{mn}^\circ = p_{mn}/D(\alpha^2+\beta^2)^2$$

$$\psi_{1,mn}^\circ = -\alpha p_{mn}/D(\alpha^2+\beta^2)^2,\quad \psi_{2,mn}^\circ = -\beta p_{mn}/D(\alpha^2+\beta^2)^2 \tag{2.21}$$

Здесь и далее символы двойных сумм опускаем.

Для нахождения возмущения w' будем искать решение дифференциального уравнения (2.14) в виде ряда

$$w' = w_{mn}'\sin\alpha x\sin\beta y \tag{2.22}$$

удовлетворяющего краевым условиям (2.15) $l = \pm 1$, $m = 0$: $w' = 0$; $m = \pm 1$, $l = 0$: $w' = 0$. В результате подстановки (2.22) в уравнение (2.14), с учетом (2.13), получим

$$w_{mn}' = p_{mn}/[Gh(\alpha^2+\beta^2)],\quad \psi_{1,mn}' = \psi_{2,mn}' = 0 \tag{2.23}$$

Суммирование результатов (2.21) и (2.23) $w = w^\circ + w'$, $\psi_1 = \psi_1^\circ + \psi_1'$ $(1 \rightleftarrows 2)$ приводит к формулам (2.20), полученным интегрированием общих уравнений изгиба пластины с учетом поперечных сдвигов.

Отметим здесь полное разделение жесткостей на изгиб и поперечный сдвиг в уравнениях (2.21), (2.23) и энергетическом функционале (2.17), на основе которого возможен конечноэлементный анализ возмущений пластины. Можно предполагать, что выделение матриц трансверсальной жесткости в самостоятельные структуры будет способствовать повышению эффективности численных алгоритмов для вырожденнных задач.

3. Приближенные уравнения пологих оболочек. Рассмотрим весьма пологую оболочку из трансверсально изотропного материала с теми же механическими характеристиками, что и в п. 2. В качестве внешней нагрузки на оболочку будем учитывать нормальную составляющую давления (2.18).

Отождествляя внутреннюю геометрию срединной поверхности с эвклидовой геометрией на плоскости, положим в уравнениях п. 1 $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $A_1 \approx 1$,

$A_2 \approx 1$. Кроме того, опуская тангенциальные смещения в выражениях для составляющих углов поворота нормали и изгибных деформаций, примем $\theta_1 = -\partial w/\partial x$, $\theta_2 = -\partial w/\partial y$, $2t = t_1 + t_2$.

Уравнения равновесия и краевые условия для оболочки получим, исходя из принципа возможных перемещений, с учетом поперечных сдвигов и зависимостей п. 1:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0, \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 = 0, \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - N_2 = 0$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial y} - p = 0; (T_1 l + Sm)\,\delta u = 0, (Sl + T_2 m)\,\delta v = 0$$

$$(N_1 l + N_2 m)\,\delta w = 0, (M_1 l + Hm)\,\delta\psi_1 = 0, (Hl + M_2 m)\,\delta\psi_2 = 0 \tag{3.1}$$

Присоединим к уравнениям (3.1) соотношения неразрывности деформаций и введем в рассмотрение функции усилий и перемещений Φ_1, Φ_2:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_2}\left(\varkappa_2 - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}\right) + \frac{1}{R_1}\left(\varkappa_1 - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y}\right) = 0, T_1 = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}$$

$$T_2 = \partial^2 \Phi_1/\partial x^2, S = -\partial^2\Phi_1/\partial x \partial y, \psi_1 = \partial \Phi_2/\partial x, \psi_2 = \partial\Phi_2/\partial y \tag{3.2}$$

Представим далее систему дифференциальных уравнений пологой оболочки с помощью зависимостей (3.1) и (3.2) в форме

$$L^2\left(1 - \frac{D}{Gh}\nabla^2\right)\Phi_2 + \frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\Phi_1 = 0, \; L^2\Phi_1 - D\nabla^2\nabla^2\Phi_2 = p$$

$$\nabla^2 w + \nabla^2\left(1 - \frac{D}{Gh}\nabla^2\right)\Phi_2 = 0, \; L^2 = \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3.3}$$

Вводя разрешающую функцию F согласно равенствам

$$\Phi_1 = -L^2\left(1 - \frac{D}{Gh}\nabla^2\right)F, \; \Phi_2 = \frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2 F$$

получим уравнения для определения функции F и прогибов w

$$\left[\frac{D}{Eh}\nabla^8 - L^4\left(1 - \frac{D}{Gh}\nabla^2\right)\right]F = -p, \; \nabla^2 w = -\frac{1}{Eh}\nabla^6\left(1 - \frac{D}{Gh}\nabla^2\right)F \tag{3.4}$$

Известны и другие варианты записи разрешающих уравнений теории пологих оболочек с конечной жесткостью на сдвиг [8].

На основе уравнений (3.1)—(3.4) могут быть построены традиционные методы решения линейных задач сдвиговой теории.

При интегрировании уравнений (3.1) путем выделения основного состояния точное решение для возмущений находится, исходя из функционала (1.13) с учетом допущений, принимаемых для пологих оболочек (п. 3).

Существенные упрощения при определении возмущений могут быть получены, если воспользоваться результатами п. 2 для дополнительных углов поворота пластины ψ_1', ψ_2' (2.13). Исходя их этих результатов, для приближенного решения задач технической теории оболочек естественно предположить, что в слабо искривленной пологой панели, как и в пластине, возмущения углов поворота пренебрежимо малы, в сравнении с поворотами основного состояния, то есть $\psi_1 = \psi_1^\circ + \psi_1' \approx \psi_1^\circ$ $(1 \rightleftarrows 2)$.

Иными словами, при получении приближенного решения можно считать, что в возмущенном состоянии пологая оболочка не испытывает дополнительных искривлений и для нее справедливы формулы (2.13). При таком допущении функционал Треффца (1.13) принимает вид

$$\delta(\Delta\Pi) = \iint\limits_{(F)} \Big[(T_1^\circ + T_1')\,\delta\varepsilon_1' + (T_2^\circ + T_2')\,\delta\varepsilon_2' + (S^\circ + S')\,\delta\omega' + N_1 \frac{\partial}{\partial x}\delta w' +$$

$$+ N_2 \frac{\partial}{\partial y}\delta w' - p\delta w'\Big]\, dF = 0,\ T_1' = B(\varepsilon_1' + \nu\varepsilon_2'),\ S' = 1/2\,(1-\nu)\,B\omega'$$

$$N_1 = Gh\gamma_1',\ M_1' = H' = 0,\ \varepsilon_1' = \partial u'/\partial x + w'/R_1,\ \omega' = \partial v'/\partial x + \partial u'/\partial y$$

$$\gamma_1' = \partial w'/\partial x,\ k_1' = t_1' = 0\ \ (1 \rightleftarrows 2) \tag{3.5}$$

Из вариационного уравнения (3.5), полагая независимыми вариации возмущений $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta w'$, придем к уравнениям Эйлера и краевым условиям

$$\frac{\partial T_1'}{\partial x} + \frac{\partial S'}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial S'}{\partial x} + \frac{\partial T_2'}{\partial y} = 0,\ \frac{T_1'}{R_1} + \frac{T_2'}{R_2} - \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial y} = D\nabla^2\nabla^2 w^\circ$$

$$l = \pm 1:\ (T_1^\circ + T_1')\,\delta u' = 0,\ (S^\circ + S')\,\delta v' = 0,\ N_1\delta w' = 0\ (1 \rightleftarrows 2,\ l \rightleftarrows m) \tag{3.6}$$

Дополняя систему уравнений (3.6) соотношениями неразрывности деформаций

$$\partial^2\varepsilon_1'/\partial y + \partial^2\varepsilon_2'/\partial x - \partial^2\omega'/\partial x\partial y - (1/R_2\,\partial^2/\partial x^2 + 1/R_1\,\partial^2/\partial y^2)\,w' = 0 \tag{3.7}$$

и удовлетворяя тождественно трем однородным уравнениям (3.6), (3.7) с помощью зависимостей

$$T_1' = L^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} F',\ T_2' = L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} F',\ S' = -L^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y},\ w' = \frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2 F' \tag{3.8}$$

придем к дифференциальному уравнению шестого порядка относительно разрешающей функции F':

$$(L^4 - (G/E)\,\nabla^6)\,F' = D\nabla^2\nabla^2 w^\circ \tag{3.9}$$

Сравнение точного и приближенного решений уравнений (3.4) и (3.9) для пологой оболочки рассмотрим на примере задачи об изгибе криволинейной, прямоугольной в плане панели с размерами a, b. Панель шарнирно оперта вдоль линий x, y и нагружена синусоидальной нагрузкой (2.18).

Приведем результаты точного решения этой задачи при краевых условиях $l = \pm 1$: $T_1 = M_1 = v = w = \psi_2 = 0$ $(1 \rightleftarrows 2)$. Функция F (3.4) разыскивалась в форме $F = f_{mn} \sin\alpha x \sin\beta y$ с учетом зависимостей

$$T_1 = t_{1,mn} \sin\alpha x \sin\beta y,\ v = v_{mn} \sin\alpha x \cos\beta y,\ w = w_{mn} \sin\alpha x \sin\beta y$$

$$M_1 = m_{1,mn} \sin\alpha x \sin\beta y,\ \psi_2 = \psi_{2,mn} \sin\alpha x \cos\beta y,\ \alpha = m\pi/a,\ \beta = n\pi/b \tag{3.10}$$

Искомое решение имеет вид [8]:

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}\rho^4}{Eh}\left(1 + \frac{D\rho^2}{Gh}\right) C(\alpha,\beta),\ C(\alpha,\beta) = \left[\frac{D\rho^8}{Eh} + \left(\frac{\alpha^2}{R_2} + \frac{\beta^2}{R_1}\right)^2\left(1 + \frac{D\rho^2}{Gh}\right)\right]^{-1}$$

$$\psi_{1,mn} = -p_{mn}\alpha\rho^4 C(\alpha,\beta)\,Eh,\quad \psi_{2,mn} = -p_{mn}\beta\rho^4 C(\alpha,\beta)\,Eh,\quad \rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 \tag{3.11}$$

Решение для основного состояния, отвечающее теории Кирхгофа — Лява и граничным условиям $l = \pm 1$: $T_1^\circ = M_1^\circ = v^\circ = w^\circ = 0$ $(1 \rightleftarrows 2,\ l \rightleftarrows m)$, можно найти в [11]. Ограничиваясь вычислениями прогибов и углов поворота, при $B(\alpha, \beta) = [(\alpha^2/R_2 + \beta^2/R_1)^2 + D\rho^8/Eh]^{-1}$ имеем

$$w_{mn}{}^{\circ} = \frac{p_{mn}\rho^4}{Eh} B(\alpha, \beta),\ \psi_{1,mn} = -\frac{p_{mn}\alpha\rho^4}{Eh} B(\alpha, \beta),\ \psi_{2,mn} = -\frac{p_{mn}\beta\rho^4}{Eh} B(\alpha, \beta) \quad (3.12)$$

При определении возмущений по приближенному уравнению (3.9) его решение находится в соответствии с краевыми условиями (3.6) $l = \pm 1$: $T_1' = v' = w' = 0$ $(1 \rightleftarrows 2,\ u \rightleftarrows v)$ и равенствами (3.8), (3.10) в форме: $F' = f_{mn}' \sin \alpha x \sin \beta y$. Представляя правую часть уравнения (3.9) с учетом выражения (3.12), получим

$$w_{mn}' = \frac{p_{mn}D\rho^{12}}{(Eh)^2} \left[\left(\frac{\alpha^2}{R_2} + \frac{\beta^2}{R_1}\right)^2 + \frac{G\rho^6}{E}\right]^{-1} \left[\left(\frac{\alpha^2}{R_2} + \frac{\beta^2}{R_1}\right) + \frac{D\rho^8}{Eh}\right]^{-1} \quad (3.13)$$

Приближенное решение для прогибов находится суммированием формул (3.12) и (3.13) $w_{mn}^{\vee} = w_{mn}{}^{\circ} + w_{mn}'$.

Для квадратной сферической панели $b = a$, $R_1 = R_2 = R$, нагруженной синусоидальной нагрузкой $m = n = 1$ (2.18), были проведены численные исследования точного и приближенного значений прогибов w и $w^{\vee}$ при $x = y = a/2$. Погрешность приближенного решения в функции безразмерных величин $\lambda = a^2/Rh$, $\mu = (E/G)(h/a)^2$ вычислялась в процентах δ, $\% = 100\,(w^{\vee} - w)/w$. При изменении параметров оболочки в пределах $0 \le a/R \le 1,3$, $1/200 \le h/a \le 1/20$, $2,6 \le E/G \le 500$ она составляет $(1-5)\%$, что свидетельствует о достаточной точности приближенного решения для рассмотренной задачи теории пологих оболочек.

Отметим, что прием разделения уравнений сдвиговой теории оболочек и пластин, как частный случай, реализуется при любых краевых условиях для балки Тимошенко [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алфутов Н. А., Попов Б. Г., Быков Е. В.* Применение смешаннных функционалов в численных методах расчета конструкций//Изв. ВУЗ. Машиностроение. 1983. № 9. С. 3—7.
2. *G. R. Bhashyam, P. H. Gallahger.* An approach to the inclusion of transverse shear deformation in finite element plate//Internat. Comp. and Struct. 1984. V. 19. No. 1/2. P. 35—40.
3. *S. W. Lee, T. H. H. Pian.* Improvement of plate and shell finite elements by mixed formulations//AIAA J. 1978. V. 16. P. 29—34.
4. *Donnell L. H.* Beams, Plate and Shells. New York — London: Mc Graw-Hill Book Comp, 1976. 642 p.
5. *Васильев В. В.* О теории тонких пластин//Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 26—42.
6. *Галимов К. З.* О некоторых направлениях развития механики деформируемого тела в Казани//Сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. XIV. Изд. Казан. ун-та. 1979. С. 11—82.
7. *Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В.* Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко — Рейсснера//Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 124—138.
8. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
9. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. I. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
10. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
11. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
12. *Вайникко Г. М.* Метод Треффца. Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Сов. энциклопедия, 1985. 1246 с.
13. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 464 с.
14. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
15. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
16. *Timoshenko S. P.* On the correction for shear of the Differential Equations to Transverse Vibrations of Prismatic Bars//Phil. Mag. 1921. Ser. 6. V. 41. P. 744—746.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1993