МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1995

УДК 539.375

© 1995 г. А. В. БАЛУЕВА, Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН

МЕТОД РАСЧЕТА КИНЕТИКИ ТРЕЩИН В СРЕДЕ С ОБЪЕМНЫМ ГАЗОВЫДЕЛЕНИЕМ

Многие материалы современной техники проявляют специфические свойства объемного газовыделения при действии тех или иных механических и (или) физических воздействий, а также в результате старения. В частности, газовыделение при старении характерно для ряда полимерных материалов. Ряд металлов и сплавов, применяемых в ядерной энергетике, становятся газовыделяющими под влиянием радиационного воздействия [1].

Объемное газовыделение служит нередко причиной зарождения и кинетического развития трещин и трещиноподобных дефектов в элементах конструкций.

Анализ кинетики трещин предусматривает в таком случае совместное рассмотрение процессов диффузии газа в трещину и медленного роста трещины под действием давления газа в ее полости, а также иных механических нагрузок, которые могут быть приложены к конструкции.

В работе предлагается метод численного решения указанного класса трехмерных задач для среды с трещинами, занимающими плоскую область. И задачи диффузии в трещину, и задачи теории роста трещин решаются путем предварительного их сведения к интегродифференциальным уравнениям по области трещины. Расчет кинетики проводится пошагово. Применяемые алгоритмы являются развитием предложенных ранее [2].

В модельных расчетах принималось, что скорость роста трещины в каждой точке контура трещины v зависит от коэффициента интенсивности напряжений в этой точке K_I. Более общая ситуация, когда v является также функционалом от концентрации газа в концевой зоне трещины рассматривается аналогично. Соответствующие результаты будут опубликованы отдельно.

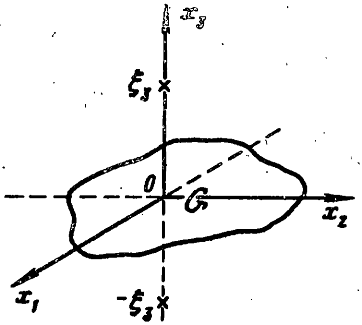
1. Постановка задачи. Рассматривается медленный квазистационарный рост трещины отрыва, занимающей область G в плоскости $x_3 = 0$ и появившейся в момент времени $t = 0$ (фиг. 1). Считается, как это принято в кинетических теориях, что скорость v [см/с] в каждой точке контура трещины зависит от коэффициента интенсивности напряжений N и задается характерной для данного материала кривой $v(N)$ (фиг. 2). Трещина растет под действием поступающего в нее газа от источников газовыделения распределенных в объеме тела и моделируется идеальным стоком (вдали от равновесного состояния). Полагаем также, что скорость распространения трещины мала по сравнению со скоростью установления переходных процессов, и поток в трещину находим из решения стационарной задачи диффузии в каждый момент времени t. Пусть сначала в теле имеется два источника диффузии интенсивности W, расположенные на оси симметрично на расстоянии ξ_3 от трещины (фиг. 1). В силу симметрии задачи относительно плоскости трещины, рассматриваем задачу в полупространстве $x_3 \geq 0$.

Имеем для концентрации газа $c(x_1, x_2)$ следующую граничную задачу:

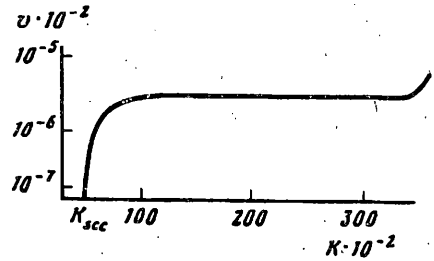
$$\Delta c = -\frac{W}{D}\delta(x_1)\,\delta(x_2)[\delta(x_3-\xi_3)+\delta(x_3+\xi_3)] \tag{1.1}$$

$$c|_{x_3=0} = 0,\ (x_1, x_2) \in G;\ \ \partial c/\partial x_3|_{x_3=0} = 0,\ (x_1, x_2) \overline{\in} G,\ \ c|_{x_3=\infty} = 0$$

где D — коэффициент диффузии газа в среде.



Фиг. 1



Фиг. 2

В задаче искомой является плотность диффузионного потока $q(x_1, x_2) = \partial c/\partial x_3|_{x_3=0}$ при $(x_1, x_2) \in G$. Для построения интегрального уравнения относительно функции q, как обычно, рассмотрим сначала решение задачи диффузии газа при наличии источников в среде без трещины

$$\Delta c_0 = -\frac{W}{D}\delta(x_1)\delta(x_2)[\delta(x_3 - \xi_3) - \delta(x_3 + \xi_3)]$$

$$\partial c_0/\partial x_3|_{x_3=0} = 0, \quad c_0|_{x_3=\infty} = 0 \tag{1.2}$$

Решением этой задачи является функция

$$c_0(x_1, x_2, x_3) = \frac{W}{4\pi D}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{1.3}$$

$$R_{1,2} = [x_1^2 + x_2^2 + (x_3 \mp \xi_3)^2]^{1/2}$$

и концентрация газа в плоскости трещины есть

$$c_0(x_1, x_2, 0) = \frac{W}{2\pi D}\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}} \tag{1.4}$$

Запишем теперь решение задачи теории диффузии без источников, но с концентрацией газа в трещине равной по величине и противоположной по знаку, вычисленной в первой задаче

$$\Delta c = 0, \quad c|_{x_3=0} = -\frac{W}{2\pi D}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}}, \quad (x_1, x_2) \in G \tag{1.5}$$

$$\partial c/\partial x_3|_{x_3=0} = 0, \quad (x_1, x_2) \overline{\in} G, \quad c|_{x_3=\infty} = 0$$

Для плотности диффузионного потока q получаем, используя (1.5), следующее интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_G \frac{q(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}} = \frac{W}{2\pi D}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}} \tag{1.6}$$

Если в трещине задана ненулевая концентрация газа c^0: $c|_{x_3=0} = c^0$, $(x_1, x_2) \in G$, аналогичным путем приходим к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\iint_G \frac{q(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}} = \frac{W}{2\pi D}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}} - c^0(x_1, x_2) \tag{1.7}$$

Если два симметричных относительно плоскости трещины источника находятся не на оси x_3, а в произвольных точках тела (a, b, ξ_3) и $(a, b, -\xi_3)$, интегральное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\iint_G \frac{q(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}} = \frac{W}{2\pi D}\frac{1}{\sqrt{(x_1-a)^2+(x_2-b)^2+\xi_3^2}} \tag{1.8}$$

В случае нескольких точечных источников диффузии газа в теле или распределенных с плотностью $W(x_1, x_2, x_3)$, имеем по принципу суперпозиции соответствующие уравнения

$$\iint_G \frac{q(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}} = \frac{1}{D}\sum_i \frac{W_i}{\sqrt{(x_1-a_i)^2+(x_2-b_i)^2+\xi_{3_i}^2}} \tag{1.9}$$

$$\iint_G \frac{q(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}} = \frac{1}{D}\iiint_T \frac{W(y_1, y_2, y_3)\, dy_1\, dy_2\, dy_3}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+y_3^2}} \tag{1.10}$$

где W_i — интенсивность источников, расположенных соответственно в точках $(a_i, b_i, \pm\xi_{3_i})$, а T — область распределения источников диффузии с плотностью $W(x_1, x_2, x_3)$.

Для определения упругих полей, индуцированных диффузией газа в трещину рассмотрим задачу о трещине нормального отрыва, к поверхностям которой приложена нагрузка p, где p — давление газа, которое изменяется в зависимости от объема растущей трещины и массы поступившего газа. Будем считать газ идеальным, тогда объем трещины V, масса газа M и его давление связаны уравнением Клайперона $pV = MRT/\mu$, где μ — молекулярный вес газа, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура газа.

После сведения упругой задачи также к ГИУ, получаем систему уравнений задачи

$$\frac{W}{D}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\xi_3^2}} = \iint_{G(t)} \frac{q(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}} \tag{1.11}$$

$$p(t) = -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)}\Delta_{x_1 x_2}\iint_{G(t)} \frac{u(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}} \tag{1.12}$$

$$pV = nRT \tag{1.13}$$

$$V(t) = \iint_{G(t)} u(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \tag{1.14}$$

$$Q = -\iint_{G(t)} q(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \tag{1.15}$$

$$n(t+\Delta t) = n(t) + Q\Delta t \tag{1.16}$$

$$u(\xi, s, t) = \frac{4(1-\nu^2)}{E} N(s, t)\sqrt{\xi} \tag{1.17}$$

$$v(s, t) = f(N(s, t)) \tag{1.18}$$

$$R(t+\Delta t, s) = R(t, s) \tag{1.19}$$

где уравнение (1.11) — интегральное уравнение для нахождения плотности диффузионного потока $q(x_1, x_2)$, в зависимости от количества источников и их местоположения может заменяться на уравнения (1.7)—(1.10); (1.12) — интегродифференциальное уравнение для определения вертикального раскрытия трещины $u(x_1, x_2)$, n — количество молей газа в трещине, $Q = \partial n/\partial t$ — расход газа через трещину, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона среды; уравнения (1.17)—(1.19) — расчет коэффициента интенсивности напряжений N и нового контура трещины.

Решение задачи осуществляется пошагово. На каждом шаге по t основную вычислительную трудность представляет решение интегродифференциальных уравнений (1.11), (1.12) и расчет нового контура трещины по вычисленным скоростям v (1.18) в точках предыдущего контура. Последний расчет представляет собой отдельную вычислительную задачу [1]. Процедура решения упругой задачи о трещине нормального отрыва (уравнение (1.12)) также разработана [2]. Поэтому отдельно остановимся на численном методе решения диффузионного уравнения (1.11). В случае круговой области удается получить аналитическое решение для этого уравнения.

2. Численный метод решения диффузионного уравнения.

Метод решения интегродифференциального уравнения базируется на МГЭ [3]. А именно, после дискретизации, значения плотности диффузионного потока q в узлах сетки отыскивается в виде разложения по системе координатных функций $\psi_{p_1p_2}$:

$$q(x_1, x_2) = \sum_{p_1p_2} c_{p_1p_2}\psi_{p_1p_2}(x_1, x_2, h) \tag{2.1}$$

где $\psi_{p_1p_2}$ — стандартный конечный элемент или базисная функция, отличная от нуля только в четырех примыкающих к точке (p_1, p_2) ячейках сетки.

Коэффициенты $c_{p_1p_2}$ совпадают со значением $q(x_1, x_2)$ в узлах сетки и находятся в результате минимизации соответствующего квадратичного функционала.

$$\min\left\{I(h) = \sum_{p_1p_2}\sum_{q_1q_2} a_{p_1-q_1,\, p_2-q_2} c_{p_1p_2} c_{q_1q_2} + 2\sum_{p_1p_2} c_{p_1p_2} b_{p_1p_2}\right\} \tag{2.2}$$

$$a_{p_1p_2q_1q_2} = a_{|p_1-q_1|,\, |p_2-q_2|} = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\xi|}\psi_{p_1p_2}(\xi, h)\overline{\psi_{q_1q_2}(\xi, h)}\, d\xi \tag{2.3}$$

$$\psi_{p_1p_2}(\xi, h) = h^2 e^{ih(p_1\xi_1+p_2\xi_2)} \frac{\sin^2(h\xi_1/2)}{(h\xi_1/2)^2}\frac{\sin^2(h\xi_2/2)}{(h\xi_2/2)^2} \tag{2.4}$$

$$b_{p_1p_2} = \iint\limits_{g^{2h}_{p_1p_2}} p(x_1, x_2)\,\psi_{p_1p_2}(x_1, x_2, h)\, dx_1\, dx_2 \tag{2.5}$$

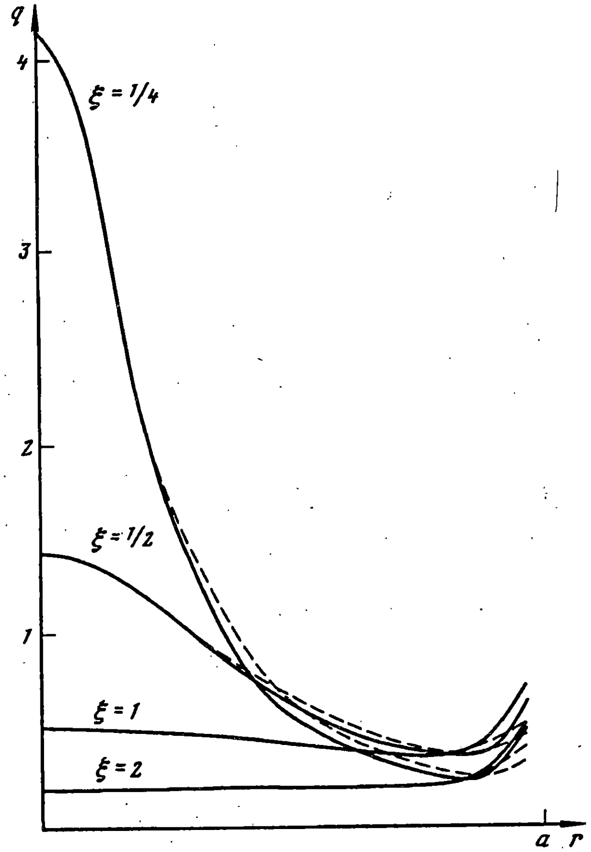
$$p(x_1, x_2) = \frac{W}{D}\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}} \tag{2.6}$$

Минимизация функционала осуществляется методом проекции градиента с автоматическим выбором шага по соотношению между линейным и действительным приращением функционала [3].

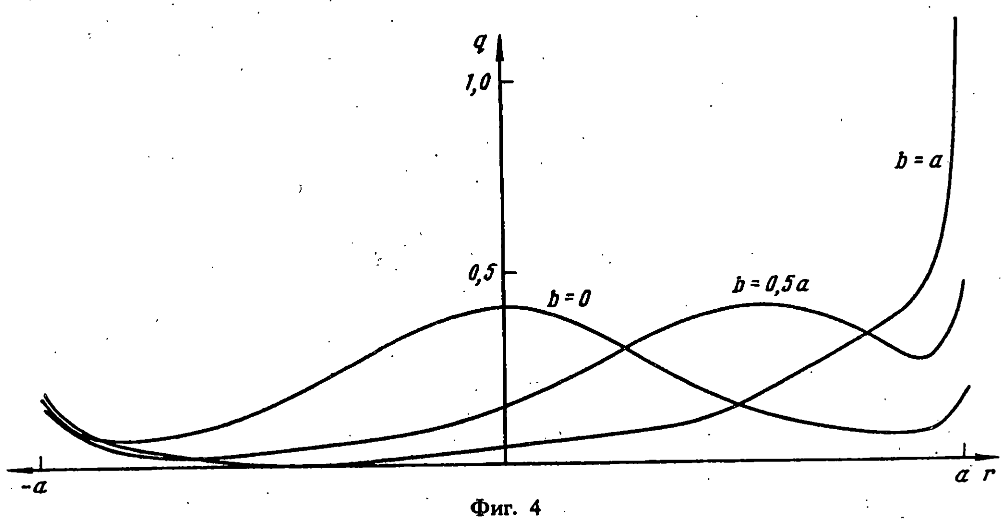
3. Результаты расчетов. Проводились расчеты потока диффузии в трещину в форме единичного круга с радиусом $r = 1$ от источника, находящегося на оси x_3 на расстоянии ξ_3. Задавались разные значения ξ_3 соответственно равные 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2. Графики зависимости плотности диффузионного потока $q = \partial c/\partial z$ в трещине по ее радиусу представлены на фиг. 3. Сильное отличие

[1] См. *Гольдштейн Р. В., Отрощенко Р. П., Федоренко Р. П.* Метод уточняющих граничных сеток в пространственных задачах о трещинах в упругих телах. — М.: Препринт ИПМ АН СССР № 230, 1984, 64 с.

[2] См. *Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И.* Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости.— М.: Препринт № 33 ИМП АН СССР, 1973, 56 с.



Фиг. 3



Фиг. 4

диффузионного потока в зависимости от расстояния ξ_3 источника диффузии до трещины наблюдается в центре трещины, чем ближе источник, тем больше всплеск (в центре график имеет вид δ — функции, как это имело бы место в задаче для полупространства без трещины). На контуре трещины поток опять начинает возрастать (поток имеет корневую особенность на контуре трещины, как в задаче о притоке к трещине без источника диффузии). Здесь потоки не сильно отличаются в зависимости от ξ_3, так как основную роль здесь играют граничные эффекты. При этом максимальный рост наблюдается при $\xi_3 = 1$. При $\xi_3 = 1$ также уже не наблюдается δ — образное возрастание потока в центре трещины, а поток практически одинаков по площади трещины за исключением приграничных к контуру областей, где он возрастает. При дальнейшем увеличении расстояния ξ_3 источника от трещины плотность потока также постоянна по площади трещины, но имеет все меньшее значение, и возрастает вблизи контура также с меньшим подъемом.

Проводились также расчеты плотности диффузионного потока для несимметрично расположенных относительно центра трещины источников диффузии (фиг. 4). Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют источнику, расположенному на расстоянии $\xi_3 = 0{,}5$ от плоскости трещины со сдвигом по оси x равным 0 (центр трещины), $a/2$, a, где a — радиус трещины.

4. Решение для задачи диффузии от точечного источника в осесимметричном случае. В случае круговой трещины радиуса a и точечного источника, находящегося на оси x_3, интегральное уравнение (1.11) принимает вид

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{q(\rho)\,\rho\, d\rho}{\sqrt{r^2+\rho^2+2r\rho\cos\varphi}} = \frac{W}{D}\frac{1}{\sqrt{r^2+\xi_3^2}}, \quad r \le a \tag{4.1}$$

Перепишем его в виде

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{q(\rho)\,\rho\, d\rho}{\sqrt{r^2+\rho^2+2r\rho\cos\varphi}} = g(r), \quad r \le a$$

Это интегральное уравнение может быть представлено в форме [4]:

$$\int_0^a q(\rho)\, K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)\frac{\rho\, d\rho}{r+\rho} = \frac{1}{4} g(r) \tag{4.2}$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{4.3}$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл 1 рода.

По свойствам функций Бесселя

$$\frac{2}{\pi} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)\frac{1}{r+\rho} = \int_0^\infty J_0(ur)\, J_0(u\rho)\, du \tag{4.4}$$

и уравнение (4.2) принимает вид

$$\int_0^\infty J_0(ur)\, du \int_0^a q(\rho)\,\rho J_0(u\rho)\, d\rho = \frac{\pi}{8} g(r), \quad r \le a \tag{4.5}$$

Обозначим

$$\int_0^a q(\rho)\,\rho J_0(u\rho)\, d\rho = \Phi(u) \tag{4.6}$$

Уравнение (4.5) переписывается в виде

$$\int_0^\infty \Phi(u)\, J_0(ur)\, du = \frac{1}{2\pi} g(r), \quad 0 \le r \le a \tag{4.7}$$

Из свойств преобразования Бесселя из (4.6) имеем

$$\int_0^\infty \Phi(u)\, uJ_0(ur)\, du = \begin{cases} g(r), & r \le a \\ 0, & r > a \end{cases} \tag{4.8}$$

Приходим к системе парных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \Phi(u)\, J_0(ur)\, du = \frac{1}{2\pi} g(r), \quad 0 \le r \le a \tag{4.9}$$

$$\int_0^\infty \Phi(u)\, uJ_0(ur)\, du = 0, \quad r \geqslant a$$

Решение системы (4.9) можно записать в виде [5]:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^a \cos ut \left[\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{yg(y)}{\sqrt{t^2 - y^2}} \right] dt \tag{4.10}$$

$$q(r) = \int_0^\infty \Phi(u)\, uJ_0(ur)\, du \tag{4.11}$$

В нашем случае $g(y) = W/[D(y^2 + c^2)^{1/2}]$ и интеграл (4.10) принимает вид

$$\Phi(u) = \frac{1}{\pi^2} \frac{W}{D} \int_0^a \cos ut \left[\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 + c^2}\, \sqrt{t^2 - y^2}}\, dt \right] \tag{4.12}$$

Подынтегральное выражение равно [6]:

$$\int_0^t \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 + c^2}\, \sqrt{t^2 - y^2}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{t^2 - c^2}{t^2 + c^2} \tag{4.13}$$

и после дифференцирования по t функция $\Phi(u)$ приводится к виду

$$\Phi(u) = \frac{1}{\pi^2} \frac{W}{D} c \int_0^a \frac{\cos ut}{t^2 + c^2}\, dt \tag{4.14}$$

Представим интеграл в виде суммы двух частей (опуская множитель W/D):

$$\frac{1}{\pi^2} c \int_0^a \frac{\cos ut}{t^2 + c^2}\, dt = \frac{1}{\pi^2} c \int_0^\infty \frac{\cos ut}{t^2 + c^2}\, dt - \frac{1}{\pi^2} c \int_0^\infty \frac{\cos ut}{t^2 + c^2}\, dt \tag{4.15}$$

Тогда решение $q(r)$ в (4.11) можно также представить

$$q(r) = q_1(r) + q_2(r) \tag{4.16}$$

Ввиду известного выражения [7]:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ut}{t^2 + c^2}\, dt = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-uc}}{c}$$

первая часть принимает вид

$$\frac{1}{\pi^2} c \int_0^\infty \frac{\cos ut}{t^2 + c^2}\, dt = \frac{1}{2\pi} e^{-cu} \tag{4.17}$$

что вносит вклад в решение (4.11):

$$q_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-cu} uJ_0(ru)\, du \tag{4.18}$$

Из выражения (2.12.8.4) в [8] имеем

$$\int_0^\infty e^{-cu} uJ_0(ru)\, du = \frac{4cr\Gamma(3/2)}{\sqrt{\pi}\, (c^2 + r^2)^{3/2}} \tag{4.19}$$

или

$$\int_0^\infty e^{-cu} u J_0(ru)\,du = \frac{c}{(c^2+r^2)^{3/2}}$$

Откуда следует

$$q_1(r) = \frac{1}{2\pi}\frac{c}{(c^2+r^2)^{3/2}} \tag{4.20}$$

Для второй части решения (4.16) имеем

$$q_2(r) = -\frac{1}{\pi^2} c \int_0^\infty \int_a^\infty \frac{\cos ut}{t^2+c^2}\,dt u J_0(ru)\,du \tag{4.21}$$

Ввиду сходимости интегралов меняем порядок интегрирования

$$q_2(r) = -\frac{1}{\pi^2} c \int_a^\infty \frac{1}{t^2+c^2}\left\{\int_0^\infty \cos ut u J_0(ru)\,du\right\} dt \tag{4.22}$$

или из [7] получаем

$$q_2(r) = \frac{c}{\pi^2}\int_a^\infty \frac{t}{(t^2+c^2)(t^2-r^2)^{3/2}}\,dt \tag{4.23}$$

или

$$q_2(r) = \frac{c}{\pi^2}\frac{1}{2}\int_{a^2}^\infty \frac{dx}{(x+c^2)(x-r^2)^{3/2}}$$

Представим $q_2(r)$ в виде

$$q_2(r) = \frac{c}{\pi^2}\left\{-\frac{1}{(x+c^2)(x-r^2)^{1/2}}\Bigg|_{a^2}^\infty - \int_{a^2}^\infty \frac{dx}{(x-r^2)^{1/2}(x+c^2)^2}\right\} \tag{4.24}$$

Из [6] имеем

$$\int_{a^2}^\infty \frac{dx}{(-r^2+x)^{1/2}(c^2+x)^2} = \frac{1}{(r^2+c^2)}\left\{\frac{(x-r^2)^{1/2}}{(c^2+x)}\Bigg|_{a^2}^\infty - \frac{1}{2}\int_{a^2}^\infty \frac{dx}{(-r^2+x)^{1/2}(c^2+x)}\right\} \tag{4.25}$$

Вычисляя второй интеграл [6]:

$$\int_{a^2}^\infty \frac{dx}{(-r^2+x)^{1/2}(c^2+x)} = \frac{2}{\sqrt{r^2+c^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \tag{4.26}$$

и собирая воедино (4.20), (4.24), (4.25), (4.26) получаем из (4.16) искомое выражения для плотности диффузионного потока

$$q(r) = \frac{1}{2\pi}\frac{c}{(c^2+r^2)^{3/2}} + \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{c}{(a^2+c^2)\sqrt{a^2-r^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{c}{(r^2+c^2)}\left[-\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{(c^2+a^2)} - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{r^2+c^2}}\right.\right.$$

или после преобразований

$$q(r) = \frac{1}{\pi}\frac{c}{(c^2+r^2)^{3/2}} + \frac{1}{\pi^2}\frac{c}{(c^2+r^2)\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{1}{\pi^2}\frac{c}{(c^2+r^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{r^2+c^2}} \tag{4.27}$$

При радиусе трещины $a \to \infty$ асимптотика решения имеет вид

$$q(r) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{c}{(c^2 + r^2)^{3/2}} \tag{4.28}$$

что совпадает с решением задачи об источнике диффузии в полупространстве. На контуре трещины, т. е. при $r \to a$, имеем асимптотику решения

$$q(r) \sim \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(c + a^2/c)} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{4.29}$$

Таким образом, решение имеет корневую особенность, что и имеет место в задаче диффузии газа в трещину, если концентрация задана на бесконечности Как и наблюдалось в численных расчетах, максимальный подъем графика функцу $q(r)$ на контуре происходит при расстоянии от источника до трещины $c = a^2$, где a — радиус трещины (в численных расчетах a равнялось единице).

Проводилось сопоставление численных расчетов с полученными аналитическими (штриховые линии на фиг. 3). Наблюдается хорошее совпадение численных результатов с аналитическими по области трещины вплоть до предпоследнего приграничного узла вблизи контура трещины и численное решение «портится» на последних примыкающих к границе узлах сетки. Это связано с наличием корневой особенности решения на контуре. Трудности подобного рода возникают и при решении интегродифференциального уравнения для трещины нормального отрыва (уравнение (1.12)), которое нужно решать в общей постановке задачи о росте трещины при диффузии в нее газа от источника (система уравнений (1.11)—(1.19)). Обычно улучшение качества решения достигается путем сгущения сетки, использования конечных элементов неправильной формы или использования базисных функций, учитывающих асимптотику. Все эти методы нарушают теплицевость матрицы жесткости, что, в свою очередь, приводит к существенному увеличению затрат машинного времени памяти, которые и так ввиду пространственности задач значительны. В данном случае используется эффективный метод уточнения решения вблизи контура — метод уточняющих граничных сеток [3]. Решение уточняется вблизи каждого ребра границы с помощью специальным образом построенной вокруг него сетки с более мелким шагом. При этом используется та же матрица жесткости и, тем самым, сохраняется ее теплицевость. Такая процедура проводится при решении интегродифференциального уравнения для трещины (1.12), так как в результате решения требуется вычислить коэффициенты интенсивности напряжений или как раз точное решение или асимптотику вблизи контура. При решении интегродифференциального уравнения (1.11) задачи диффузии в конечном счете интересует полный расход газа через трещину, т. е. некоторая интегральная характеристика, для расчета которой данная точность на контуре трещины вполне достаточна (расход вычисляется с точностью 1—2%).

5. Расчет роста трещин при диффузии в них газа от источника. На основе описанных методов решения соответственно интегродифференциальных уравнений диффузионной задачи (1.11) и задачи теории упругости (1.12) разрабатывается комплекс программ, позволяющий рассчитывать время роста и эволюцию формы и размеров трещины под действием диффузии газа от одиночного источника диффузии или источников, расположенных с какой-то плотностью в теле. Задача решается в квазистационарной постановке. На каждом шаге по t решается система уравнений (1.11)—(1.19). До начала роста трещины рассчитывается период инкубации t_i, т. е. время, в течение которого раскрытие трещины в результате диффузии в нее газа достигнет величины, обеспечивающей превышение максимальным коэффициентом интенсивности по контуру уровня K_{scc} — нижнего порогового значения трещиностойкости (см. фиг. 2).

---

[3] См. указ. публ. на стр. 152.

Процедура расчета времени инкубации и численный метод решения общей диффузионно-упругой задачи был изначально разработан для тел, диффузия газа в которых объяснялась внешними причинами [4] (т. е. задавалась концентрация газа на ∞ и решалось просто уравнение Лапласа без правой части). Кратко остановимся на общей схеме расчета распространения трещины:

1) вычисляется давление газа в трещине, занимающей текущую область $G(t)$: $p^2(t) = n(t) RT/V_1(t)$, где $V_1(t)$ — объем трещины, занимающей новую область $G(t)$, при единичной нагрузке $p = 1$, $n(t)$ — количество газа, вычисляется на предыдущем шаге.

2) находятся коэффициенты интенсивности напряжений вдоль контура трещины и по ним скорости распространения v_l.

3) нормальные расстояния к контуру трещины, которые покрывают дискретные точки контура при распространении, определяются как $\Delta u_l = v_l \Delta t$, где интервал времени Δt вычисляется так, чтобы точки контура, распространяющиеся с максимальной скоростью v_l, проходили некоторое малое расстояние Δu, подбираемое экспериментально.

4) из координат распространяющихся и стационарных точек с помощью процедуры сглаживания определяется форма нового контура.

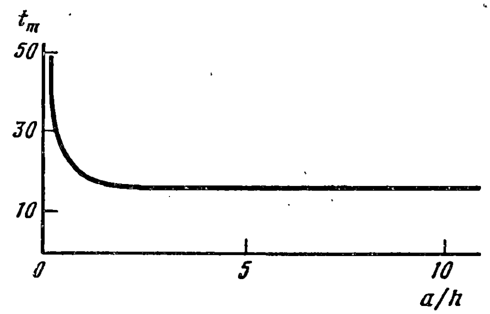
5) решается задача диффузии, определяется интегральный поток по поверхности трещины $q(x_1, x_2)$, полный расход газа Q и новое количество газа в трещине $n(t + \Delta t) = n(t) + Q\Delta t$.

6) все повторяется с шага 1.

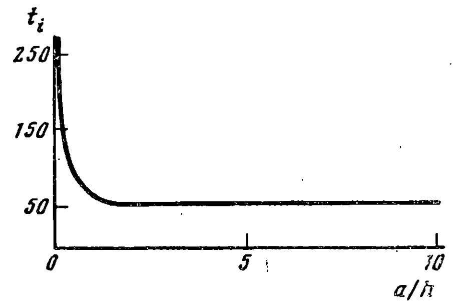
Проведены модельные расчеты распространения круговых трещин в плане от единичного источника диффузии газа в теле. Вычислялись период инкубации t_i и время роста трещин от начального до удвоенного радиуса t_m. Изучалась зависимость инкубационного периода t_i и времени роста t_m от расстояния источника диффузии h до плоскости трещины (фиг. 5, 6). Времена роста и инкубации начинают существенно возрастать с момента сравнивания расстояния h до источника и радиуса трещины a и дальнейшего увеличения h (удаленный источник слабо влияет на распространение трещин). При уменьшении расстояния источника до трещины приток газа к трещине возрастает, давление увеличивается, что приводит к росту коэффициента интенсивности напряжений по контуру, а значит скорости, которая выходит на стационарное значение (фиг. 2) и время роста и период инкубации практически не зависят от h. Проводилась дальнейшая серия расчетов для зависимости долговечности от интенсивности источников диффузии W (фиг. 7, 8). Чем больше интенсивность источников, тем меньше долговечность.

Изучалось поведение и рост трещин при несимметрично расположенном источнике относительно оси трещины. Однако несимметрия положения источника не оказывает существенного влияния на результаты, поскольку в расчетах использовалась кинетическая зависимость трещиностойкости, не учитывающая возможные ее изменения под влиянием агрессивной среды, находящейся в материале в зоне контура трещины. Распределение среды вдоль контура, вообще говоря, неоднородно. Можно ожидать, что скорость роста трещины определяется в рассматриваемых процессах не только уровнем коэффициента интенсивности напряжений, но является функционалом распределения концентраций в окрестности трещины. В простейшем случае, ограничиваясь несколькими первыми членами разложения этого функционала, придем к зависимости скорости трещины от концентрации и ее первой и второй производных по z. Эти производные уже меняются вдоль контура трещины в зависимости от местоположения источника диффузии. При такой более общей кинетической зависимости трещиностойкости

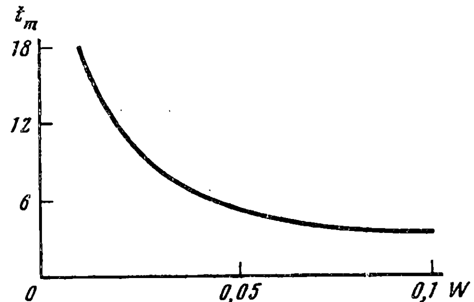
[4] *Балуева А. В., Гольдштейн Р. В., Федоренко Р. П.* Кинетика газонаполненных трещин: постановка задачи, численный метод и основные результаты расчетов. М.: Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша № 39. 1989. 27 с.



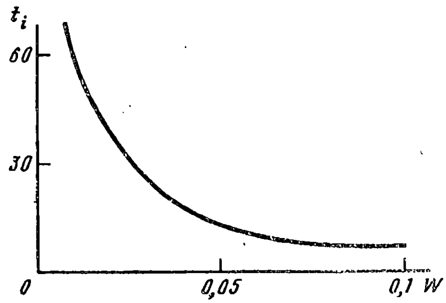
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

несимметрия расположения источника диффузии по отношению к трещине приведет к существенному нарушению симметрии развития трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16481).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лихачев Ю. И., Пупко В. Я., Попов В. В.* Метод расчета на прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1982. 236 с.
2. *Балуева А. В., Гольдштейн Р. В.* Кинетическое распространение трещин при диффузии в них раза в слое//Изв. АН СССР. 1992. № 2. С. 114—124.
3. *Балуева А. В., Зазовский А. Ф.* Упругогидродинамическая задача о притоке жидкости к трещине в пористой среде//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 157—166.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.: Наука, 1963. 367 с.
6. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 223 с.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1096 с.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 79[illegible] с.

Москва

Поступила в редакцию
15.II.1993