

УДК 539.376

© 1995 г. Р. С. ГЕВОРКЯН

**О ДЕЙСТВИИ ДИСКРЕТНОЙ НАГРУЗКИ
 НА ТРЕХСЛОЙНУЮ ПОЛОСУ
 С ВЯЗКОУПРУГИМ СРЕДНИМ СЛОЕМ**

В технике и строительстве часто встречаются конструктивные элементы типа полос, состоящих из упругих и вязкоупругих слоев различных толщин и механических свойств и работающих под действием дискретной нагрузки. Поэтому задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) таких полос представляет теоретический и практический интерес.

Рассмотрена краевая задача трехслойной полосы с упругоползучим средним слоем, когда один продольный край жестко закреплен, а на противоположный край действуют сосредоточенные нормальная и тангенциальная силы. Задача решена путем сопряжения решения задачи Фламана — Буссинеска для упругой полуплоскости с асимптотическим решением смешанной краевой задачи слоистых полос. Выведены рекуррентные, расчетные формулы для определения напряжений и перемещений, с помощью которых вычислены напряжения в слоях, с пригодной для инженерной практики точностью.

1. Рассматривается трехслойная полоса толщиной H , отнесенная к прямоугольной системе координат oxz : $\Omega = \{x, z: -l \leq x \leq l, 0 \leq z \leq H, H = h_1 + h_2 + h_3, H \ll 2l\}$, где упругий слой $h_2 + h_3 \leq z \leq H$ изотропный (в общем случае он может быть ортотропный), средний слой $h_3 \leq z \leq h_2 + h_3$ упругоползучий, а другой упругий слой $0 \leq z \leq h_3$ анизотропный.

Продольный край $z=0$ полосы жестко закреплен, а на противоположный край $z=H$ действуют сосредоточенные нормальная и тангенциальная силы P и Q (фигура):

$$\sigma_{zz}(x, H) = -P\delta(x), \sigma_{zx}(x, H) = Q\delta(x), u_x(x, 0) = u_z(x, 0) = 0 \quad (1.1)$$

Требуется определить НДС полосы, если между слоями выполняются условия полного контакта

$$\sigma_{jz}^{(1)}(x, h_2 + h_3) = \sigma_{jz}^{(2)}(x, h_2 + h_3), \sigma_{jz}^{(2)}(x, h_3) = \sigma_{jz}^{(3)}(x, h_3) \quad (1.2)$$

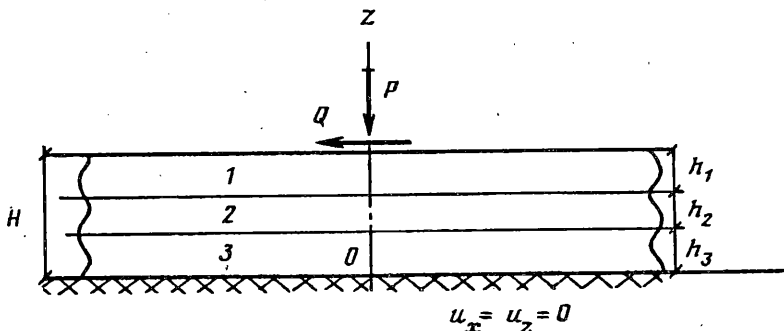
$$u_j^{(1)}(x, h_2 + h_3) = u_j^{(2)}(x, h_2 + h_3), u_j^{(2)}(x, h_3) = u_j^{(3)}(x, h_3) \quad (j = x, z)$$

Задача моделирует, в частности, взаимодействия слоистых оснований-фундаментов под действием дискретной нагрузки [1, 2], клеевое соединение анизотропного тела с упругой накладкой, когда на последнюю действуют сосредоточенные силы [3] и так далее.

Решение краевой задачи ищем в виде

$$A = \begin{cases} A^{(1)} + B, & h_2 + h_3 \leq z \leq H \\ A^{(2)}, & h_3 \leq z \leq h_2 + h_3 \\ A^{(3)}, & 0 \leq z \leq h_3 \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем индексом (1) обозначены величины первого слоя $h_2 + h_3 \leq z \leq H$, (2) — второго слоя $h_3 \leq z \leq h_2 + h_3$, (3) — третьего слоя



$0 \leq z \leq h_3$, $A^{(i)}$ ($i = 1, 3$) — общий интеграл асимптотического решения смешанной краевой задачи упругой, в общем случае, анизотропной полосы, когда на одной ее продольной границе заданы перемещения, а на противоположной — напряжения. Он имеет вид [4, 5]:

$$Q_j^{(0)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{x_j+s} Q_j^{(i,s)}, \quad \kappa_u = 0, \quad \kappa_v = -1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

$$\sigma_{jz}^{(i,s)} = \sigma_{jz0}^{(i,s)}(\xi, t) + \sigma_{jz*}^{(i,s)}(\xi, \zeta, t) \quad (j = x, z; i = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{xx}^{(i,s)} = (a_{12}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)} + a_{16}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)}) / a_{11}^{(i)} + \sigma_{xx*}^{(i,s)}(\xi, \zeta, t) \quad (1.6)$$

$$u^{(i,s)} = \zeta (A_{26}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)} + A_{22}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)}) + u_0^{(i,s)}(\xi, t) + u_*^{(i,s)}(\xi, \zeta, t) \quad (1.6)$$

$$(u, w; A_{26}, A_{66}; A_{22}, A_{26}) \quad (i = 1, 3)$$

$$\sigma_{jz*}^{(i,s)} = - \int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{jz}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + l F_j^{(i,s)} \right) d\zeta \quad (j = x, z; i = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

$$\sigma_{xx*}^{(i,s)} = - \frac{1}{a_{11}^{(i)}} (a_{12}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} + a_{16}^{(i)} \sigma_{xz*}^{(i,s)}) + \frac{1}{a_{11}^{(i)}} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi}$$

$$u_*^{(i,s)} = \int_0^{\zeta} \left(a_{16}^{(i)} \sigma_{xx*}^{(i,s)} + a_{26}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} + a_{66}^{(i)} \sigma_{xz*}^{(i,s)} - \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \quad (1.8)$$

$$w_*^{(i,s)} = \int_0^{\zeta} (a_{12}^{(i)} \sigma_{xx*}^{(i,s)} + a_{22}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} + a_{26}^{(i)} \sigma_{xz*}^{(i,s)}) d\zeta \quad (i = 1, 3)$$

$$\xi = x/l, \quad \zeta = z/h = \varepsilon^{-1} z/l, \quad \varepsilon = h/l, \quad h = \max \{h_1, h_2, h_3\}$$

$$u^{(0)} = u_x^{(0)}/l, \quad w^{(0)} = u_z^{(0)}/l \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$A_{66} = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) / a_{11}, \quad A_{22} = (a_{11} a_{66} - a_{16}^2) / a_{11}$$

$$A_{26} = (a_{11} a_{26} - a_{12} a_{16}) / a_{11}$$

$$F_j^{(0)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{-2+s} F_j^{(i,s)}, \quad F^{(0)} = \{F_x^{(0)}, F_z^{(0)}\}$$

Для изотропного материала $a_{11} = a_{22} = 1/E$, $a_{66} = 2(1 + \nu)/E$, $a_{12} = -\nu/E$, $a_{16} = a_{26} = 0$; $F_j^{(0)}$, $F^{(0)}$ — векторы объемных сил, $A^{(2)}$ — общий интервал аналогичной

задачи упругоползучей полосы [6] со свойствами наследственной теории ползучести модели [7]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{(2,s)}(t) &= \vartheta_2(t) \sigma_{zz0}^{(2,s)}(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz0}^{(2,s)}(\tau) R^*(t, \tau) d\tau + \sigma_{xx*}^{(2,s)}(t) \\
 u^{(2,s)}(t) &= 2\zeta \frac{1 + \vartheta_2(t)}{E_2(t)} \sigma_{zz0}^{(2,s)}(t) + u_0^{(2,s)}(t) + u_*^{(2,s)}(t) - \\
 &- 2\zeta \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz0}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)) d\tau \\
 w^{(2,s)}(t) &= \zeta \frac{1 - \vartheta_2^2(t)}{E_2(t)} \sigma_{zz0}^{(2,s)}(t) + w_0^{(2,s)}(t) + w_*^{(2,s)}(t) + \zeta \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz0}^{(2,s)}(\tau) R_1(t, \tau) d\tau \\
 \sigma_{xx*}^{(2,s)}(t) &= E_2(t) \frac{\partial u^{(2,s-1)}(t)}{\partial \xi} + \int_{\tau_1}^t E_2(\tau) \frac{\partial u^{(2,s-1)}(\tau)}{\partial \xi} R(t, \tau) d\tau + \\
 &+ \vartheta_2(t) \sigma_{zz*}^{(2,s)}(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz*}^{(2,s)}(\tau) R^*(t, \tau) d\tau \\
 u_*^{(2,s)}(t) &= \int_0^\zeta \left\{ 2 \frac{1 + \vartheta_2(t)}{E_2(t)} \sigma_{xx*}^{(2,s)}(t) - \frac{\partial w^{(2,s-1)}(t)}{\partial \xi} - \right. \\
 &- \left. 2 \int_{\tau_1}^t \sigma_{xx*}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)) d\tau \right\} d\zeta \\
 w_*^{(2,s)}(t) &= \int_0^\zeta \left\{ \frac{\sigma_{zz*}^{(2,s)}(t)}{E_2(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz*}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau - \right. \\
 &- \left. \frac{\vartheta_2(t)}{E_2(t)} \sigma_{xx*}^{(2,s)}(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma_{xx*}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1(t, \tau) d\tau \right\} d\zeta \\
 R_1(t, \tau) &= \vartheta_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1(t, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) - \\
 &- \frac{\vartheta_2(t)}{E_2(t)} R^*(t, \tau) + \int_{\tau}^t R^*(\alpha, \tau) \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta(t, \alpha) d\alpha \\
 R^*(t, \tau) &= \vartheta_2(\tau) R(t, \tau) - E_2(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1(t, \tau) - \int_{\tau}^t E_2(\alpha) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1(\alpha, \tau) R(t, \alpha) d\alpha \\
 \delta(t, \tau) &= 1/E_2(\tau) \cdot C(t, \tau), \quad \delta_1(t, \tau) = \vartheta_2(\tau)/E_2(\tau) + \vartheta(t, \tau) C(t, \tau)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau) = E_2(t) \partial \delta(t, \tau) / \partial \tau$; $E_2(t)$ — модуль упругомгновенной деформации; $\vartheta_2(t)$ — коэффициент поперечной упругой части деформации; $\delta(t, \tau)$ — полная относительная деформация при сжатии или растяжении; $\delta_1(t, \tau)$ — полная относительная поперечная деформация; $\vartheta(t, \tau)$ — коэффициент поперечного сжатия при деформации ползучести; $C(t, \tau)$ — мера ползучести при сжатии или растяжении; τ_1 — время (момент времени) приложения нагрузки.

Общий интеграл B — решение задачи Фламана — Буссинеска для упругой полуплоскости, которое для изотропной полуплоскости имеет вид [8]:

$$\sigma_{xx}^F = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{r^4} (P(z-H) + Qx), \quad \sigma_{zz}^F = \frac{2}{\pi} \frac{(z-H)^2}{r^4} (P(z-H) + Qx)$$

$$\sigma_{xz}^F = \frac{2}{\pi} \frac{x(z-H)}{r^4} (P(z-H) + Qx), \quad r = \sqrt{x^2 + (z-H)^2} \quad (1.10)$$

$$u_x^F = \frac{1 - \vartheta_1}{\pi E_1} P \operatorname{arctg} \frac{x}{z-H} - \frac{1 + \vartheta_1}{\pi E_1} P \frac{x(z-H)}{r^2} +$$

$$+ \frac{2}{\pi E_1} Q \ln r + \frac{1 + \vartheta_1}{\pi E_1} Q \frac{(z-H)^2}{r^2}$$

$$u_z^F = \frac{2}{\pi E_1} P \ln r + \frac{1 + \vartheta_1}{\pi E_1} P \frac{x^2}{r^2} + \frac{1 - \vartheta_1}{\pi E_1} Q \operatorname{arctg} \frac{z-H}{x} - \frac{1 + \vartheta_1}{\pi E_1} Q \frac{x(z-H)}{r^2}$$

Если первый слой $h_2 + h_3 \leq z \leq H$ ортотропный, то решение задачи Фламана — Буссинеска имеет вид [9].

Общие интегралы (1.3) — (1.9) содержат произвольные функции интегрирования $\sigma_{jz_0}^{(i,s)}$, $u_0^{(i,s)}$, $w_0^{(i,s)}$ ($i=1, 2, 3$), которые однозначно определяются из граничных условий (1.1):

$$\sigma_{jz_0}^{(1,s)} = -\sigma_{jz_*}^{(1,s)} (\zeta = \zeta_0), \quad \zeta_0 = H/h \quad (j = x, z) \quad (1.11)$$

$$u_0^{(3,s)} = w_0^{(3,s)} = 0$$

и из условий контакта слоев (1.2):

$$\sigma_{jz_0}^{(2,s)} = \bar{\sigma}_{jz}^{(s)} + \sigma_{jz_*}^{(1,s)} (\zeta = \zeta_1) - \sigma_{jz_*}^{(1,s)} (\zeta = \zeta_0) - \sigma_{jz_*}^{(2,s)} (\zeta = \zeta_1) \quad (1.12)$$

$$\sigma_{jz_0}^{(3,s)} = \sigma_{jz_0}^{(2,s)} + \sigma_{jz_*}^{(2,s)} (\zeta = \zeta_3) - \sigma_{jz_*}^{(3,s)} (\zeta = \zeta_3), \quad (j = x, z)$$

$$u_0^{(2,s)} = u_*^{(3,s)} (\zeta = \zeta_3) - u_*^{(2,s)} (\zeta = \zeta_3) + \zeta_3 (A_{26}^{(3)} \sigma_{zz_0}^{(3,s)} + A_{22}^{(3)} \sigma_{xz_0}^{(3,s)}) - \quad (1.13)$$

$$- 2\zeta_3 \frac{1 + \vartheta_2(t)}{E_2(t)} \sigma_{xz_0}^{(2,s)} + 2\zeta_3 \int_{\zeta_1}^t \sigma_{zz_0}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)) d\tau$$

$$w_0^{(2,s)} = w_*^{(3,s)} (\zeta = \zeta_3) - w_*^{(2,s)} (\zeta = \zeta_3) + \zeta_3 (A_{66}^{(3)} \sigma_{zz_0}^{(3,s)} + A_{26}^{(3)} \sigma_{xz_0}^{(3,s)}) -$$

$$- \zeta_3 \frac{1 - \vartheta_2^2(t)}{E_2(t)} \sigma_{xz_0}^{(2,s)} - \zeta_3 \int_{\zeta_1}^t \sigma_{zz_0}^{(2,s)}(\tau) R_1(t, \tau) d\tau$$

$$u_0^{(1,s)} = u_0^{(2,s)} + u_*^{(2,s)} (\zeta = \zeta_1) - u_*^{(1,s)} (\zeta = \zeta_1) - \bar{u}_x^{(s)} +$$

$$+ 2\zeta_1 \frac{1 + \vartheta_2(t)}{E_2(t)} \sigma_{xz_0}^{(2,s)} - \zeta_1 (A_{26}^{(1)} \sigma_{zz_0}^{(1,s)} + A_{22}^{(1)} \sigma_{xz_0}^{(1,s)}) -$$

$$- 2\zeta_1 \int_{\zeta_1}^t \sigma_{zz_0}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)) d\tau$$

$$w_0^{(1,s)} = w_0^{(2,s)} + w_*^{(2,s)} (\zeta = \zeta_1) - w_*^{(1,s)} (\zeta = \zeta_1) - \bar{u}_z^{(s)} +$$

$$+ \zeta_1 \frac{1 - \vartheta_2^2(t)}{E_2(t)} \sigma_{zz_0}^{(2,s)} - \zeta_1 (A_{66}^{(1)} \sigma_{zz_0}^{(1,s)} + A_{26}^{(1)} \sigma_{xz_0}^{(1,s)}) + \zeta_1 \int_{\zeta_1}^t \sigma_{zz_0}^{(2,s)}(\tau) R_1(t, \tau) d\tau$$

$$\zeta_1 = (h_2 + h_3)/h, \quad \zeta_3 = h_3/h$$

$$\bar{\sigma}_{jz}^{(0)} = \bar{\sigma}_{jz}, \quad \bar{u}_j^{(0)} = \bar{u}_j, \quad \bar{\sigma}_{jz}^{(s)} = \bar{u}_j^{(s)} = 0 \quad (s \neq 0)$$

$$\bar{\sigma}_{jz} = \sigma_{jz}^F(x, h_2 + h_3), \quad \bar{u}_j = u_j^F(x, h_2 + h_3) \quad (j = x, z)$$

Рекуррентные расчетные формулы (1.3)—(1.13) позволяют вычислить НДС в каждом слое полосы с любой заранее заданной асимптотической точностью $o(\varepsilon^N)$, за исключением небольшой зоны вблизи краев $x = \pm l$. Ширина этой зоны равна области распространения решения типа пограничного слоя [10, 11]. Для того, чтобы приведенное решение было пригодно и в этой зоне, необходимо к нему прибавить согласованное с ним решение задачи пограничного слоя [10, 11].

Решение (1.3)—(1.13) в точке приложения сил P, Q обладает особенностью характера задачи Фламана — Буссинеска. Но на линии $z = h_2 + h_3$ выражения (1.10) ограничены при $-l \leq x \leq l$ и имеют ограниченные производные любого порядка, поэтому оценка остаточного члена асимптотического разложения (1.4) не представляет особой трудности в каждом конкретном случае [12].

Укажем, что если на полосу действуют несколько сосредоточенных сил, то решение задачи складывается из соответствующих решений вида (1.3)—(1.13) путем из наложения. В случае, когда на полосу действует кусочно-непрерывная на $[a, b]$ нагрузка $p(x)$, то решение B получается из (1.10) известным способом

$$B = \int_a^b p(\xi) B^F(x - \xi, z) d\xi \quad (1.14)$$

Заметим, что рекуррентные формулы (1.3)—(1.13) позволяют учитывать также действия объемных сил слоев полосы. Таковыми, в частности, будут приведенные сейсмические силы [13].

Укажем, что алгоритм решения и вывод формул (1.3)—(1.13) не обусловлен выбором конкретной линейной модели ползучести [7]. Для других линейных моделей вязкоупругости [14], согласно выбранной модели, в (1.9) изменяется ядро интегрального уравнения и соответствующая резольвента.

2. Пусть полные относительные продольная и поперечная деформации на-следственно материала во времени меняются по законам [7]:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E_2(\tau)} + \varphi(\tau) (1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]) \quad (2.1)$$

$$\delta_1(t, \tau) = \vartheta_2 \delta(t, \tau), \quad \vartheta_2 = \text{const}$$

Итерационные формулы (1.9), (1.13) упрощаясь принимают вид [6]:

$$\sigma_{xx}^{(2,s)} = \vartheta_2 \sigma_{zz0}^{(2,s)}(t) + \sigma_{xx*}^{(2,s)}(t)$$

$$u^{(2,s)}(t) = 2\zeta \frac{1 + \vartheta_2}{E_2(t)} \sigma_{zz0}^{(2,s)}(t) + u_0^{(2,s)}(t) + u_*^{(2,s)}(t) -$$

$$- 2\zeta (1 + \vartheta_2) \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz0}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau$$

$$w^{(2,s)}(t) = \zeta \frac{1 - \vartheta_2^2}{E_2(t)} \sigma_{zz0}^{(2,s)}(t) + w_0^{(2,s)}(t) + w_*^{(2,s)}(t) -$$

$$- \zeta (1 - \vartheta_2^2) \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz0}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau$$

$$\sigma_{xx*}^{(2,s)} = \vartheta_2 \sigma_{zz*}^{(2,s)}(t) + E_2(\tau_1) \frac{\partial u^{(2,s-1)}(\tau_1)}{\partial \xi} +$$

$$+ E_2(\tau_1) \left(\frac{\partial \dot{u}^{(2,s-1)}(\tau_1)}{\partial \xi} - \gamma E_2(\tau_1) \varphi(\tau_1) \frac{\partial u^{(2,s-1)}(\tau_1)}{\partial \xi} \right) J(t, \tau_1) +$$

$$+ \int_{\tau_1}^t \left[\int_{\tau_1}^{\tau} E_2(\alpha) \left(\frac{\partial \ddot{u}^{(2,s-1)}(\alpha)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \dot{u}^{(2,s-1)}(\alpha)}{\partial \xi} \right) \exp(\Phi(\alpha, \tau)) d\alpha \right] d\tau$$

$$\begin{aligned}
u_*^{(2,s)} &= 2(1 + \vartheta_2) \int_0^{\zeta} \left[\frac{\sigma_{xz}^{(2,s)}(t)}{E_2(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_{xz}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] d\zeta - \int_0^{\zeta} \frac{\partial w^{(2,s-1)}(t)}{\partial \xi} d\zeta \\
w_*^{(2,s)} &= \int_0^{\zeta} \left[\frac{\sigma_{xz}^{(2,s)}(t) - \vartheta_2 \sigma_{xz}^{(2,s)}(t)}{E_2(t)} - \int_{\tau_1}^t (\sigma_{xz}^{(2,s)}(\tau) - \vartheta_2 \sigma_{xz}^{(2,s)}(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] d\zeta \\
u_0^{(2,s)} &= u_*^{(2,s)}(\zeta = \zeta_3) - u_*^{(2,s)}(\zeta = \zeta_3) + \zeta_3 (A_{26}^{(3)} \sigma_{zz}^{(3,s)} + A_{22}^{(3)} \sigma_{zz}^{(3,s)}) - \\
&- 2\zeta_3 \frac{1 + \vartheta_2}{E_2(t)} \sigma_{xz}^{(2,s)} + 2\zeta_3 (1 + \vartheta_2) \int_{\tau_1}^t \sigma_{xz}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \quad (2.2) \\
w_0^{(2,s)} &= w_*^{(2,s)}(\zeta = \zeta_3) - w_*^{(2,s)}(\zeta = \zeta_3) + \zeta_3 (A_{66}^{(3)} \sigma_{zz}^{(3,s)} + A_{26}^{(3)} \sigma_{zz}^{(3,s)}) - \\
&- \zeta_3 \frac{1 - \vartheta_2^2}{E_2(t)} \sigma_{zz}^{(2,s)}(t) + \zeta_3 (1 - \vartheta_2^2) \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \\
u_0^{(1,s)} &= u_0^{(2,s)} + u_*^{(2,s)}(\zeta = \zeta_1) - u_*^{(1,s)}(\zeta = \zeta_1) - \bar{u}_x^{(s)} + 2\zeta_1 \frac{1 + \vartheta_2}{E_2(t)} \sigma_{xz}^{(2,s)}(t) - \\
&- \zeta_1 (A_{26}^{(1)} \sigma_{zz}^{(1,s)} + A_{22}^{(1)} \sigma_{zz}^{(1,s)}) - 2\zeta_1 (1 + \vartheta_2) \int_{\tau_1}^t \sigma_{xz}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \\
w_0^{(1,s)} &= w_0^{(2,s)} + w_*^{(2,s)}(\zeta = \zeta_1) - w_*^{(1,s)}(\zeta = \zeta_1) - \bar{u}_z^{(s)} - \zeta_1 (A_{66}^{(1)} \sigma_{zz}^{(1,s)} + A_{26}^{(1)} \sigma_{zz}^{(1,s)}) + \\
&+ \zeta_1 \frac{1 - \vartheta_2^2}{E_2(t)} \sigma_{zz}^{(2,s)}(t) - \zeta_1 (1 - \vartheta_2^2) \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz}^{(2,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \\
\Phi(t, \tau_1) &= \int_{\tau_1}^t (\gamma E_2(\tau) \varphi(\tau) + \gamma - \frac{\partial}{\partial \tau} \ln E_2(\tau)) d\tau, \quad J(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t \exp(-\Phi(\tau, \tau_1)) d\tau
\end{aligned}$$

где точки над буквами означают производные соответствующих порядков по времени.

Вычислим напряжения и перемещения по рекуррентным расчетным формулам (1.3)—(1.8), (1.10)—(1.12), (2.1), (2.2), когда все слои изотропные.

После первого шага итерации, с точностью $O(\varepsilon)$, получим:

для первого слоя $h_2 + h_3 \leq z \leq h_1 + h_2 + h_3$:

$$\sigma_{xz}^{(1,0)} = \sigma_{xz}^F, \quad \sigma_{xz}^{(1,0)} = \sigma_{xz}^F, \quad \sigma_{xx}^{(1,0)} = \sigma_{xx}^F \quad (2.3)$$

$$u_x^{(1,0)} = u_x^F - \bar{u}_x + 2h_3 \frac{1 + \vartheta_3}{E_3} \bar{\sigma}_{xz} + 2h_2 (1 + \vartheta_2) \delta(t, \tau_1) \bar{\sigma}_{xz}$$

$$u_z^{(1,0)} = u_z^F - \bar{u}_z + h_3 \frac{1 - \vartheta_3^2}{E_3} \bar{\sigma}_{zz} + h_2 (1 - \vartheta_2^2) \delta(t, \tau_1) \bar{\sigma}_{zz}$$

для второго, реономного слоя $h_3 \leq z \leq h_2 + h_3$:

$$\sigma_{xz}^{(2,0)} = \bar{\sigma}_{xz}, \quad \sigma_{xz}^{(2,0)} = \bar{\sigma}_{xz}, \quad \sigma_{xx}^{(2,0)} = \vartheta_2 \bar{\sigma}_{zz} \quad (2.4)$$

$$u_x^{(2,0)} = 2(z - h_3) (1 + \vartheta_2) \delta(t, \tau_1) \bar{\sigma}_{xz} + 2h_3 \frac{1 + \vartheta_3}{E_3} \bar{\sigma}_{xz}$$

$$u_z^{(2,0)} = (z - h_3) (1 - \vartheta_2^2) \delta(t, \tau_1) \bar{\sigma}_{zz} + h_3 \frac{1 - \vartheta_3^2}{E_3} \bar{\sigma}_{zz}$$

для третьего слоя $0 \leq z \leq h_3$:

$$\sigma_{xz}^{(3,0)} = \bar{\sigma}_{xz}, \quad \sigma_{zz}^{(3,0)} = \bar{\sigma}_{zz}, \quad \sigma_{xx}^{(3,0)} = \vartheta_3 \bar{\sigma}_{zz} \quad (2.5)$$

$$u_x^{(3,0)} = 2z \frac{1 + \vartheta_3}{E_3} \bar{\sigma}_{xz}, \quad u_z^{(3,0)} = z \frac{1 - \vartheta_3^2}{E_3} \bar{\sigma}_{zz}$$

После второго шага итерации, с точностью $O(\varepsilon^2)$, получим:
для первого слоя

$$\sigma_{xz}^{(1,1)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1,1)} = 0 \quad (2.6)$$

$$\sigma_{xx}^{(1,1)} = -E_1 \frac{d\bar{u}_x}{dx} + 2h_3 \frac{(1 + \vartheta_3) E_1}{E_3} \frac{d\bar{\sigma}_{xz}}{dx} + 2h_2 E_1 (1 + \vartheta_2) \delta(t, \tau_1) \frac{d\bar{\sigma}_{xz}}{dx}$$

для второго слоя

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2,1)} &= \vartheta_2 (h_2 + h_3 - z) \frac{d\bar{\sigma}_{zz}}{dx}, \quad \sigma_{zz}^{(2,1)} = (h_2 + h_3 - z) \frac{d\bar{\sigma}_{xz}}{dx} \\ \sigma_{xx}^{(2,1)} &= \vartheta_2 (h_2 + h_3 - z) \frac{d\bar{\sigma}_{xz}}{dx} + 2(z - h_3) (1 + \vartheta_2) \frac{d\bar{\sigma}_{xz}}{dx} + \\ &+ 2h_3 \frac{E_2(\tau_1)}{E_3} (1 + \vartheta_3) (1 - \gamma\varphi(\tau_1) E_2(\tau_1) J(t, \tau_1)) \frac{d\bar{\sigma}_{xz}}{dx} \end{aligned} \quad (2.7)$$

для третьего слоя

$$\sigma_{xz}^{(3,1)} = (\vartheta_2 h_2 + \vartheta_3 (h_3 - z)) \frac{d\bar{\sigma}_{zz}}{dx}, \quad \sigma_{zz}^{(3,1)} = (h_2 + h_3 - z) \frac{d\bar{\sigma}_{xz}}{dx} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{xx}^{(3,1)} = (\vartheta_3 (h_2 + h_3) + z (2 + \vartheta_3)) \frac{d\bar{\sigma}_{xz}}{dx}$$

После третьего шага итерации, с точностью $O(\varepsilon^3)$, имеем:
для первого слоя

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1,2)} &= (z - H) E_1 \frac{d^2 \bar{u}_x}{dx^2} + 2E_1 (H - z) \left(h_3 \frac{1 + \vartheta_3}{E_3} + \right. \\ &+ \left. h_2 (1 + \vartheta_2) \delta(t, \tau_1) \right) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{xz}}{dx^2}, \quad \sigma_{zz}^{(1,2)} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

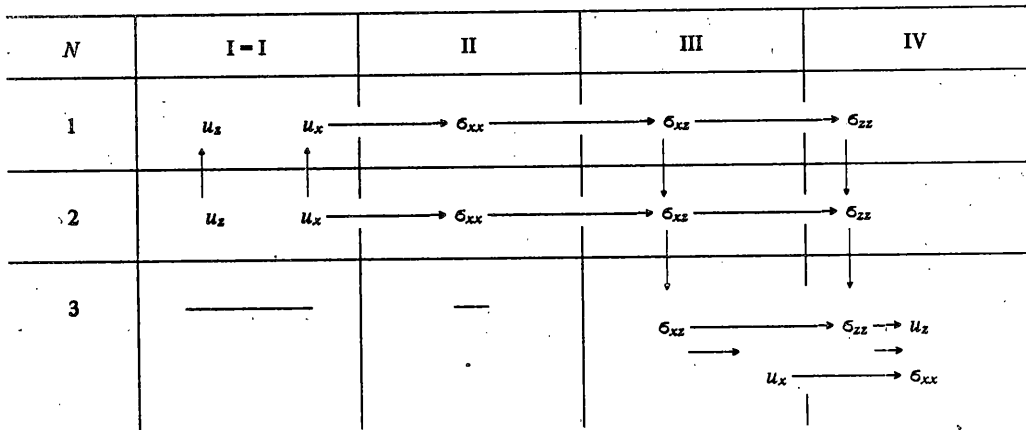
для второго слоя

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2,2)} &= \frac{\vartheta_2}{2} (h_2 + h_3 - z)^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}_{xz}}{dx^2} + (1 + \vartheta_2) (h_2^2 - (z - h_3)^2) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{xz}}{dx^2} + \\ &+ 2h_3 (h_2 + h_3 - z) E_2(\tau_1) \frac{1 + \vartheta_3}{E_3} (1 - \gamma\varphi(\tau_1) E_2(\tau_1) J(t, \tau_1)) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{xz}}{dx^2} - \\ &- h_1 E_1 \frac{d^2 \bar{u}_x}{dx^2} + 2h_1 E_1 \left(h_3 \frac{1 + \vartheta_3}{E_3} + h_2 (1 + \vartheta_2) \delta(t, \tau_1) \right) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{xz}}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\sigma_{zz}^{(2,2)} = \frac{\vartheta_2}{2} (h_2 + h_3 - z) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dx^2}$$

для третьего слоя

$$\sigma_{xz}^{(3,2)} = \vartheta_3 (h_2 + h_3) (h_3 - z) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{xz}}{dx^2} + \frac{2 + \vartheta_3}{2} (h_3^2 - z^2) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{xz}}{dx^2} - \quad (2.11)$$



$$\begin{aligned}
 & - h_1 E_1 \frac{d^2 \bar{u}_x}{dx^2} + 2 h_1 E_1 \left(h_3 \frac{1 + \vartheta_3}{E_3} + h_2 (1 + \vartheta_2) \delta(t, \tau_1) \right) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dx^2} + \\
 & + \frac{1}{2} h_2^2 (2 + 3\vartheta_2) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dx^2} + 2 h_2 h_3 (1 - \gamma \varphi(\tau_1) E_2(\tau_1) J(t, \tau_1)) \times \\
 & \times \frac{E_2(\tau_1) (1 + \vartheta_3)}{E_3} \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dx^2} \sigma_{zz}^{(3,2)} = \left(\frac{\vartheta_2}{2} h_2^2 + \vartheta_2 h_2 (h_3 - z) + \frac{\vartheta_3 (h_3 - z)^2}{2} \right) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dx^2}
 \end{aligned}$$

В (2.3)—(2.11) не приведены объемные компоненты НДС.

После трех шагов итерации напряженное состояние полосы, с точностью $O(\varepsilon)$ определится суммой соответствующих компонентов (2.3)—(2.11).

Из (2.3)—(2.11) следует, что с точностью $O(\varepsilon)$ напряжения в слоях не меняются во времени. В первом слое перераспределение касательного напряжения σ_{xz} начинается с третьего шага итерации и имеет порядок ε^2 . А нормальное напряжение σ_{zz} во всех слоях полосы изменяется во времени начиная с четвертого шага итерации, что имеет порядок ε^3 .

Интерес представляет приведенная ниже таблица, по которой от перемещений $u_x^{(2,0)}$, $u_z^{(2,0)}$ упругоползучего слоя изменение во времени передается компонентам напряженно-деформированного состояния слоев полосы после каждого шага итерации I. При этом вертикальные стрелки схемы показывают, что изменения передаются через условия контактов слоев (1.12)—(1.13).

Эти выводы можно применить при расчетах фундаментов-оснований [1, 2], клеевых соединений [3] и в других областях, не применяя гипотез и предположений.

Приведем один оптимизационный пример: пусть через упругую накладку толщины h_1 нормальная сосредоточенная сила действует на бетонный фундамент, лежащий на сжимаемом основании толщины h_3 . Требуется определить толщину h_2 бетонного фундамента так, чтобы он ослабил действие нормальной нагрузки на основание в k раза.

Из (2.4), (2.10) следует

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \bar{\sigma}_{zz} + 1/2 \vartheta_2 (h_2 + h_3 - z)^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dx^2} \quad (2.12)$$

Непосредственно под накладкой имеем

$$\sigma_{zz}^{(2)} (z = h_2 + h_3) = \bar{\sigma}_{zz} \quad (2.13)$$

под фундаментом найдем

$$\sigma_{zz}^{(2)} (z = h_3) = \bar{\sigma}_{zz} + 1/2 \vartheta_2 h_2^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dx^2} \quad (2.14)$$

Из условия

$$\frac{\sigma_{zz}^{(2)}(z = h_2 + h_3)}{\sigma_{zz}^{(2)}(z = h_3)} = k \quad (k > 1)$$

получаем толщину фундамента

$$h_2 = h_1 [(k - 1)/(2\sigma_2 k)]^{1/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
2. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
3. Хрулев В. М. Прочность клеевых соединений. М.: Стройиздат, 1973. 81 с.
4. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок//ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271—278.
5. Агаловян Л. А., Асратян М. Г., Геворкян Р. С. К асимптотическому решению задач о действии сосредоточенной силы и кусочнонепрерывной нагрузки на двухслойную полосу//ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 831—836.
6. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойной полосы, состоящей из упругого и реологического слоев//МТТ. 1992. С. 120—128.
7. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: ГИТТЛ, 1952. 323 с.
8. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 464 с.
9. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.
10. Агаловян Л. А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач//Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1984. Вып. 3. С. 51—58.
11. Геворкян Р. С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин//Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 6. С. 3—15.
12. Агаловян Л. А., Хачатрян А. М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки//Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. № 2. С. 3—14.
13. Корчинский И. Л., Поляков С. В., Быховский В. А., Дузинкович С. Ю. Основы проектирования зданий в сейсмических районах. М.: Госстройиздат, 1961. 488 с.
14. Малинин М. М. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 387 с.

Ереван

Поступила в редакцию
15.VI.1993