МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1995

УДК 539.214; 539.374

© 1995 г. Е. И. РЫЖАК

ОБ УСТОЙЧИВОМ ЗАКРИТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ, СТЕСНЕННЫХ ОБОЙМОЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Изучается вопрос о принципиальной осуществимости однородного закритического деформирования упругопластических образцов в условиях некоторых идеализированных испытаний. Осуществимость отождествляется с устойчивостью процесса деформирования.

В принимаемой схеме испытаний цилиндрический трансверсально изотропный образец, охваченный цилиндрической обоймой из более жесткого материала, сжимается между гладкими плитами идеальной жесткой испытательной машины; при этом внешняя боковая поверхность обоймы является свободной.

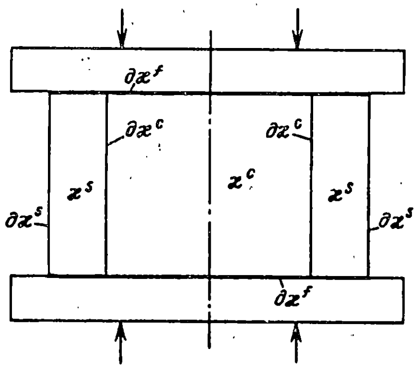
Установлены ограничения на жесткостные и геометрические параметры обоймы, соблюдение которых заведомо обеспечивает устойчивость однородного закритического деформирования образца вплоть до нарушения для него условия Адамара (т. е. вплоть до абсолютного предела теоретически допустимых состояний материала).

Сделан вывод о принципиальной достоверности характеристик разупрочнения материала, если они получены в ходе соответствующих испытаний.

Публикуемая работа продолжает цикл исследований [1—5] по остающемуся дискуссионным вопросу об осуществимости закритического деформирования при испытаниях и о возможности интерпретации экспериментальных данных по закритическому деформированию в терминах свойств материала (см. напр. обзор [6]).

Для того, чтобы результаты испытаний, относящиеся всегда к образцам конечных размеров, могли быть интерпретированы в терминах свойств материала, из которого они состоят, нужно, чтобы было обеспечено однородное квазистатическое деформирование образца [6]. Основным аргументом, традиционно выдвигаемым против возможности такой интерпретации в случае закритического деформирования, является следующий: закритическое деформирование заведомо неустойчиво, и поэтому его однородность принципиально не может быть обеспечена. Контраргументом, обоснованию которого посвящена настоящая работа (так же, как и работы [2—5]), является утверждение об устойчивости однородного закритического деформирования при определенных условиях и в определенных пределах.

При исследовании устойчивости закритического деформирования (т. е. деформирования в условиях разупрочнения) фундаментальную роль играют две математические теоремы — теорема Адамара [7] и теорема Ван Хофа [8] (последняя чуть позже установлена также Вишиком [9]). Из этих теорем следуют, соответственно, необходимость и, при определенных условиях, достаточность условия Адамара (условия сильной эллиптичности) для устойчивости упругих тел; такая трактовка этих теорем (вне связи с проблемой разупрочнения) дана в [7, 10—13]. Таким образом, условие Адамара устанавливает некий абсолютный предел, за которым упругая среда существовать как сплошная уже не может (заведомо неустойчива), а теорема Ван Хофа утверждает, что к этому пределу в определенных условиях можно приблизиться вплотную; применительно к изотропным линейно-упругим (гуковым) телам этот результат был получен Кельвином еще в конце прошлого века. Все вышеперечисленное уже доказывает принципиальную допустимость состояний упругих тел с отрицательными значениями упругих модулей (состояний разупрочнения) в тех пределах, в каких это совместимо с условием сильной эллиптичности; для гукова материала, например, это условие сводится к неравенствам $G > 0$, $K > -\frac{4}{3}G$, где G — модуль сдвига, K — модуль объемного сжатия.



Фиг. 1

В [1, 2, 14] упомянутые теоремы были распространены на случаи состояний и процессов в упругопластических телах, причем в [1] проанализирована (с учетом геометрической нелинейности) связь между условиями разупрочнения и сильной эллиптичности. Однако [1] в совокупности с упомянутыми выше более ранними работами [7, 10—13] не дает ответа на вопрос об осуществимости закритического деформирования при испытаниях, поскольку использование теоремы Ван Хофа и вытекающих из нее следствий [1] предполагает, что в гипотетической испытательной машине полностью предписано движение точек поверхности образца (или внешней поверхности обоймы, охватывающей образец и скрепленной с ним). В существующих же или принципиально осуществимых машинах всегда есть плоскости скольжения и/или поверхности, на которых заданы усилия (в частности, нулевые). В [2, 3, 5] доказаны модификации теоремы Ван Хофа, и на основе одной из них удалось установить устойчивость однородного закритического деформирования (вплоть до нарушения условия Адамара) в идеальной трехосной машине [2, 3, 4], в которой вся поверхность образца находится в условиях проскальзывания вдоль плит машины (такой тип машин реально существует). Та же самая модификация теоремы Ван Хофа является основой анализа и в данной работе (в силу наличия плоскостей скольжения в принимаемой схеме деформирования, фиг. 1). Конкретно, считается, что цилиндрический образец кругового сечения, выполненный из упругопластического трансверсально изотропного материала, скрепленный с охватывающей его цилиндрической обоймой из более жесткого также трансверсально изотропного упругого материала, сжимается между гладкими плитами жесткой машины (это значит, что медленное взаимное сближение плит машины задано во времени и что торцы образца и обоймы скользят без трения по поверхности плит). Такая схема деформирования образца вполне реализуема, и целью ее изучения на предмет устойчивости является, как и в [2—4], обоснование принципиальной достоверности характеристик разупрочнения материала, если таковые были бы получены в результате обработки экспериментальных данных по испытаниям, проведенным по указанной схеме при соблюдении условий, установленных в работе.

Эти условия касаются жесткостных и геометрических параметров обоймы. Для них получены строгие ограничения, при выполнении которых обеспечивается устойчивость однородного закритического деформирования образца вплоть до нарушения для него условия Адамара (т. е. вплоть до абсолютного предела теоретически допустимых состояний материала). Достижимая степень закритичности проиллюстрирована на двух примерах.

1. Определяющие соотношения. Состояния разупрочнения. В работе рассматриваются упругопластические (в частности, упругие) материалы. Для дальнейшего анализа понадобится только инкрементальная форма записи определяющего упругопластического закона в конфигурации $\varkappa$ с уже имеющимися ненулевыми напряжениями $\mathbf{T}$.

В данном разделе не будем подробно останавливаться на вопросах, связанных со строгим описанием конфигураций, движений и деформаций,— это будет сделано в следующем разделе. Ограничимся лишь очерком необходимых понятий малых дисторсий, деформаций и поворотов.

Пусть материальные точки тела идентифицируются их радиус-векторами x в конфигурации $\varkappa$, а в некоторой близкой к $\varkappa$ конфигурации X радиус-векторы точек задаются равенством

$$r(x) = x + \delta u(x) \tag{1.1}$$

Тогда поле $\delta u(x)$ называется полем малых смещений, и ему соответствуют поля малых дисторсий, малых деформаций и малых поворотов (все — тензоры второго ранга)

$$\delta H \equiv \nabla \otimes \delta u(x) \tag{1.2}$$

$$\delta\varepsilon \equiv \tfrac{1}{2}(\delta H + \delta H^T) \tag{1.3}$$

$$\delta\omega \equiv \tfrac{1}{2}(\delta H - \delta H^T) \tag{1.4}$$

Будем считать, что инкрементальная форма упругопластического определяющего закона с гладкой поверхностью текучести для малых деформаций относительно конфигурации $\varkappa$ сводится к кусочно-линейному соотношению между малым приращением тензора напряжений (либо Коши, либо Пиолы, они различны из-за наличия начальных напряжений) и малой дисторсией в данной материальной точке. Одно из этих линейных соотношений — линеаризованный закон активного пластического нагружения, другое — линеаризованный закон упругой разгрузки. На гиперплоскости (в пространстве малых дисторсий), касательной к поверхности текучести, оба линейных соотношения совпадают.

Рассмотрим сначала инкрементальное соотношение для тензора напряжений Коши:

$$\delta T = C : \delta H, \quad C = \begin{cases} C^p, & \delta H : S \geq 0 \\ C^e, & \delta H : S < 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

где C^e и C^p — тензоры (четвертого ранга) жесткостей упругого и пластического откликов, S — тензор, задающий нормаль к поверхности текучести в пространстве дисторсий, двоеточие соответствует свертке по двум индексам.

Для того, чтобы соотношение (1.5) являлось материально объективным [7], необходимо и достаточно, чтобы

$$C : \delta H = T \cdot \delta\omega - \delta\omega \cdot T + L : \delta\varepsilon \tag{1.6}$$

Введем для изомеров тензоров четвертого ранга следующее обозначение: справа вверху указывается та перестановка векторов, которую нужно произвести в каждой тетраде, например

$$a \otimes b \otimes c \otimes d^{(1342)} \equiv a \otimes c \otimes d \otimes b \tag{1.7}$$

Заметим, что $L^{(2134)} = L$ (в силу симметрии тензоров Коши); без ограничения общности примем, что $L^{(1243)} = L$ (так как $\delta\varepsilon^T = \delta\varepsilon$). Тогда имеем $C^e - C^p = L^e - L^p = \theta^e \sigma \otimes S$. Последнее равенство является необходимым и достаточным условием того, что два линейных отображения совпадают на гиперплоскости $\delta H : S = 0$. В силу симметрий тензоров L^p и L^e относительно перестановок тензоры S и σ симметричны.

Для тензора напряжений Пиолы имеем

$$\delta T_\varkappa = A : \delta H \tag{1.8}$$

$$A = L + T \otimes I + \tfrac{1}{2}(T \otimes I - I \otimes T)^{(1423)} - \tfrac{1}{2}(T \otimes I + I \otimes T)^{(1432)} \tag{1.9}$$

$$A^e - A^p = L^e - L^p = \theta^e \sigma \otimes S \tag{1.10}$$

где I — единичный тензор второго ранга.

Тензор A^e — симметричный тензор четвертого ранга ($A^{e(3412)} = A^e$, это соответствует перестановке первой пары индексов со второй), поскольку он является второй производной плотности упругой энергии по дисторсии; из (1.9) следует, что тензор L^e — несимметричный, а симметричным является тензор $L^{se} \equiv L^e + \frac{1}{2}(\mathrm{T} \otimes \mathrm{I} - \mathrm{I} \otimes \mathrm{T})$. В публикуемой работе будем рассматривать такие законы пластичности, для которых A^p — также симметричный тензор (а вместе с ним и $\mathrm{L}^{sp} \equiv \mathrm{L}^p + \frac{1}{2}(\mathrm{T} \otimes \mathrm{I} - \mathrm{I} \otimes \mathrm{T})$). Тогда тензор $\mathrm{A}^e - \mathrm{A}^p$ — симметричный, и поэтому тензор σ коллинеарен тензору S; без ограничения общности можно положить $\sigma = \mathrm{S}$. Тогда имеем

$$\mathrm{A}^e = \mathrm{A}^p + \theta^e \mathrm{S} \otimes \mathrm{S}, \quad \mathrm{L}^e = \mathrm{L}^p + \theta^e \mathrm{S} \otimes \mathrm{S}, \quad \mathrm{L}^{se} = \mathrm{L}^{sp} + \theta^e \mathrm{S} \otimes \mathrm{S} \tag{1.11}$$

Будем считать (это принимается почти всегда), что тело при пластическом нагружении не может быть жестче, чем при разгрузке, так что $\theta^e \geq 0$.

Для тензора жесткостей A можно записать

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}^p + \theta \mathrm{S} \otimes \mathrm{S}, \quad \theta = \begin{cases} 0, & \delta\mathrm{H} : \mathrm{S} \geq 0 \\ \theta^e, & \delta\mathrm{H} : \mathrm{S} < 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Если ввести тензор

$$\Omega \equiv (\mathrm{L}^{se})^{-1} : \mathrm{S} \tag{1.13}$$

и нормировать S таким образом, чтобы $\Omega : \Omega = 1$, то

$$\theta^e = \frac{1}{h + \Omega : \mathrm{S}} = \frac{1}{h + \Omega : \mathrm{L}^e : \Omega} \tag{1.14}$$

где h — пластический модуль материала [1, 15].

Определим теперь, что понимается в данной работе под закритическим состоянием материала (называемым также состоянием разупрочнения).

Определение. Закритическим будем называть состояние материала, для которого нарушается постулат Друккера [16], т. е. существуют такие малые деформации $\delta\varepsilon$ относительно этого состояния, что

$$\delta\varepsilon : \mathrm{L} : \delta\varepsilon < 0 \tag{1.15}$$

Конечно, это только одно из возможных обобщений постулата Друккера на случай конечных деформаций (начальных напряжений).

Заметим, что тензором L определяется приращение (коротационное) напряжений Коши, рассчитываемых на единичную площадку в текущей конфигурации тела («истинных» напряжений), поэтому выполнение (1.15) не может трактоваться как уменьшение «номинальных» напряжений в результате уменьшения площади какого-либо сечения тела, в то время как истинные напряжения возрастают (это одно из распространенных «толкований» разупрочнения, отрицающих его реальность). Таким образом, изучаемая в работе закритичность не может быть истолкована как «кажущаяся» — это как раз истинная закритичность (в терминах истинных напряжений).

Введем приведенный безразмерный пластический модуль

$$h' \equiv \frac{h}{h + \Omega : \mathrm{L}^e : \Omega} = \frac{h}{h + \Omega : \mathrm{S}} \tag{1.16}$$

Если разбить произвольный тензор малых деформаций $\delta\varepsilon$, отвечающий активному нагружению, на два слагаемых $\delta\varepsilon_1 \perp \mathrm{S}$ и $\delta\varepsilon_2 \parallel \Omega$: $\delta\varepsilon_1 \equiv (1^{def} - (\Omega : \mathrm{S})^{-1}\, \Omega \otimes \mathrm{S}) : \delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon_2 \equiv (\Omega : \mathrm{S})^{-1}\, \Omega \otimes \mathrm{S} : \delta\varepsilon$, где 1^{def} — ортогональный проектор на подпространство симметричных тензоров второго ранга

$$1^{def} : \delta\mathrm{H} = \delta\varepsilon, \quad 1^{def} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{I} \otimes \mathrm{I}^{(1342)} + \mathrm{I} \otimes \mathrm{I}^{(1324)}) \tag{1.17}$$

то квадратичную форму в (1.15) можно представить в виде

$$\delta\varepsilon : \mathrm{L}^p : \delta\varepsilon = \delta\varepsilon_1 : \mathrm{L}^e : \delta\varepsilon_1 + h'\delta\varepsilon_2 : \mathrm{L}^e : \delta\varepsilon_2 \tag{1.18}$$

В силу предполагаемой положительной определенности L^{se} из (1.18) следует, что разупрочнение равносильно отрицательности h' (а вместе с ним и h):

$$h' < 0 \tag{1.19}$$

В [1, 2] показано, что условие Адамара устанавливает для h' нижний предел h_*', который в ряде случаев может быть отрицательным и даже необязательно малым по абсолютной величине (примеры будут рассмотрены ниже, когда будут получены условия, обеспечивающие устойчивость однородного закритического деформирования вплоть до нарушения условия Адамара).

2. **Критерий устойчивости процесса активного пластического деформирования.** Будем исходить из данного в [16, 17] определения устойчивости процесса квазистатического деформирования, т. е. процесса, стадиями которого являются последовательно проходимые состояния равновесия.

Допустим, что изучаемая механическая система включает в себя некий монотонно изменяющийся управляющий параметр (в данном конкретном случае — расстояние между плитами машин). Каждому значению управляющего параметра соответствует определенное состояние равновесия, называемое основным, и ряд других состояний (необязательно равновесных), называемых побочными. Будем называть однопараметрическое семейство основных состояний основным равновесным процессом (он считается непрерывным). Любое другое непрерывное однопараметрическое семейство допустимых состояний будем называть побочным процессом или ответвлением. Ограничимся рассмотрением побочных процессов, которые до определенной стадии совпадают с основным, и лишь затем отклоняются от него. В тех случаях, когда состояния, отвечающие побочному процессу, являются неравновесными, домыслим, что некие умозрительные сторонние силы все же принудительным образом уравновешивают систему.

Определение. Назовем основной равновесный процесс устойчивым, если для любых ответвлений работа уравновешивающих сторонних сил на перемещениях, дополнительных по отношению к основному процессу, положительна.

Если рассматривать только начальные стадии побочных процессов после их отклонения от основного, то соответствующая устойчивость называется устойчивостью в малом. Именно этим видом устойчивости мы и будем интересоваться в дальнейшем.

Ниже будет показано, что устойчивость в малом в смысле данного определения эквивалентна положительной определенности некоего интегрального функционала, зависящего от полей малых виртуальных смещений.

При выводе математического критерия устойчивости в малом ограничимся лишь интересующим нас непосредственно случаем сжатия тела цилиндрической формы между двумя гладкими жесткими плитами, расстояние между которыми изменяется заданным образом. Виртуальные скорости деформаций будем полагать конечными во всех точках тела, так что материальные точки не смогут переходить с торцов на боковую поверхность и наоборот.

Назовем поверхность плит (совокупность двух параллельных плоскостей) ведущей поверхностью. По мере предписанного движения ведущей поверхности материальные точки торцов могут свободно скользить по ней, а внутренние точки и точки боковой поверхности цилиндра могут двигаться произвольно.

Будем считать, что предписанному движению ведущей поверхности соответствует (среди прочих) основной процесс равновесного деформирования тела, в ходе которого образец (фиг. 1) деформируется однородно, а обойма деформируется цилиндрически симметрично. Однородное деформирование образца в основном процессе считается соответствующим активному пластическому нагружению; обойму будем считать упругой. Наряду с основным процессом вводятся в рассмотрение побочные, в которых допускается неоднородное деформирование образца, в том числе и с наличием зон разгрузки.

Очевидная неединственность основного процесса, связанная с возможностью жесткого движения, параллельного ведущим плоскостям при фиксированном их положении, отбрасывается как тривиальная.

Перейдем к математическому описанию деформируемого тела и совершаемых над ним процессов.

Введем отсчетную конфигурацию тела $\varkappa$ и будем идентифицировать его материальные точки с помощью их радиус-векторов $\mathbf{x}$ в отсчетной конфигурации. Произвольная конфигурация тела χ задается отображением

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \varkappa) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки $\mathbf{x}$ в конфигурации χ.

Исследуемому на устойчивость равновесному процессу отвечает однопараметрическое семейство конфигураций $\chi_0(q)$, т. е. семейство отображений

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, q) \tag{2.2}$$

При этом движение ведущей поверхности полностью определено значениями отображения (3.2) на торцевой части границы $\partial\varkappa$, которую будем обозначать $\partial\varkappa^f$. Область в отсчетной конфигурации, занимаемую образцом (внутренний цилиндр), будем обозначать через $\varkappa^c$; область, занимаемую обоймой (цилиндрическая толстостенная оболочка) — через $\varkappa^s$. Внешнюю боковую поверхность обоймы будем обозначать $\partial\varkappa^s$.

Сделаем некоторые дополнительные предположения, касающиеся рассматриваемых процессов $\chi(q)$. Будем считать, что отображения $\mathbf{f}(\mathbf{x}, q)$ непрерывны, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемы по q и кусочно-непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$. Поверхность раздела образца и обоймы $\partial\varkappa^c$ является поверхностью разрыва градиента даже в основном процессе $\chi_0(q)$, но для побочных процессов допускается возникновение и других поверхностей разрыва градиента. До значения параметра $q = q_0$ процесс $\chi(q)$ совпадает с $\chi_0(q)$; в момент $q = q_0$ процесс $\chi(q)$ отклоняется с изломом, т. е. при $q = q_0$ производные по q испытывают скачок. Дополнительно предполагается, что новые поверхности разрыва градиента, зарождающиеся при $q = q_0 + 0$, являются материальными поверхностями, т. е. поверхностями, неизменными в $\varkappa$. Совокупность этих поверхностей будем обозначать через Σ^d.

Напряжения в теле в процессе деформирования будем описывать с помощью тензоров напряженной Пиолы $\mathbf{T}_\varkappa(\mathbf{x}, q)$, которые удовлетворяют соотношению безмоментности

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T}_\varkappa = \mathbf{T}_\varkappa^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \equiv \nabla \otimes \mathbf{f}(\mathbf{x}, q) \tag{2.3}$$

Для равновесного процесса в предположении отсутствия массовых сил имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_{\varkappa 0}(\mathbf{x}, q) = 0, \;\; \mathbf{x} \in \operatorname{int}(\varkappa) \backslash \partial\varkappa^c \tag{2.4}$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\varkappa 0}]_-^+ = 0, \;\; \mathbf{x} \in \partial\varkappa^c \tag{2.5}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\varkappa 0} \cdot (\mathbf{I} - \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}) = 0, \;\; \mathbf{x} \in \partial\varkappa^f \tag{2.6}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\varkappa 0} = 0, \;\; \mathbf{x} \in \partial\varkappa^s \tag{2.7}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к соответствующей поверхности в отсчетной конфигурации, $\boldsymbol{\nu}$ — нормаль к текущему положению ведущей поверхности; через $[\;]_-^+$ обозначен скачок величины, стоящей в скобках, на некоторой поверхности. Без ограничения общности можно считать, что плоскости, образующие ведущую поверхность, перемещаются параллельно себе; тогда на $\partial\varkappa^f$ текущая нормаль $\boldsymbol{\nu}$ совпадает с $\mathbf{n}$.

Для побочных процессов, не являющихся равновесными, мысленно введем уравновешивающие сторонние силы, причем как объемные, так и поверхностные (на внешней и внутренней границах и на поверхностях разрыва градиентов смещений Σ^d). Тогда условия равновесия примут вид

$$\nabla\cdot\mathbf{T}_\varkappa + \mathbf{b}^{ex} = 0,\ \mathbf{b}^{ex}(\mathbf{x}, q_0+0) = 0,\ \mathbf{x}\in \operatorname{int}(\varkappa)\backslash(\partial\varkappa^c \cup \Sigma^d) \tag{2.8}$$

$$[\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_\varkappa]^{+}_{-} + \mathbf{c}^{ex} = 0,\ \mathbf{c}^{ex}(\mathbf{x}, q_0+0) = 0,\ \mathbf{x}\in\partial\varkappa^c\cup\Sigma^d \tag{2.9}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_\varkappa\cdot(\mathbf{I}-\boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{t}^{ex},\quad \mathbf{x}\in\partial\varkappa^f \tag{2.10}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_\varkappa = \mathbf{t}^{ex},\ \mathbf{t}^{ex}(\mathbf{x}, q_0+0) = 0,\ \mathbf{x}\in\partial\varkappa^s \tag{2.11}$$

Работа сторонних сил на дополнительных перемещениях для малого участка $(q_0, q_0 + a)$ побочного процесса $\chi(q)$ равна

$$W^{ex}(a) = \int\limits_{q_0}^{q_0+a} dq\left(\int\limits_\varkappa \mathbf{b}^{ex}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,dV + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\partial\varkappa^c\cup\Sigma^d}\mathbf{c}^{ex}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,d\Sigma + \int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{t}^{ex}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,d\Sigma\right) \tag{2.12}$$

где штрихом обозначена производная по q при $\mathbf{x} = \mathrm{const}$ (в данной материальной точке). По формуле Тейлора

$$W^{ex}(a) = aW^{ex\prime}(q_0+0) + \frac{a^2}{2}W^{ex\prime\prime}(q_0+0) + o(a^2) \tag{2.13}$$

$$W^{ex\prime}(q_0+0) = \left(\int\limits_\varkappa \mathbf{b}^{ex}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,dV + \int\limits_{\partial\varkappa^c\cup\Sigma^d}\mathbf{c}^{ex}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,d\Sigma + \int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{t}^{ex}\cdot(\mathbf{r}'-\right.$$
$$\left.-\mathbf{r}_0')\,d\Sigma\right)\Big|_{q=q_0+0} = 0 \tag{2.14}$$

$$W^{ex\prime\prime}(q_0+0) = \left(\int\limits_\varkappa \mathbf{b}^{ex\prime}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,dV + \int\limits_{\partial\varkappa^c\cup\Sigma^d}\mathbf{c}^{ex\prime}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,d\Sigma + \int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{t}^{ex\prime}\cdot(\mathbf{r}'-\right.$$
$$-\mathbf{r}_0')\,d\Sigma + \int\limits_\varkappa\mathbf{b}^{ex}\cdot(\mathbf{r}''-\mathbf{r}_0'')\,dV + \int\limits_{\partial\varkappa^c\cup\Sigma^d}\mathbf{c}^{ex}\cdot(\mathbf{r}''-\mathbf{r}_0'')\,d\Sigma +$$
$$\left. + \int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{t}^{ex}\cdot(\mathbf{r}''-\mathbf{r}_0'')\,d\Sigma\right)\Big|_{q=q_0+0} \tag{2.15}$$

Три последних интеграла в (2.15) обращаются в нуль. Чтобы исключить $\mathbf{b}^{ex}$, $\mathbf{c}^{ex}$ и $\mathbf{t}^{ex}$ из первых трех, продифференцируем уравнения равновесия (2.8)—(2.11) по q при постоянном $\mathbf{x}$:

$$\nabla\cdot\mathbf{T}_\varkappa' + \mathbf{b}^{ex\prime} = 0,\ \mathbf{x}\in\operatorname{int}(\varkappa)\backslash(\partial\varkappa^c\cup\Sigma^d) \tag{2.16}$$

$$[\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_\varkappa']^{+}_{-} + \mathbf{c}^{ex\prime} = 0,\ \mathbf{x}\in\partial\varkappa^c\cup\Sigma^d \tag{2.17}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_\varkappa'\cdot(\mathbf{I}-\boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{t}^{ex\prime},\ \mathbf{x}\in\partial\varkappa^f \tag{2.18}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_\varkappa' = \mathbf{t}^{ex\prime},\quad \mathbf{x}\in\partial\varkappa^s \tag{2.19}$$

Заметим, что $\boldsymbol{\nu}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0') = 0$, поэтому $\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_\varkappa'\cdot(\mathbf{I}-\boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu})\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0') = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_\varkappa'\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')$.

С учетом того, что для основного процесса уравнения (2.16)—(2.19) выполняются при нулевых сторонних силах, получим

$$W^{ex\prime\prime}(q_0+0) = -\int\limits_\varkappa(\nabla\cdot(\mathbf{T}_\varkappa'-\mathbf{T}_{\varkappa0}'))\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,dV -$$
$$-\int\limits_{\partial\varkappa^c\cup\Sigma^d}[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{T}_\varkappa'-\mathbf{T}_{\varkappa0}')]^{+}_{-}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,d\Sigma + \int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{T}_\varkappa'-\mathbf{T}_{\varkappa0}')\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')\,d\Sigma \tag{2.20}$$

Применяя теорему Гаусса—Остроградского к области с вырезанными поверхностями разрыва градиента смещений, получим

$$W^{ex\prime\prime}(q_0+0)=\int\limits_{\varkappa}(\mathrm{T}_\varkappa'-\mathrm{T}_{\varkappa 0}'):(\nabla\otimes\mathbf{r}'-\nabla\otimes\mathbf{r}_0')\,dV \tag{2.21}$$

и знак этой величины определяет знак $W^{ex}(a)$ при малых a.

Примем в качестве отсчетной конфигурации $\varkappa$ конфигурацию $\chi(q_0)$. Заметим, что

$$\delta T_\varkappa = a\mathrm{T}_\varkappa'(q_0+0),\ \ \delta\mathbf{r}=a\mathbf{r}'(q_0+0)=\delta\mathbf{u},\ldots \tag{2.22}$$

С учетом этого

$$2W^{ex}(a)=\int\limits_{\varkappa}(\delta\mathrm{T}_\varkappa-\delta\mathrm{T}_{\varkappa 0}):(\delta\mathrm{H}-\delta\mathrm{H}_0)\,dV+o(a^2) \tag{2.23}$$

Таким образом, знак функционала

$$R\{\delta\mathbf{u}\}\equiv\int\limits_{\varkappa}(\delta\mathrm{T}_\varkappa-\delta\mathrm{T}_{\varkappa 0}):(\delta\mathrm{H}-\delta\mathrm{H}_0)\,dV \tag{2.24}$$

определяет знак $W^{ex}(a)$ при малых a. Заметим, что если поле $\delta\mathbf{u}(\mathrm{x})-\delta\mathbf{u}_0(\mathrm{x})$ соответствует смещению тела как жесткого целого при фиксированном положении плоскостей плит (поступательное смещение в направлении, параллельном плоскостям, и поворот вокруг оси, ортогональной к ним), то тогда $R\{\delta\mathbf{u}\}=0$. Это следует из того, что при наложении такого движения на основной процесс равновесие не нарушается и, значит, сторонние силы равны нулю и работы не производят; можно также вывести это совершенно формально из (2.24).

Если воспользоваться соотношением (1.12) и учесть активность основного процесса деформирования для образца, то следуя, по существу, [18], получим

$$(\delta\mathrm{T}_\varkappa-\delta\mathrm{T}_{\varkappa 0}):(\delta\mathrm{H}-\delta\mathrm{H}_0)\geq(\delta\mathrm{H}-\delta\mathrm{H}_0):\mathrm{A}^p:(\delta\mathrm{H}-\delta\mathrm{H}_0),\ \ \mathrm{x}\in\varkappa^c \tag{2.25}$$

Вводя обозначения

$$\delta\mathbf{v}(\mathrm{x})\equiv\delta\mathbf{u}(\mathrm{x})-\delta\mathbf{u}_0(\mathrm{x}) \tag{2.26}$$

$$R^p\{\delta\mathbf{v}\}\equiv\int\limits_{\varkappa^c}\nabla\otimes\delta\mathbf{v}:\mathrm{A}^p:\nabla\otimes\delta\mathbf{v}\,dV+\int\limits_{\varkappa^s}\nabla\otimes\delta\mathbf{v}:\mathrm{A}:\nabla\otimes\delta\mathbf{v}\,dV\leq R\{\delta\mathbf{u}\} \tag{2.27}$$

констатируем окончательно, что достаточным условием устойчивости в малом (в смысле Друккера) основного процесса активного деформирования является положительная определенность функционала $R^p\{\delta\mathbf{v}\}$ на полях малых дополнительных смещений, отличных от движения как жесткого целого при фиксированном положении плит машины. Иначе говоря, достаточное условие устойчивости такого процесса — это устойчивость в малом положения равновесия (при фиксированном положении плит) эквивалентного составного упругого тела, в котором упругопластический образец заменен упругим с жесткостью A^p (жесткость образца в режиме активного пластического деформирования).

Заметим, что полученный на основании определения Друккера критерий устойчивости процесса деформирования идентичен соответствующему критерию единственности Хилла [18], который для рассматриваемых граничных условий был выведен и использован в [19, 20].

3. Теорема типа теоремы Ван Хофа. Теорема сравнения. Изучение устойчивости эквивалентного составного упругого тела при граничных условиях (ГУ), описанных выше, будет сведено к изучению устойчивости другого составного тела (с обоймой другой жесткости) и при других ГУ (условиях нулевых смещений на боковой внешней цилиндрической поверхности). Смысл такой замены заключается в том, что во втором случае можно воспользоваться доказанной автором ранее [2, 3, 5] теоремой типа теоремы Ван Хофа [8]. Прежде чем формулировать эту теорему, введем некоторые необходимые понятия и обозначения.

Определение. Будем называть тензор четвертого ранга A адамаровым, если для него выполняется строгое неравенство Адамара (условие сильной эллиптичности):

$$\forall\, g_1, g_2 \neq 0, \quad g_1 \otimes g_2 : A : g_1 \otimes g_2 > 0 \tag{3.1}$$

Определение. Числом Адамара a тензора A будем называть величину

$$a \equiv \min_{|g_1|=|g_2|=1} g_1 \otimes g_2 : A : g_1 \otimes g_2 \tag{3.2}$$

Очевидно, что тензор четвертого ранга адамаров тогда и только тогда, когда его число Адамара положительно.

Определим теперь тензоры четвертого ранга с материальной симметрией и, в частности, с теми двумя типами симметрии, которые фигурируют в доказанной теореме.

Будем обозначать элементы представления ортогональной группы в пространстве тензоров четвертого ранга теми же символами, что и соответствующие элементы самой ортогональной группы. Действие ортогонального тензора Q на тензор A задается равенством:

$$A * Q \equiv A \vdots Q \otimes Q \otimes Q \otimes Q^{(13572468)} \tag{3.3}$$

Это означает, что каждая тетрада преобразуется по правилу [18]:

$$a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4 * Q = a_1 \cdot Q \otimes a_2 \cdot Q \otimes a_3 \cdot Q \otimes a_4 \cdot Q \tag{3.4}$$

Определение. Тензор четвертого ранга A называется инвариантным относительно некоторой подгруппы ортогональной группы, если для любого элемента Q этой подгруппы

$$A * Q = A \tag{3.5}$$

Под материальной симметрией будем понимать именно такую инвариантность.

Теперь могут быть сформулированы теорема Ван Хофа и вышеупомянутая теорема типа Ван Хофа [2].

Теорема Ван Хофа. Пусть $\varkappa$ — ограниченная область в R^3 с кусочно-гладкой границей $\partial\varkappa$, A_0 — постоянный адамаров тензор, $v(x)$ — непрерывное кусочно-гладкое векторное поле, обращающееся в нуль на $\partial\varkappa$ и не равное нулю тождественно. Тогда имеет место неравенство

$$R_0\{v\}_{\varkappa} \equiv \int_{\varkappa} \nabla \otimes v : A_0 : \nabla \otimes v dV \geq a_0 \int_{\varkappa} \nabla \otimes v : \nabla \otimes v dV > 0 \tag{3.6}$$

Нетривиальность утверждения теоремы заключается в том, что интегральный функционал является положительно определенным, в то время как подынтегральная функция таковой не является. Более того, неравенство Адамара (нестрогое) является необходимым условием положительной определенности функционала $R_0\{v\}$ (теорема Адамара); из теоремы Ван Хофа следует, что при сделанных предположениях, оно же (в строгом варианте) является и достаточным условием, так что утверждение теоремы в некотором смысле максимально.

Теорема типа Ван Хофа. 1. Пусть $\varkappa$ является ограниченной подобластью плоского слоя (с нормалью n_0 к граничным плоскостям), причем часть границы области $\varkappa$ лежит на граничных поверхностях слоя; эту часть границы будем обозначать $\partial\varkappa^f$. Пусть A_0 — постоянный адамаров тензор, симметричный относительно плоскости слоя, т. е. $A_0 * Q_0 = A_0$, где $Q_0 \equiv I - 2n_0 \otimes n_0$ — ортогональный тензор второго ранга, задающий отражение относительно плоскости слоя. Пусть, наконец, $v(x)$ — непрерывное кусочно-гладкое векторное поле, обращающееся в нуль на той части границы $\partial \varkappa$, которая не лежит на граничных плоскостях слоя, и удовлетворяющее условию проскальзывания на $\partial \varkappa^f$:

$$\mathrm{v}(\mathrm{x}) = 0, \quad \mathrm{x} \in \partial\varkappa \backslash \partial\varkappa^f; \quad \mathrm{n}_0 \cdot \mathrm{v}(\mathrm{x}) = 0, \quad \mathrm{x} \in \partial\varkappa^f \tag{3.7}$$

Тогда имеет место неравенство (3.6).

2. Пусть $\varkappa$ является подобластью прямоугольного параллелепипеда, причем часть границы $\varkappa$ лежит на его гранях; эту часть границы будем обозначать $\partial\varkappa^f$. Пусть A_0 — постоянный адамаров тензор, симметричный относительно всех трех плоскостей граней, т. е. $\mathrm{A}_0 * \mathrm{Q}_1 = \mathrm{A}_0 * \mathrm{Q}_2 = \mathrm{A}_0 * \mathrm{Q}_3 = \mathrm{A}_0$, где Q_i — ортогональные тензоры, задающие отражения относительно этих плоскостей. Если $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ — непрерывное кусочно-гладкое векторное поле, удовлетворяющее условию проскальзывания на $\partial\varkappa^f$ и обращающееся в нуль на остальной части границы, то имеет место неравенство (3.6).

Вторая часть теоремы была использована в [2—4], в публикуемой работе используется ее первая часть для того, чтобы установить некую теорему сравнения, из которой следовала бы устойчивость изучаемой механической системы.

В этой связи заметим, прежде всего, что однородное трансверсально изотропное тело с осью, ортогональной плоскости слоя, и в однородном напряженном состоянии, являющемся совокупностью одноосного сжатия (с той же осью) и изотропного давления, имеет однородный тензор жесткости A^p (1.9) (так же, как и A^e), симметричный относительно плоскости слоя. Действительно, $\mathrm{A}^p * \mathrm{Q}_0 = \mathrm{A}^p * (-\mathrm{Q}_0)$, $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{I} - 2\mathrm{n}_0 \otimes \mathrm{n}_0$, $-\mathrm{Q}_0 = 2\mathrm{n}_0 \otimes \mathrm{n}_0 - \mathrm{I}$ — поворот на угол π вокруг оси n_0, т. е. тензор, входящий в группу симметрии. Следовательно, $\mathrm{A}^p * \mathrm{Q}_0 = \mathrm{A}^p$.

Таким образом, если A^p является адамаровым тензором, а для поля $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ на границе области выполняются условия (3.7), то имеет место неравенство (3.6) при $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}^p$. В частности, в качестве области может быть взята цилиндрическая область $\varkappa$, занимаемая образцом и обоймой (фиг. 1), или цилиндрическая область большего радиуса, в том числе и очень большого, но конечного радиуса (бесконечные области формально недопустимы, поскольку используются математические утверждения, установленные для ограниченных областей).

При выводе нужного неравенства для функционала (2.27) в дальнейшем будем отбрасывать значки инкремента δ, а параметры обоймы снабдим верхним индексом «градус». Заметим, что жесткость обоймы $\mathrm{A}^\circ(\mathrm{x})$, вообще говоря, не является константой хотя бы потому, что поле напряжений в обойме, в отличие от образца, не является однородным.

Для того, чтобы исключить поля смещений, отвечающие движению тела как жесткого целого параллельно плоскости слоя, примем следующие условия:

$$\int_{\partial\varkappa^c} \mathrm{v} \cdot (\mathrm{I} - \mathrm{n}_0 \otimes \mathrm{n}_0)\, d\Sigma = 0 \tag{3.8}$$

$$\int_{\partial\varkappa^c \cup \partial\varkappa^s} \mathrm{n}_0 \cdot (\mathrm{n} \times \mathrm{v})\, d\Sigma = 0 \tag{3.9}$$

Наряду с полем $\mathrm{v}(\mathrm{x})$, удовлетворяющим условиям (3.8), (3.9), рассмотрим другое поле $\tilde{\mathrm{v}}(\mathrm{x})$, которое также непрерывно, кусочно-гладко, совпадает с $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ в области $\varkappa^c$, а в $\varkappa^s$ отличается от $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ и обращается в нуль на внешней боковой границе $\partial\varkappa^s$. В силу теоремы типа Ван Хофа для любого такого ненулевого поля $\tilde{\mathrm{v}}(\mathrm{x})$ имеем

$$\int_{\varkappa^c} \nabla \otimes \mathrm{v} : \mathrm{A}^p : \nabla \otimes \mathrm{v}\, dV + \int_{\varkappa^s} \nabla \otimes \tilde{\mathrm{v}} : \mathrm{A}^p : \nabla \otimes \tilde{\mathrm{v}}\, dV > 0 \tag{3.10}$$

Если для каждого допустимого поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ существует такое соответствующее ему поле $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$, что

$$\int_{\varkappa^s} \nabla\otimes\tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{A}^p : \nabla\otimes\tilde{\mathbf{v}}\,dV \le \int_{\varkappa^s} \nabla\otimes\mathbf{v} : \mathbf{A}^\circ(\mathbf{x}) : \nabla\otimes\mathbf{v}\,dV \qquad (3.11)$$

то тогда $R^p\{\mathbf{v}\} > 0$, т. е. исследуемый квазистатический процесс устойчив.

Чтобы найти ограничения на распределение жесткости обоймы $\mathbf{A}^\circ(\mathbf{x})$, обеспечивающие выполнение неравенства (3.11), найдем прежде всего, с учетом структуры тензора $\mathbf{A}^\circ$, такой постоянный тензор $\mathbf{A}_0^\circ$, чтобы для любого тензора второго ранга $\mathbf{H}$ равномерно во всей области $\varkappa^s$ выполнялось неравенство

$$\mathbf{H} : \mathbf{A}_0^\circ : \mathbf{H} \le \mathbf{H} : \mathbf{A}^\circ(\mathbf{x}) : \mathbf{H} \qquad (3.12)$$

и в дальнейшем будем искать ограничения, которые следует наложить именно на миноранту $\mathbf{A}_0^\circ$. В соответствии с (1.9) и последующими формулами

$$\mathbf{A}^\circ = (\mathbf{L}^\circ)^s + \mathbf{M}(\mathbf{T}) \qquad (3.13)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{T}) \equiv 1/2\,((\mathbf{T}\otimes\mathbf{I} + \mathbf{I}\otimes\mathbf{T}) + (\mathbf{T}\otimes\mathbf{I} - \mathbf{I}\otimes\mathbf{T})^{(1423)} - (\mathbf{T}\otimes\mathbf{I} + \mathbf{I}\otimes\mathbf{T})^{(1432)}) \qquad (3.14)$$

где тензоры $(\mathbf{L}^\circ)^s$ и $\mathbf{M}(\mathbf{T})$ симметричны относительно перестановки (3412) и тензор $(\mathbf{L}^\circ)^s$ положительно определен на подпространстве симметричных тензоров второго ранга.

Можно показать, что абсолютные величины всех собственных чисел [21] тензора $\mathbf{M}$ ограничены сверху:

$$|\mu_i| \le 4\,(\mathbf{T}:\mathbf{T})^{1/2} \quad (i = 1, \ldots, 9) \qquad (3.15)$$

Введем обозначение

$$\mu_M^\circ \equiv \max_{\mathbf{x}\in\varkappa^s} 4\,(\mathbf{T}:\mathbf{T})^{1/2} \qquad (3.16)$$

Обозначим также через λ_m° минимум по области $\varkappa^s$ наименьшего из собственных чисел тензора $(\mathbf{L}^\circ)^s$ на подпространстве симметричных тензоров второго ранга. Тогда, очевидно, можно принять

$$\mathbf{A}_0^\circ = \lambda_m^\circ \mathbf{1}^{\mathrm{def}} - \mu_M^\circ \mathbf{1} \qquad (3.17)$$

где $\mathbf{1}$ — единичный тензор четвертого ранга

$$\mathbf{1} = \mathbf{I}\otimes\mathbf{I}^{(1423)} \qquad (3.18)$$

Найдем теперь аналогичную мажоранту для квадратичной формы $\mathbf{H} : \mathbf{A}^p : \mathbf{H}$. Прежде всего заметим, что $\mathbf{H} : \mathbf{A}^p : \mathbf{H} \le \mathbf{H} : \mathbf{A}^e : \mathbf{H}$. Аналогично (3.13):

$$\mathbf{A}^e = \mathbf{L}^{se} + \mathbf{M}(\mathbf{T}) \qquad (3.19)$$

Обозначим наибольшее собственное число $\mathbf{L}^{se}$ через λ_M^e, величину $4\,(\mathbf{T}:\mathbf{T})^{1/2}|_{\varkappa^c}$ через μ_M (напомним, что в $\varkappa^c$ напряженное состояние однородное). Тогда

$$\mathbf{H} : \mathbf{A}^p : \mathbf{H} \le (\lambda_M^e + \mu_M)\,\mathbf{H} : \mathbf{H} \qquad (3.20)$$

$$\int_{\varkappa^s} \nabla\otimes\tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{A}^p : \nabla\otimes\tilde{\mathbf{v}}\,dV \le (\lambda_M^e + \mu_N) \int_{\varkappa^s} \nabla\otimes\tilde{\mathbf{v}} : \nabla\otimes\tilde{\mathbf{v}}\,dV \qquad (3.21)$$

Допустим, что существует такая константа ψ, зависящая только от геометрии области $\varkappa^s$, что для привлекаемых к рассмотрению полей $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ и произвольных полей $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, совпадающих с $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ на поверхности $\partial\varkappa^c$ и удовлетворяющих условиям (3.8), (3.9), имеет место неравенство

$$\int_{\varkappa^s} \nabla\otimes\tilde{\mathbf{v}} : \nabla\otimes\tilde{\mathbf{v}}\,dV \le \psi \int_{\varkappa^s} \nabla\otimes\mathbf{v} : \nabla\otimes\mathbf{v}\,dV \qquad (3.22)$$

С учетом наличия для полей v (x) неравенства Корна с константой k:

$$\int\limits_{\varkappa^s} \nabla \otimes \mathrm{v} : \nabla \otimes \mathrm{v} dV \leq k \int\limits_{\varkappa^s} \nabla \otimes \mathrm{v} : 1^{\mathrm{def}} : \nabla \otimes \mathrm{v} dV \tag{3.23}$$

имеем

$$\left(\frac{\lambda_m^\circ}{k} - \mu_M^\circ\right) \int\limits_{\varkappa^s} \nabla \otimes \mathrm{v} : \mathrm{v} \otimes \mathrm{v} dV \leq \int\limits_{\varkappa^s} \nabla \otimes \mathrm{v} : \mathrm{A}_0^\circ : \nabla \otimes \mathrm{v} dV \leq$$

$$\leq \int\limits_{\varkappa^s} \nabla \otimes \mathrm{v} : \mathrm{A}^\circ : \nabla \otimes \mathrm{v} dV \tag{3.24}$$

Тогда, если жесткость обоймы настолько велика, что выполняется неравенство

$$\psi \left(\lambda_M^e + \mu_M\right) \leq \lambda_m^\circ / k - \mu_M^\circ \tag{3.25}$$

то действительно имеют место неравенство (3.11) и устойчивость процесса. Для этого нужно, прежде всего, чтобы правая часть неравенства (3.25) была положительна (достаточное условие устойчивости самой обоймы без образца при ее сжатии между гладкими плитами [22]).

4. Определение константы ψ. Хотя, по всей вероятности, существование конечной константы ψ может быть доказано в весьма широких предположениях относительно геометрии тела с полостью, мы воспользуемся методом, опирающимся на наличие цилиндрической симметрии обоймы и на принятые условия проскальзывания на ее торцах.

Будем считать, что точка $\mathrm{x} = 0$ лежит на одной из граничных плоскостей, например, на нижней (вектор единичной нормали n_0 будем считать направленным вверх). Зафиксировав в плоскости некоторое направление, будем отсчитывать от него угол φ, задавая тем самым направление лежащего в плоскости единичного вектора $\mathrm{e}_r(\varphi)$. Введем цилиндрическую систему координат с помощью соотношения

$$\mathrm{x} = z\mathrm{n}_0 + r\mathrm{e}_r(\varphi) \tag{4.1}$$

Заметим, что

$$\mathrm{e}_\varphi(\varphi) \equiv d\mathrm{e}_r/d\varphi(\varphi) = \mathrm{n}_0 \times \mathrm{e}_r(\varphi) \tag{4.2}$$

единичный вектор, ортогональный e_r и n_0.

Пусть расстояние между плоскостями равно l, внутренний и внешний радиусы обоймы равны r^{in} и r^{ex} соответственно (фиг. 2).

Напомним, что, в силу условий проскальзывания на граничных плоскостях, значения векторных полей v (x) и $\tilde{\mathrm{v}}$ (x) при $z = 0$ и $z = l$ лежат в этих плоскостях, т. е.

$$\mathrm{v} \cdot \mathrm{n}_0 = \tilde{\mathrm{v}} \cdot \mathrm{n}_0 = 0 \quad (z = 0,\ z = l) \tag{4.3}$$

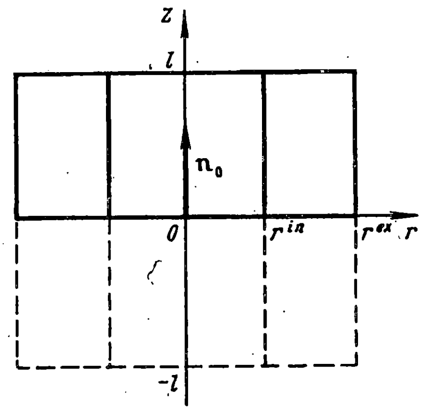
Кроме того, на $\partial\varkappa^c$ значения v (x) и $\tilde{\mathrm{v}}$ (x) совпадают

$$\mathrm{v} = \tilde{\mathrm{v}}, \quad r = r^{\mathrm{in}} \tag{4.4}$$

Отразим область $\varkappa^s$ вместе с заданными в ней полями v (x) и $\tilde{\mathrm{v}}$ (x) относительно плоскости $z = 0$. Объединение области $\varkappa^s$ и ее образа обозначим $\varkappa^{s'}$ (фиг. 2); расширения векторных полей на $\varkappa^{s'}$ будем обозначать прежними символами v (x) и $\tilde{\mathrm{v}}$ (x). Заметим, что, в силу (4.3), новые поля v (x) и $\tilde{\mathrm{v}}$ (x) не «рвутся» на плоскости $z = 0$, удовлетворяют условию «периодичности»

$$\mathrm{v}|_{z=-l} = \mathrm{v}|_{z=l}, \qquad \tilde{\mathrm{v}}|_{z=-l} = \tilde{\mathrm{v}}|_{z=l} \tag{4.5}$$

и, как и прежде, условию (4.4). Кроме того, если в (3.22) заменить интегралы по $\varkappa^s$ на интегралы по $\varkappa^{s'}$, то каждая из частей неравенства просто удвоится, т. е. такая замена приводит к эквивалентному неравенству, из рассмотрения которого и будем определять константу ψ.



Фиг. 2

Воспользуемся разложением полей $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ в ряд Фурье по z и φ в $\varkappa^{s\prime}$. Введем следующие обозначения:

$$\eta^{(1)}_{mn}(z,\varphi)\equiv\cos(mpz)\cos(n\varphi),\quad \eta^{(2)}_{mn}(z,\varphi)\equiv\cos(mpz)\sin(n\varphi),$$
$$\eta^{(3)}_{mn}(z,\varphi)\equiv\sin(mpz)\cos(n\varphi),\quad \eta^{(4)}_{mn}(z,\varphi)\equiv\sin(mpz)\sin(n\varphi) \tag{4.6}$$
$$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\dots),\qquad p\equiv\pi/l$$

Тогда

$$\mathbf{v}(z,\varphi,r)=\sum_{l=1}^{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{(l)}_{mn}(z,\varphi)\,\mathbf{g}^{(l)}_{mn}(r)\equiv\sum_{l=1}^{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{v}^{(l)}_{mn}(\mathbf{x}) \tag{4.7}$$

Для $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ все абсолютно так же, только $\mathbf{g}^{(l)}_{mn}$, $\mathbf{v}^{(l)}_{mn}$ заменяются на $\tilde{\mathbf{g}}^{(l)}_{mn}$, $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn}$. Заметим, что, в силу симметрии полей $\mathbf{v}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ в $\varkappa^{s\prime}$, векторы $\mathbf{g}^{(1)}_{mn}(r)$, $\mathbf{g}^{(2)}_{mn}(r)$, $\tilde{\mathbf{g}}^{(1)}_{mn}(r)$, $\tilde{\mathbf{g}}^{(2)}_{mn}(r)$ лежат в плоскости слоя, а векторы $\mathbf{g}^{(3)}_{mn}(r)$, $\mathbf{g}^{(4)}_{mn}(r)$, $\tilde{\mathbf{g}}^{(3)}_{mn}(r)$, $\tilde{\mathbf{g}}^{(4)}_{mn}(r)$ — ортогональны ей; при этом, однако, $\mathbf{v}^{(3)}_{mn}(x)$, $\mathbf{v}^{(4)}_{mn}(x)$, $\tilde{\mathbf{v}}^{(3)}_{mn}(x)$, $\tilde{\mathbf{v}}^{(4)}_{mn}(x)$ на торцах цилиндра обращаются в нуль.

В силу (4.6) отличным от нуля при $m=n=0$ может быть только $\mathbf{v}^{(1)}_{00}(r)=\mathbf{g}^{(1)}_{00}(r)$, причем, в силу (3.8), $\mathbf{g}^{(1)}_{00}(r^{in})=\tilde{\mathbf{g}}^{(1)}_{00}(r^{in})=0$.

Для всех $\mathbf{v}^{(l)}_{mn}$, $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn}$ выполняются условия (4.3), (4.4), (4.5), а для $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn}$ условие

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn}(z,\varphi,r^{ex})=0 \tag{4.8}$$

Для градиента $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ (как и для градиента $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$) имеем

$$\nabla\otimes\mathbf{v}=\nabla z\otimes\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}+\nabla\varphi\otimes\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\varphi}+\nabla r\otimes\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial r}=\mathbf{n}_0\otimes\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}+\frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi\otimes\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\varphi}+\mathbf{e}_r\otimes\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial r} \tag{4.9}$$

В силу периодичности полей $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ по переменным z и φ разложения в ряд Фурье для $\partial\mathbf{v}/\partial z$, $\partial\tilde{\mathbf{v}}/\partial z$ и для $\partial\mathbf{v}/\partial\varphi$, $\partial\tilde{\mathbf{v}}/\partial\varphi$ получаются дифференцированием по z и по φ рядов Фурье для $\mathbf{v}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ (известная теорема в теории тригонометрических рядов); переменная r в (4.6) является просто параметром, от которого зависят только коэффициенты разложения, и по которому ряд тоже можно дифференцировать. Таким образом, члены разложения в ряд Фурье градиента получаются применением формулы (4.9) к каждому из слагаемых $\mathbf{v}^{(l)}_{mn}$ и $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn}$:

$$\nabla\otimes\mathbf{v}=\sum_{l}\sum_{m}\sum_{n}\nabla\otimes\mathbf{v}^{(l)}_{mn}=$$
$$=\sum_{l}\sum_{m}\sum_{n}\left(\mathbf{n}_0\otimes\frac{\partial\mathbf{v}^{(l)}_{mn}}{\partial z}+\frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi\otimes\frac{\partial\mathbf{v}^{(l)}_{mn}}{\partial\varphi}+\mathbf{e}_r\otimes\frac{\partial\mathbf{v}^{(l)}_{mn}}{\partial r}\right) \tag{4.10}$$

Введем скалярное произведение

$$\{\nabla \otimes \mathbf{v} : \nabla \otimes \mathbf{w}\} \equiv \int\limits_{\varkappa^{s'}} \nabla \otimes \mathbf{v} : \nabla \otimes \mathbf{w} dV \tag{4.11}$$

и заметим, что если $(i, m, n) \neq (i', m', n')$, то

$$\{\nabla \otimes \mathbf{v}^{(i)}_{mn} : \nabla \otimes \mathbf{v}^{(i')}_{m'n'}\} = 0 \tag{4.12}$$

Поэтому, в силу равенства Парсеваля

$$\{\nabla \otimes \mathbf{v} : \nabla \otimes \mathbf{v}\} = \sum_i \sum_m \sum_n \{\nabla \otimes \mathbf{v}^{(i)}_{mn} : \nabla \otimes \mathbf{v}^{(i)}_{mn}\} \tag{4.13}$$

(то же самое и для $\nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}}$).

Допустим, что имеется такая константа ψ, что для любых i, m, n:

$$\{\nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)}_{mn} : \nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)}_{mn}\} \leq \psi \{\nabla \otimes \mathbf{v}^{(i)}_{mn} : \nabla \otimes \mathbf{v}^{(i)}_{mn}\} \tag{4.14}$$

Тогда, в силу (4.13), будет выполнено неравенство

$$\{\nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}} : \nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}}\} \leq \psi \{\nabla \otimes \mathbf{v} : \nabla \otimes \mathbf{v}\} \tag{4.15}$$

что эквивалентно (3.22).

Таким образом, в качестве ψ может быть взято любое число, для которого (4.14) выполняется для всех i, m, n.

Напомним, что $\tilde{\mathbf{v}}$ — это некоторое векторное поле, которое удовлетворяет ГУ и значения которого заданы на $\partial\mathcal{K}$, а поля $\mathbf{v}$ — это всевозможные поля, совпадающие с $\tilde{\mathbf{v}}$ на $\partial\mathcal{K}$ и удовлетворяющие ГУ. В частности, примем, что $\tilde{\mathbf{v}}^{(1)}_{00}(r) = 0$, и тогда для $i = 1$, $m = n = 0$ неравенство (4.14) будет выполнено для любого положительного значения ψ.

Значения $\mathbf{v}^{(i)}_{mn}$, $\tilde{\mathbf{v}}^{(i)}_{mn}$ на $\partial\mathcal{K}'$ определяются заданием вектора $\mathbf{g}^{(i)}_{mn}(r^{\text{in}})$. Для скалярного квадрата $\{\nabla \otimes \mathbf{v}^{(i)}_{mn} : \nabla \otimes \mathbf{v}^{(i)}_{mn}\}$ воспользуемся оценкой снизу, вытекающей из известных вариационных принципов

$$\{\nabla \otimes \mathbf{v}^{(i)}_{mn} : \nabla \otimes \mathbf{v}^{(i)}_{mn}\} \geq \Big(\int\limits_{\partial\varkappa^{c'}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}^{(i)}_{mn} d\Sigma \Big)^2 \{\mathbf{H} : \mathbf{H}\}^{-1} \tag{4.16}$$

где $\mathbf{H}$ — произвольное тензорное поле второго ранга, удовлетворяющее условиям «равновесия»

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{H}|_{\partial\varkappa^{f'}} \times \mathbf{n}_0 = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}|_{\partial\varkappa^{s'}} = 0 \tag{4.17}$$

В частности, можно взять $\mathbf{H}^{(i)}_{mn}$ в виде

$$\mathbf{H}^{(i)}_{mn}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{h}^{(i)}_{mn}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}^{(i)}_{mn}(r^{\text{in}}) \tag{4.18}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h}^{(i)}_{mn} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}^{(i)}_{mn}|_{\partial\varkappa^{s'}} = 0 \quad (i = 1, \ldots, 4) \tag{4.19}$$

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{h}^{(i)}_{mn}|_{\partial\varkappa^{f'}} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{4.20}$$

Для дальнейшей конкретизации полей $h^{(i)}_{mn}(\mathbf{x})$ введем для m и n, не равных нулю одновременно, набор эффективных длин

$$l_{mn} \equiv (m^2 (\pi/l)^2 + n^2/(r^{\text{in}})^2)^{-1/2}, \quad l_{mn} \leq \max(r^{\text{in}}, l/\pi) \tag{4.21}$$

Пусть, кроме того, $g_{mn}(r)$ — непрерывная кусочно-гладкая функция, обращающаяся в нуль при $r = r^{\text{ex}}$ и равная единице при $r = r^{\text{in}}$.

Тогда примем

$$\mathbf{h}^{(i)}_{mn} \equiv \Big(\mathbf{n}_0 \frac{\partial \eta^{(i)}_{mn}}{\partial z} + \mathbf{e}_\varphi \frac{r}{(r^{\text{in}})^2} \frac{\partial \eta^{(i)}_{mn}}{\partial \varphi} \Big) (l_{mn})^2 \frac{g'_{mn}(r)}{r} + \mathbf{e}_r \eta^{(i)}_{mn} \frac{g_{mn}(r)}{r} \tag{4.22}$$

Нетрудно убедиться, что $\mathbf{h}^{(i)}_{mn}$ в виде (4.22) удовлетворяет условиям (4.19), (4.20).

Поле $\widetilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn}(\mathbf{x})$ примем в виде

$$\widetilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{g}^{(l)}_{mn}(r^{in})\, \eta^{(l)}_{mn}(z, \varphi)\, g_{mn}(r) \tag{4.23}$$

Подставляя (4.22) в (4.16), получим

$$\Big(\int_{\partial\varkappa^{c^l}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^{(l)}_{mn}\cdot\mathbf{v}^{(l)}_{mn} d\Sigma \Big)^2 \{\mathbf{H}^{(l)}_{mn} : \mathbf{H}^{(l)}_{mn}\}^{-1} =$$

$$= (\mathbf{g}^{(l)}_{mn}(r^{in})\cdot\mathbf{g}^{(l)}_{mn}(r^{in})) \Big(\int_{\partial\varkappa^{c^l}} \frac{1}{r^{in}} (\eta^{(l)}_{mn})^2\, d\Sigma \Big)^2 \{\mathbf{h}^{(l)}_{mn}\cdot\mathbf{h}^{(l)}_{mn}\}^{-1} \tag{4.24}$$

$$\mathbf{h}^{(l)}_{mn}\cdot\mathbf{h}^{(l)}_{mn} = \Big(\Big(\frac{\partial\eta^{(l)}_{mn}}{\partial z} \Big)^2 + \frac{r^2}{(r^{in})^4} \Big(\frac{\partial\eta^{(l)}_{mn}}{\partial\varphi} \Big)^2 \Big) l^4_{mn} \frac{(g_{mn}')^2}{r^2} + \tag{4.25}$$

$$+ (\eta^{(l)}_{mn})^2 \frac{(g_{mn})^2}{r^2} \longleftrightarrow (\eta^{(l)}_{mn})^2 \Big(\Big(m^2p^2 + \frac{n^2r^2}{(r^{in})^4} \Big) l^4_{mn} \frac{(g_{mn}')^2}{r^2} + \frac{(g_{mn})^2}{r^2} \Big)$$

Знак $\longleftrightarrow$ в (4.25) означает эквивалентность при интегрировании по (z, φ). После выполнения этого интегрирования в знаменателе появится множитель, равный одному из интегралов в числителе, на который сократим

$$\{\nabla \otimes \mathbf{v}^{(l)}_{mn} : \nabla \otimes \mathbf{v}^{(l)}_{mn}\} \geq |\mathbf{g}^{(l)}_{mn}(r^{in})|^2 \times$$

$$\times \int_{\partial\varkappa^{c^l}} \frac{(\eta^{(l)}_{mn})^2}{r^{in}} d\Sigma \Big(\int_{r^{in}}^{r^{ex}} \Big(\Big(m^2p^2 + \frac{n^2r^2}{(r^{in})^4} \Big) l^4_{mn} (g_{mn}')^2 + (g_{mn})^2 \Big) \frac{dr}{r} \Big)^{-1} \tag{4.26}$$

Пользуясь (4.9), для $\nabla \otimes \widetilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn}$ получим

$$\{\nabla \otimes \widetilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn} : \nabla \otimes \widetilde{\mathbf{v}}^{(l)}_{mn}\} = |\mathbf{g}^{(l)}_{mn}(r^{in})|^2 \int_{\varkappa^{s^l}} \Big(\Big(\Big(\frac{\partial\eta^{(l)}_{mn}}{\partial z} \Big)^2 + \tag{4.27}$$

$$+ \frac{1}{r^2} \Big(\frac{\partial\eta^{(l)}_{mn}}{\partial\varphi} \Big)^2 \Big) (g_{mn})^2 + (\eta^{(l)}_{mn} g_{mn}')^2 \Big) dV =$$

$$= |\mathbf{g}^{(l)}_{mn}(r^{in})|^2 \Big(\int_{\partial\varkappa^{c^l}} (\eta^{(l)}_{mn})^2 \frac{d\Sigma}{r^{in}} \Big) \int_{r^{in}}^{r^{ex}} \Big(\Big(m^2p^2 + \frac{n^2}{r^2} \Big) (g_{mn})^2 + (g_{mn}')^2 \Big) rdr$$

Таким образом, для константы ψ годится любое значение

$$\psi \geq \max_{m+n\geq 1} \Big(\Big(\int_{r^{in}}^{r^{ex}} \Big(\Big(m^2p^2 + \frac{n^2}{r^2} \Big) (g_{mn})^2 + (g_{mn}')^2 \Big) rdr \Big) \times \tag{4.28}$$

$$\times \int_{r^{in}}^{r^{ex}} \Big(\Big(m^2p^2 + \frac{n^2r^2}{(r^{in})^4} \Big) l^4_{mn} \frac{(g_{mn}')^2}{r^2} + \frac{(g_{mn})^2}{r^2} \Big) rdr \Big)$$

Конкретизируем теперь функцию $g_{mn}(r)$, приняв предварительно для простоты некоторые ограничения на соотношение размеров обоймы, а именно, пусть

$$r^{ex} \geq r^{in} + \max(r^{in}, l/\pi) \tag{4.29}$$

Тогда для любых значений (m, n) заведомо выполняется неравенство

$$r^{in} + l_{mn} \leq r^{ex} \tag{4.30}$$

и $g_{mn}(r)$ можно принять в виде

$$g_{mn}(r) \equiv \begin{cases} \dfrac{r^{\text{in}} + l_{mn} - r}{l_{mn}}, & r^{\text{in}} \le r \le r^{\text{in}} + l_{mn} \\ 0, & r^{\text{in}} + l_{mn} \le r \le r^{\text{ex}} \end{cases}$$

Заметим, что максимизируемое выражение в (4.28) не меняется при пропорциональном изменении линейных размеров, поэтому, без ограничения общности, можно принять $r^{\text{in}} = 1$ (взять r^{in} в качестве единицы измерения длин).

Учитывая, что

$$0 \le g_{mn}(r) \le 1, \quad (g'_{mn}(r))^2 = l_{mn}^{-2} \tag{4.31}$$

и интегрирование фактически ведется от $r = 1$ до $r = 1 + l_{mn}$, нетрудно получить для правой части (4.28) оценку сверху, равную $\max(9, 4\ln(1 + l/\pi))$.

Таким образом, в рамках сделанных предположений о геометрии обоймы, можно принять в качестве весьма грубой (но строгой) оценки сверху

$$\psi = \max\left(9, 4\ln\left(1 + \frac{l}{\pi r^{\text{in}}}\right)\right) \tag{4.32}$$

5. Асимптотика малых толщин. Для того, чтобы воспользоваться неравенством (3.25), нужно знать, чему равна константа Корна для обоймы (точное значение или оценку сверху). Однако, определение константы Корна является самостоятельной задачей, решение которой для полого цилиндра нам неизвестно. Но в литературе по неравенству Корна имеется некий результат [23], которым можно воспользоваться: точное значение константы Корна для кругового кольца.

Покажем, что это значение является асимптотическим для обоймы при стремлении ее высоты l к нулю.

Прежде всего заметим, что для симметризованных полей смещений в $\varkappa^{s'}$ ограничение на повороты (3.9) сводится к условию равенства нулю среднего поворота, которое обычно принимается при определении константы Корна.

Разложим поле смещений $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора по z. При этом необходимо учесть, что поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в $\varkappa^{s'}$ получается путем присовокупления отраженного поля к полю $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в $\varkappa^{s}$; при этом производные на плоскости симметрии могут рваться, даже если они непрерывны в $\varkappa^{s}$. Поэтому разложение по z будем понимать как совокупность двух разложений: в $\varkappa^{s}$ и в отраженной области; при этом все рассматриваемые интегралы будут равны просто удвоенным интегралам по $\varkappa^{s}$.

Воспользуемся упомянутым разложением и найдем ряд для градиента

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \overset{!}{=} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}\cdot(\mathbf{I} - \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)) + z\mathbf{v}_1(\mathbf{x}\cdot(\mathbf{I} - \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)) + \ldots \tag{5.1}$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0\cdot(\mathbf{I} - \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)$$

$$\nabla \otimes \mathbf{v} = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)\cdot\nabla \otimes \mathbf{v}_0\cdot(\mathbf{I} - \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0) + \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{v}_1 + O(z) \tag{5.2}$$

$$\mathbf{1}^{\text{def}} : \nabla \otimes \mathbf{v} = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0) \cdot (\mathbf{1}^{\text{def}} : \nabla \otimes \mathbf{v}_0) \cdot$$

$$\cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0) + \mathbf{1}^{\text{def}} : \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{v}_1 + O(z) \tag{5.3}$$

Ограничимся нулевым членом разложения для градиента и тензора малых деформаций и проинтегрируем их квадраты по $\varkappa^{s'}$:

$$\{\nabla \otimes \mathbf{v} : \nabla \otimes \mathbf{v}\} = 2l(\{\nabla \otimes \mathbf{v}_0 : \nabla \otimes \mathbf{v}_0\}^r + \{\mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{v}_1 : \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{v}_1\}^r + O(l)) \tag{5.4}$$

$$\{\nabla \otimes \mathbf{v} : \nabla \otimes \mathbf{v}\} = 2l(\{\nabla \otimes \mathbf{v}_0 : \mathbf{1}^{\text{def}} : \nabla \otimes \mathbf{v}_0\}^r +$$

$$+ \{\mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{v}_1 : \mathbf{1}^{\text{def}} : \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{v}_1\}^r + O(l)) \tag{5.5}$$

где индекс r означает интегрирование по круговому кольцу.

Тогда, с учетом диадности тензора $\mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{v}_1$ получим

$$\frac{\{\nabla \otimes \mathbf{v} : \nabla \otimes \mathbf{v}\}}{\{\nabla \otimes \mathbf{v} : \mathbf{1}^{\mathrm{def}} : \nabla \otimes \mathbf{v}\}} \leq \max (k^r, 2) + O(l) = k^r + O(l) \tag{5.6}$$

где k^r — константа Корна для кругового кольца (как показано в [23], $k^r \geq 4$).

Анализ полученных в [23] формул показывает, что

$$k^r = 4\,(1 - (3\,(1 + (r^{\mathrm{ex}}/r^{\mathrm{in}})^2 + (r^{\mathrm{ex}}/r^{\mathrm{in}})^{-2})^{-1})^{1/2})^{-1} \tag{5.7}$$

не только при $r^{\mathrm{in}}/r^{\mathrm{ex}} \leq 1/e = 0{,}367\ldots$ (как утверждается в [23]), но и при произвольных значениях этого отношения. В частности, при значении $r^{\mathrm{in}}/r^{\mathrm{ex}} = 1/2$ (предельное значение при сделанных нами допущениях) имеем $k^r \leq 17$. Если в (3.25) пренебречь слагаемыми, имеющими порядок напряжений, по сравнению со слагаемыми, имеющими порядок модулей, то при $l \ll r^{\mathrm{in}}$, $r^{\mathrm{ex}} = 2r^{\mathrm{in}}$ получим $\lambda_m^{\circ} \geq k^r\psi\lambda_M^e \cong 150\lambda_M^e$, т. е. материал обоймы должен быть в 150 раз жестче материала образца при разгрузке (заметим, что оценка сильно завышенная). Во всяком случае, такое соотношение жесткостей заведомо обеспечивает достижение абсолютного теоретического предела закритичности в образце при рассматриваемой идеализированной схеме испытаний и при условии малости уровня напряжений по отношению к упругим модулям.

6. Пределы устойчивого закритического деформирования. Примеры. В данном разделе приведем без доказательства некоторые результаты, полученные в [1, 2] и касающиеся соотношения между условием Адамара и условием разупрочнения (1.15); эти результаты использованы в примерах, которые также подробно рассмотрены в [1, 2].

Условие Адамара (3.1) и условие разупрочнения (нарушение постулата Друккера) формулируются для разных тензоров жесткостей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{L}$, что затрудняет их сопоставление, тем более, что тензор $\mathbf{A}$ имеет весьма громоздкую структуру. Однако, если в (3.1) заменить тензор $\mathbf{A}$ на более простой тензор

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{L}^s - 2\tau\mathbf{1}^{\mathrm{def}} + \tau\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \tag{6.1}$$

то получим чуть более сильное неравенство, обеспечивающее адамаровость тензора $\mathbf{A}$, так как

$$\forall \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 : \mathbf{B} : \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 \leq \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 : \mathbf{A} : \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 \tag{6.2}$$

В следующих примерах достижимая степень закритичности определена (с некоторым запасом) именно с помощью этого более сильного неравенства.

Пример 1. Рассмотрим экзотический, но математически простой и наглядный определяющий закон, для которого при активном нагружении тензор $\mathbf{L}^{sp}$ формально совпадает с таковым для закона Гука с отрицательным объемным модулем:

$$\mathbf{L}^{sp} = 2G\mathbf{1}^{\mathrm{def}} + (K - 2/3\,G)\,\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \tag{6.3}$$

где G — модуль сдвига, K — модуль объемного сжатия.

Тензор $\mathbf{B}$ адамаров, если

$$G > \tau, \quad K > K_* = -4/3\,G + \tau < 0 \tag{6.4}$$

Разупрочнение имеет место, если хотя бы один из модулей G, K отрицателен. Значит, устойчивое однородное закритическое деформирование возможно при $K_* < K < 0$. В частности, его можно осуществить с помощью сжатия в цилиндрической обойме при соблюдении условий (3.25).

Пример 2. Пусть определяющий закон при активном нагружении соответствует ассоциированному закону течения Мизеса, а при разгрузке — закону Гука. Обозначим через $\mathbf{N}$ нормированный ($\mathbf{N} : \mathbf{N} = 1$) девиатор напряжений. Тогда в (1.13), (1.14) $\Omega = \mathbf{N}$ и

$$\mathbf{L}^{sp} = 2h'G\,\mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + 2G\,(\mathbf{1}^{\mathrm{def}} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) + (K - 2/3\,G)\,\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \tag{6.5}$$

$$h' = h/(h + 2G)$$

где G и K считаются положительными.

Пусть $\mathbf{N}$ — девиатор одноосного сжатия

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)/\sqrt{6}$$

Пусть также для простоты $K + \tau = 2/3\,G$ (нулевой коэффициент Пуассона для B). Тогда результат особенно нагляден:

$$h_*' = -1/5\,(1 - 6\tau/G)$$

и если материал выходит на участок разупрочнения при $\tau < G/6$, то в пределах $h_*' < h < 0$ возможно устойчивое однородное закритическое деформирование (в том числе и при испытаниях изученного типа).

Аналогичные оценки достижимой степени закритичности могут быть получены и для других упругопластических определяющих соотношений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Об осуществимости состояний материала, соответствующих «падающему» участку диаграммы//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. N 2. С. 155—161.
2. *Рыжак Е. И.* К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. N 1. С. 111—127.
3. *Ryzhak E. I.* On stable deformation of «unstable» materials in a rigid triaxial testing machine//J. Mech. and Phys. Solids. 1993. V. 41. No. 8. P. 1345—1356.
4. *Рыжак Е. И.* Об устойчивом закритическом деформировании в нежесткой трехосной испытательной машине//Докл. АН. 1993. Т. 330. N 2. С. 197—199.
5. *Ryzhak E. I.* On stability of homogeneous elastic bodies under boundary conditions weaker than displacement conditions//Q. J. Mech. appl. Math. 1994. V. 47. Pt. 4. P. 663—672.
6. *Read H. E., Hegemier G. A.* Strain softening of rock, soil and concrete. A review article//Mech. of Materials. 1984. V. 3. No. 4. P. 271—294.
7. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics.//Encyclopedia of physics. V. III/3. Berlin: Springer-Verlag, 1965. 602 p.
8. *Van Hove L.* Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux integrales multiples a plusieurs fonctions inconnues//Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. 1947. V. 50. P. 18—23.
9. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений//Докл. АН. 1950. Т. 74. N 5. С. 881—884.
10. *Ericksen J. L., Toupin R. A.* Implications of Hadamard's condition for elastic stability with respect to uniqueness theorems//Canad. J. Math. 1956. V. 8. No. 3. P. 432—436.
11. *Hill R.* Acceleration waves in solids//J. Mech. and Phys. Solids. 1962. V. 10. No. 1. P. 1—16.
12. *Zorski H.* On the equations describing small deformations seperimposed on finite deformations//Proc. Intern. Symp. Second — Order Effects, Haifa 1962. Oxford: Pergamon Press, 1964. P. 109—128.
13. *Beatty M. F.* Some static and dynamic implications of the general theory of elastic stability//Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1965. V. 19. No. 3. P. 167—188.
14. *Рыжак Е. И.* О необходимости условий Адамара для устойчивости упругопластических тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. N 4. С. 101—104.
15. *Rice J. R.* The localization of plastic deformation//Theoretical and Applied Mechanics: Proc. 14th IUTAM Congr. Amsterdam: North—Holland, 1976. P. 207—220.
16. *Drucker D. C.* A definition of stable inelastic material//Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1959. V. 26. No. 1. P. 101—106.

17. *Drucker D. C.* On the postulate of stability of material in the mechanics of continua//J. Mec. 1964. V. 3. No. 2. P. 235—249.
18. *Hill R.* A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids//J. Mech. and Phys. Solids. 1958. V. 6. No. 3. P. 236—249.
19. *Hutchinson J. W., Miles J. P.* Bifurcation analysis of the onset of necking in an elastic/plastic cylinder under uniaxial tension//J. Mech. and Phys. Solids. 1974. V. 22. No. 1. P. 61—77.
20. *Miles J. P.* The initiation of necking in rectangular elastic/plastic specimens under uniaxial and biaxial tension//J. Mech. and Phys. Solids. 1975. V. 23. No. 3. P. 197—213.
21. *Рыхлевский Я.* О законе Гука//ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420—435.
22. *Holden J. T.* Estimation of critical loads in elastic stability theory//Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1964. V. 17. No. 3. P. 171—183.
23. *Dafermos C. M.* Some remarks on Korn's inequality//ZAMP. 1968. V. 19. No. 6. P. 913—920.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1992